ПРИНЦИП САМОДОСТАТОЧНОСТИ ФИНСЛЕРОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Г. И. Гарасько

ГУП ВЭИ, Москва, Россия,
НИИ гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, МО
gri9z@mail.ru

Из принципа самодостаточности финслеровой геометрии получаются уравнения поля, причем гравитационное поле и электромагнитное поле естественным образом объединяются и в псевдоримановом четырехмерном пространстве, и в кривом четырехмерном пространстве Бервальда-Моора; и всегда существует тензор энергии-импульса, связанный с законами сохранения.

Показано, что в приближении малых полей новый геометрический подход в теории поля, следующий из принципа самодостаточности финслеровой геометрии, в первом приближении может приводить к линейным уравнениям поля для нескольких независимых полей. При усилении полей, то есть при переходе ко второму приближению, полевые уравнения становятся, вообще говоря, нелинейными, и поля перестают быть независимыми, что приводит к отсутствию закона суперпозиции для каждого отдельного поля и к взаимодействию между разными полями.

Ключевые слова: финслерова геометрия, пространство Бервальда-Моора, теория поля.

1 Введение

Обычно физик теоретик работает сразу с несколькими метрическими пространствами, определенными в одном и том же координатном пространстве, так как написание функции Лагранжа для получения уравнений движения некой материальной частица – это, в некотором смысле, введение дополнительной геометрии точно так же, как и задание лагранжиана для получения уравнений поля. Как показал Финслер, Лагранжев формализм можно геометризовать [1]. Можно ли геометризовать и получение уравнений поля и считать геометрию единой для геометрических построений и измерений, получения уравнений движения материальных объектов и для написания уравнений поля?

Наиболее удобный способ получения уравнений поля как в классической теории [2], так и в теории квантованных полей [3] связан с понятиями лагранжиана, действия и принципа экстремального (или стационарного, или наименьшего) действия. При этом однозначно устанавливается связь между непрерывными преобразованиями, относительно которых инвариантно действие, и физическими законами сохранения, которые могут быть проверены экспериментально.

Если x^0, x^1, x^2, x^3 – координаты, $f(x) \equiv f(x^0, x^1, x^2, x^3)$ – скалярное поле в пространстве Минковского, а

$$\mathfrak{L} \equiv \mathfrak{L}\left(f(x); \frac{\partial f}{\partial x^0}, \frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3}\right), \tag{1}$$

– лагранжиан, то интеграл от лагранжиана по некоторому четырехмерному объему $\mathcal{V}$ пространства-времени,

$$I[f] = \int\limits_{\mathcal{V}}^{4} \mathfrak{L}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \tag{2}$$

принято называть действием. Считая, что вариации функции поля δf равны нулю на границе объема интегрирования, и требуя экстремальности действия, то есть

$$\delta I[f] = 0\,, \tag{3}$$

с помощью известной математической процедуры получим уравнение Лагранжа-Эйлера-Остроградского, которое и есть уравнение поля:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial f} = 0\,. \tag{4}$$

Обычно лагранжиан подбирают так, чтобы получить известные уравнения поля, или строят, обеспечивая заданную симметрию и выполнение некоторых дополнительных требований, например, чтобы получались линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Построение качественно новых лагранжианов, описывающих нелинейные физические процессы является, в известном смысле, искусством. О *самодостаточности геометрии* можно говорить тогда, когда без привлечения дополнительных построений из самой геометрии следуют уравнения поля для не заданных изначально математических (и физических!) полей.

2 Принцип самодостаточности

Функционалу (2) можно придать чисто геометрический смысл и считать его не интегралом в пространстве Минковского от лагранжиана $\mathfrak{L}$, а объемом в некотором более сложном пространстве, в котором элемент объема имеет вид:

$$dV = \mathfrak{L}\; dx^0 dx^1 dx^2 dx^3\,. \tag{5}$$

Рассмотрим финслерово пространство $x^1, x^2, ..., x^n$ [1] с метрической функцией

$$L(dx; x) \equiv L(dx^1, dx^2, ..., dx^n; x^1, x^2, ..., x^n)\,. \tag{6}$$

В таком пространстве элемент длины ds по определению есть

$$ds = L(dx^1, dx^2, ..., dx^n; x^1, x^2, ..., x^n)\,. \tag{7}$$

Более наглядно метрические свойства финслерова пространства можно описать с помощью понятия индикатрисы, которая определяется в каждой точке $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ основного пространства в соответствующем касательном центроаффинном пространстве $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$ как геометрическое место концом единичных радиус-векторов ξ_{ind}. Такая гиперповерхность описывается уравнением

$$L(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n; x^1, x^2, ..., x^n) = 1\,. \tag{8}$$

Задание системы индикатрис в каждой точке основного пространства, или, что тоже самое, задание множеств единичных векторов, полностью определяет финслерову геометрию. Для того, чтобы вычислить длину вектора $(dx^1, dx^2, ..., dx^n)$, надо найти сонаправленный вектору dx единичный вектор ξ_{ind}, тогда числовой коэффициент ds в формуле

$$dx^i = ds \cdot \xi^i_{ind} \tag{9}$$

и есть длина вектора dx. Из этой формулы следует, что элемент длины

$$ds = \frac{|dx|_{ev}}{|\xi_{ind}|_{ev}}\,, \tag{10}$$

где $|dx|_{ev}$, $|\xi|_{ev}$ – длины векторов $(dx^1, dx^2, ..., dx^n)$ и $(\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n)$, вычисляемые так, как если бы пространство $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$ было евклидово, а система координат в нем – декартовой прямоугольной.

Если при выполнении последних предположений можно вычислить объем индикатрисы, то есть n-мерный объем, который зачерчивает единичный вектор ξ_{ind} в касательном центроаффинном пространстве $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$, пробегая всю индикатрису, то в финслеровом пространстве можно, аналогично (10), определить элемент объема dV по формуле

$$dV = const \cdot \frac{dx^1 dx^2 ... dx^n}{(V_{ind})_{ev}}\,, \tag{11}$$

где $(V_{ind})_{ev}$ – объем индикатрисы, вычисленный в предположении, что касательное пространство евклидово, а координаты декартовы прямоугольные. Совершенно очевидно, что таким образом определенный элемент объема инвариантен относительно преобразования координат. Объем $V_{ind}(x^1, x^2, ..., x^n)$ является эталонным объемом в той точке основного финслерова пространства, в которой он вычисляется.

Рассмотрим n-мерное риманово пространство, метрическая функция в этом случае имеет вид

$$L(dx; x) = \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}\,, \tag{12}$$

а уравнение индикатрисы соответственно –

$$g_{ij}\xi^i\xi^j = 1\,. \tag{13}$$

Это уравнение определяет гиперповерхность второго порядка, а именно, эллипсоид. Если считать пространство $\xi^1, \xi^2, ..., \xi^n$ евклидовым, то, как известно, объем такого эллипсоида есть

$$(V_{ind})_{ev} = \frac{const'}{\sqrt{det(g_{ij})}}\,. \tag{14}$$

Подставляя это выражение в формулу (11), получим элемент объема в произвольном римановом пространстве

$$dV = const \cdot \sqrt{det(g_{ij})} \quad dx^1 dx^2 ... dx^n\,, \tag{15}$$

что совпадает с обычным определением инвариантного элемента объема в римановом пространстве.

Для псевдоримановых пространств без специальных дополнительных условий на индикатрису

$$(V_{ind})_{ev} = \infty \qquad \Rightarrow \qquad dV = 0 \cdot dx^1 dx^2 ... dx^n\,. \tag{16}$$

Точно такая же трудность возникает при определении элемента объема во всех финслеровых пространствах, у которых одна из координат является временно́й. Тем не менее, обычно проблему (16) удается решить тем или иным способом.

Так псевдориманову пространству с метрическим тензором $g(x)_{ij}$ и сигнатурой $(+,-,-,-)$ можно приписать инвариантный элемент объема вида

$$dV = const \cdot \sqrt{-det\,(g(x)_{ij})} \quad dx^0 dx^1 dx^2 dx^3\,, \tag{17}$$

что и принято в ОТО [2].

К проблеме (16) в псевдоримановых пространствах можно подойти более строго, но при этом приходится переходить к пространствам более общим, чем псевдоримановы пространства. Поясним это на примере пространства Минковского. Если вместо пространства Минковского взять финслерово пространство с метрической функцией

$$L(dx) = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} + q_0 dx^0 \tag{18}$$

и условием $dx^0 \geq 0$, где $q_0 > 0$, то у такого пространства объем индикатрисы $(V_{ind})_{ev}$ - конечное действительное число, зависящее от параметра q_0 и стремящееся к ∞, когда параметр q_0 стремится к 0. Все измеряемые физические величины должны получаться при $q_0 \to 0$.

Итак, будем считать, что в любом финслеровом пространстве, в котором имеет место проблема (16), она может быть разрешена тем или иным способом. Тогда можно утверждать, что из самой геометрии финслерова пространства, если в метрической функции содержатся некоторые поля, автоматически получается лагранжиан

$$\mathfrak{L} = \frac{const}{(V_{ind})_{ev}}\,, \tag{19}$$

из которого затем получаются уравнения для полей [6], [7].

Замечание. Ниже при получении уравнений поля постоянные, которые фигурируют в формулах (11) – (15), (17), (19), мы часто будем опускать, так как они не входят в полевые уравнения.

Принцип самодостаточности финслеровой геометрии: если метрическая функция финслеровой геометрии содержит неопределенные (незаданные) поля, то эти поля должны удовлетворять уравнениям Лагранжа-Эйлера-Остроградского, следующим из требования экстремума любого объема финслерова пространства при условии, что вариации полей на границе объема равны нулю.

Впервые принцип самодостаточности геометрии был реализован в ОТО: если известно, что геометрия псевдориманова, то известны уравнения движения для пробных частиц и известны уравнения, которым должен удовлетворять метрический тензор, то есть уравнения гравитационного поля. Уравнения поля в ОТО записываются с применением ковариантных производных, или объектов связности. Геометрия Финслера сформулирована именно таким образом, что пробные частица движутся по экстремалям – мировым линиям, на которых осуществляется экстремум длины мировой линии между двумя событиями, образно говоря, по "геодезическим". В любой финслеровой геометрии из *принципа самодостаточности* следуют уравнения поля, при этом не нужны ковариантные производные и объекты связности, тем более, что без дополнительных построений далеко не в каждом финслеровом пространстве такие объекты можно определить.

3 Пространства, конформно связанные с евклидовыми пространствами

Пространство, конформно связанное с n-мерным евклидовым пространством, обладает элементом длины

$$ds = \kappa(x) \cdot \sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + ... + (dx^n)^2}\,, \tag{20}$$

где $\kappa(x) > 0$. Так как в этом случае

$$\sqrt{det(g_{ij})} = \kappa^n(x)\,, \tag{21}$$

лагранжиан имеет вид

$$\mathfrak{L} = \kappa^n(x)\,. \tag{22}$$

Для того, чтобы получить из такого лагранжиана уравнение поля, надо выразить скалярное поле $\kappa(x)$ через другое поле так, что лагранжиан уже будет содержать производные нового поля. Как это сделать, показано в работах [4], [5]. Обобщенные импульсы в пространстве (20) определяются формулой

$$p_i = \kappa(x) \frac{dx^i}{\sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + ... + (dx^n)^2}} \,, \tag{23}$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать следующим образом:

$$p_1^2 + p_2^2 + ... + p_n^2 - \kappa^2(x) = 0\,. \tag{24}$$

Скалярная функция $S_W(x)$, которая в пространстве $x^1, x^2, ..., x^n$ определяет нормальную конгруэнцию геодезических и которую в работе [4] предложено называть Мировой функцией, связана с полем коэффициента расширения-сжатия соотношением

$$\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^n}\right)^2 = \kappa^2(x)\,. \tag{25}$$

Таким образом,

$$\mathfrak{L} = \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} \,, \tag{26}$$

а уравнение поля (4) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\frac{\partial S_W}{\partial x^i}\left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}-1}\right\} = 0\,. \tag{27}$$

Отметим, что для $n > 2$ это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка.

Запишем для пространства, конформно связанного с двумерной евклидовой плоскостью (x, y), уравнение (27),

$$\frac{\partial^2 S_W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_W}{\partial y^2} = 0\,, \tag{28}$$

то есть функция $S_W(x, y)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа, а значит она является компонентой аналитической функции комплексной переменной. Тогда

$$\kappa(x, y) = \sqrt{\left(\frac{\partial S_W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_W}{\partial y}\right)^2} \tag{29}$$

– это коэффициент конформного преобразования элемента длины евклидового пространства

$$ds' = \sqrt{(dx')^2 + (dy')^2} = \kappa(x, y)\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \tag{30}$$

при конформном преобразовании

$$x' = u(x, y)\,, \qquad y' = \pm v(x, y)\,, \tag{31}$$

когда функция S_W является одной из компонент аналитической функции $u + iv$ комплексной переменной $x + iy$.

Найдем решение уравнения (27) в предположении, что функция S_W зависит только от радиуса

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + ... + (x^n)^2}\,. \tag{32}$$

Это удобнее сделать, записав элемент объема в сферических координатах и проинтегрировав по всем углам,

$$dV_r = r^{n-1}\left|\frac{dS_W}{dr}\right|^n dr \qquad \Rightarrow \qquad \mathfrak{L}_r = r^{n-1}\left|\frac{dS_W}{dr}\right|^n . \tag{33}$$

Тогда уравнение поля запишется следующим образом:

$$\frac{d}{dr}\left[r^{n-1}\left|\frac{dS_W}{dr}\right|^{n-1}\right] = 0\,. \tag{34}$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{dS_W}{dr} = \frac{C}{r}\,, \qquad S_W = C\ln\frac{r}{r_0}\,, \tag{35}$$

$C \neq 0$, $r_0 > 0$ – действительные числа, тогда

$$\kappa(x) = \left|\frac{dS_W}{dr}\right| = \frac{|C|}{r}\,. \tag{36}$$

Геодезические в таком пространстве определяются уравнениями

$$\dot{x}^i = \frac{dS_W}{dx^i}\cdot\lambda(x)\,, \tag{37}$$

где $\lambda(x) \neq 0$ – некоторая функция, $\dot{x}^i$ – производная x^i по параметру вдоль геодезической τ. Выберем $\lambda(x) = \dfrac{r^2}{C}$, из (37) следует, что

$$\dot{x}^i = x^i\,. \tag{38}$$

Пусть $j > 1$, тогда

$$\frac{dx^j}{dx^1} = \frac{x^j}{x^1} \qquad \Rightarrow \qquad x^j = C^j x^1\,, \tag{39}$$

то есть нормальная конгруэнция геодезических, определяемая функцией (35), в таком пространстве состоит из прямых линий, проходящих через начало координат с направляющим вектором $(1, C^2, C^3, ..., C^n)$.

4 Пространства, конформно связанные с псевдоевклидовыми пространствами с сигнатурой $(+,-,-,...,-)$

Пространство, конформно связанное с n-мерным псевдоевклидовым пространством с сигнатурой $(+,-,-,...,-)$, обладает элементом длины

$$ds = \kappa(x)\cdot\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - ... - (dx^{n-1})^2}\,, \tag{40}$$

где $\kappa(x) > 0$. Так как в этом случае

$$\sqrt{(-1)^{n-1}det\,(g_{ij})} = \kappa^n(x)\,, \tag{41}$$

лагранжиан имеет вид

$$\mathfrak{L} = \kappa^n(x)\,. \tag{42}$$

Для того, чтобы получить из такого лагранжиана уравнение поля, надо выразить скалярное поле $\kappa(x)$ через другое поле так, что лагранжиан уже будет содержать производные нового поля [4], [5].

Компоненты обобщенного импульса в пространстве (40) определяются формулами

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{\kappa(x)\; dx^0}{\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - ... - (dx^{n-1})^2}}, \\ p_\mu &= -\frac{\kappa(x)\; dx^\mu}{\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - ... - (dx^{n-1})^2}}, \end{aligned} \tag{43}$$

$\mu = 1, 2, ..., (n-1)$, а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать следующим образом:

$$p_0^2 - p_1^2 - ... - p_{n-1}^2 - \kappa^2(x) = 0\,. \tag{44}$$

Скалярная функция $S_W(x)$, которая в пространстве $x^0, x^1, ..., x^{n-1}$ определяет нормальную конгруэнцию геодезических, должна удовлетворять уравнению Гамильтона-Якоби

$$\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 - ... - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^{n-1}}\right)^2 = \kappa^2(x)\,. \tag{45}$$

Таким образом,

$$\mathfrak{L} = \left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 - ... - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^{n-1}}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}, \tag{46}$$

а уравнение поля (4) принимает вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x^0}\left\{\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}\right)^2 - ... - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^{n-1}}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}-1}\right\} - \\ &-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\frac{\partial S_W}{\partial x^\mu}\left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^1 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2 - ... - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^{n-1}}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}-1}\right\} = 0\,. \end{aligned} \tag{47}$$

Отметим, что для $n > 2$ это уравнение является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка и это уравнение выполняется, если функция S_W удовлетворяет уравнению эйконала

$$\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^1 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2 - ... - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^{n-1}}\right)^2 = 0\,. \tag{48}$$

Для того, чтобы при $n > 2$ уравнение поля (47) являлось волновым уравнением, функция S_W одновременно должна быть решением еще одного уравнения:

$$\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^1 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^2}\right)^2 - ... - \left(\frac{\partial S_W}{\partial x^{n-1}}\right)^2 = const\,. \tag{49}$$

Но обе эти возможности нас не устраивают, так как уравнение (47) необходимо дополнить требованием

$$\kappa(x) > 0\,, \tag{50}$$

которое следует непосредственно из постановки задачи, а при выполнении (48) или (49) $\kappa(x) \equiv 0$.

Для пространства, конформно связанного с двумерной псевдоевклидовой плоскостью (x, y), уравнение (47) приобретает вид

$$\frac{\partial^2 S_W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S_W}{\partial y^2} = 0\,, \tag{51}$$

то есть в двумерном случае уравнение поля (47) – это волновое уравнение.

Пространство, конформно связанное с пространством Минковского, играет важную роль, поэтому выпишем ряд формул этого раздела для $n = 4$, используя в них метрический тензор пространства Минковского $\overset{o}{g}_{ij}$:
связь между функцией $S_W(x)$ и коэффициентом растяжения-сжатия $\kappa(x)$ –

$$\overset{o}{g}{}^{ij}\,\frac{\partial S_W}{\partial x^i}\frac{\partial S_W}{\partial x^j} = \kappa^2(x)\,, \tag{52}$$

лагранжиан –

$$\mathfrak{L} = \left(\overset{o}{g}{}^{ij}\,\frac{\partial S_W}{\partial x^i}\frac{\partial S_W}{\partial x^j}\right)^2\,, \tag{53}$$

уравнение поля –

$$\overset{o}{g}{}^{kl}\,\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{\partial S_W}{\partial x^l}\left(\overset{o}{g}{}^{ij}\,\frac{\partial S_W}{\partial x^i}\frac{\partial S_W}{\partial x^j}\right)\right] = 0 \tag{54}$$

с дополнительным условием

$$\kappa(x) > 0\,. \tag{55}$$

5 Модельное космологическое уравнение в пространстве, конформно связанном с пространством Минковского

Запишем уравнение (54) в предположении, что функция S_W имеет вид

$$S_W(x^0, r) = S_0 e^{-\gamma x^0}\psi(r)\,, \tag{56}$$

где $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$, а γ и S_0 постоянные. Более просто получить уравнение поля такого вида, если в элементе объема перейти от пространственных координат x^1, x^2, x^3 к сферической системе координат и проинтегрировать по сферическим углам, тогда, опять же опуская постоянную, получим выражение для лагранжиана

$$\mathfrak{L} = r^2\left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial r}\right)^2\right]^2\,, \tag{57}$$

а уравнение поля запишется следующим образом:

$$r^2\frac{\partial}{\partial x^0}\left\{\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial r}\right)^2\right]\right\} - \frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2\frac{\partial S_W}{\partial r}\left[\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_W}{\partial r}\right)^2\right]\right\} = 0\,. \tag{58}$$

Подставляя в это уравнение функцию $S_W(x^0, r)$ (56),введем безразмерную переменную $\xi \equiv \gamma r$, тогда для неизвестной функции $\psi(x)$ получим уравнение

$$3\xi^2\psi\left[\psi^2 - \left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2\right] - \frac{d}{d\xi}\left\{\xi^2\frac{d\psi}{d\xi}\left[\psi^2 - \left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2\right]\right\} = 0\,. \tag{59}$$

Так как это уравнение однородно по искомой функции, то будем ее искать в виде

$$\psi(\xi) = \psi_0 \exp\left(\int\limits_0^\xi \varphi(\xi)d\xi\right)\,, \tag{60}$$

ψ_0 – постоянная, которая при составлении функции S_W перемножается с постоянной S_0, поэтому положим ее равной единице, $\psi_0 = 1$. Подставляя (60) в (59), имеем

$$\xi(1 - 3\varphi^2)\frac{d\varphi}{d\xi} + 2\varphi(1 - \varphi^2) - 3\xi(1 - \varphi^2)^2 = 0\,. \tag{61}$$

В области $\xi \ll 1$ будем искать решение в виде степенного ряда

$$\varphi \simeq A\xi + B\xi^2 + C\xi^3 + O(\xi^4)\,. \tag{62}$$

Подставим это разложение в уравнение (61), приведем подобные и получим

$$\varphi \simeq \xi - \frac{1}{5}\xi^3 + O(\xi^4)\,. \tag{63}$$

Движение материальных объектов, определяемое Мировой функцией S_W, происходит по экстремалям пространства с элементом длины

$$ds = \kappa(x^0, r)\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} \tag{64}$$

и тангенциальным уравнением индикатрисы

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - \kappa^2(x^0, r) = 0\,. \tag{65}$$

Для поля S_W (56), (62) коэффициент расширения-сжатия вычисляется по формуле

$$\kappa(x^0, r) = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2} = \gamma\cdot\sqrt{1 - \varphi^2}\cdot S(x^0, r)\,. \tag{66}$$

Из этой формулы следует, что $|\varphi| < 1$. Уравнения движения в данном случае принимают вид

$$\dot{x}^0 = \frac{\partial S_W}{\partial x^0}\lambda = -\gamma S_W\lambda\,, \qquad \dot{r} = -\frac{\partial S_W}{\partial r}\lambda = -\gamma S_W\varphi(\gamma r)\lambda\,, \tag{67}$$

где точка означает полную производную по некоторому параметру эволюции τ, а произвольная функция $\lambda \neq 0$. Тогда

$$\frac{dr}{dx^0} = \varphi(\gamma r) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dr}{dt} = c\varphi(\gamma r)\,. \tag{68}$$

Так как $|\varphi| < 1$, то

$$\left|\frac{dr}{dx^0}\right| < 1 \qquad \text{и} \qquad \left|\frac{dr}{dt}\right| < c\,.$$

Посмотрим, как ведет себя скорость материального объекта, движением которого управляет Мировая функция, в области $\xi \ll 1$, для этого подставим (62) в формулу (68):

$$\frac{dr}{dt} = c\gamma\left(1 - \frac{1}{5}\gamma^2 r^2\right) \cdot r\,. \qquad (69)$$

Если обозначить постоянную Хаббла через H_0, то полученная формула дает нам хорошее выполнение закона Хаббла при $\gamma r < \frac{1}{10}$, причем $H_0 = c\gamma$, и тенденцию того, как изменяется коэффициент Хаббла $H(r)$ с увеличением расстояния от центра:

$$\frac{dr}{dt} = H(r) \cdot r\,, \qquad H(r) = H_0 \cdot \left[1 - \frac{1}{5}\left(\frac{H_0}{c}\right)^2 \cdot r^2\right]. \qquad (70)$$

В области $\xi \ll 1$ коэффициент Хаббла уменьшается с увеличением расстояния от начала координат.

6 Пространство, конформно связанное с четырехмерным пространством Бервальда-Моора

Элемент длины в таком пространстве в специальном изотропном базисе имеет вид

$$ds = \kappa(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}\,. \qquad (71)$$

Обобщенные импульсы находятся по формулам

$$p_i = \frac{1}{4}\kappa(\xi)\frac{\sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4}}{d\xi^i}\,. \qquad (72)$$

Если $\eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4$ – координаты касательного центроаффинного пространства в точке $M(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ основного пространства, то уравнение индикатрисы запишется

$$\eta^1\eta^2\eta^3\eta^4 = \frac{1}{\kappa^4(\xi)}\,, \qquad (73)$$

а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать, например, так

$$p_1p_2p_3p_4 - \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4} = 0\,. \qquad (74)$$

Тогда функция S_W, определяющая нормальную конгруэнцию экстремалей, связана с коэффициентом растяжения-сжатия соотношением

$$\frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4} = \frac{\kappa^4(\xi)}{4^4}\,. \qquad (75)$$

Из формулы (73) следует, что

$$(V_{ind})_{ev} = const \cdot \frac{1}{\kappa^4}\,, \qquad (76)$$

а значит, лагранжиан для скалярного поля S_W запишется следующим образом:

$$\mathfrak{L} = \frac{\partial S_W}{\partial \xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial \xi^4}\,. \qquad (77)$$

Соответственно уравнение поля имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\xi^1}\left(\frac{\partial S_W}{\partial\xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^4}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial S_W}{\partial\xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^4}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\xi^3}\left(\frac{\partial S_W}{\partial\xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^4}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi^4}\left(\frac{\partial S_W}{\partial\xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^3}\right)=0\,. \tag{78}$$

Любая функция S_W, зависящая не от всех координат ξ^1,ξ^2,ξ^3,ξ^4 удовлетворяет этому уравнению, но не удовлетворяет необходимому условию

$$\kappa(x)>0\,. \tag{79}$$

7 Конформный потенциал

Пусть $x^1,x^2,...,x^n$ – финслерово пространство с метрической функцией

$$L(\xi;x)\equiv L(\xi^1,\xi^2,...,\xi^n;x^1,x^2,...,x^n)\,, \tag{80}$$

где $\xi^1,\xi^2,...,\xi^n$ – центроаффинное касательное пространство в точке $M(x^1,x^2,...,x^n)$ основного пространства. Тогда элемент длины определяется формулой

$$ds=L(dx^1,dx^2,...,dx^n;x^1,x^2,...,x^n)\,, \tag{81}$$

а компоненты обобщенного импульса

$$p_i=\frac{\partial L(dx;x)}{\partial(dx^i)} \tag{82}$$

связаны единственным функциональным соотношением

$$\Phi(p;x)=0\,. \tag{83}$$

Тангенциальному уравнению индикатрисы всегда можно придать некоторую специальную форму

$$\Phi_m(p;x)-1=0\,, \tag{84}$$

где $\Phi_m(p;x)$ – однородная функция m-го порядка $(m>0)$ по первым n аргументам. Если функция $S(x)$ определяет в рассматриваемом финслеровом пространстве нормальную конгруэнцию геодезических, то она должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\Phi\left(\frac{\partial S}{\partial x^1},...\frac{\partial S}{\partial x^n};x\right)=0\,. \tag{85}$$

Функцию $S(x)$ в классической механике называют действием как функцией координат, а уравнение (85) – уравнением Гамильтона-Якоби. Если функция $S(x)$ известна, то поле обобщенных импульсов находится как

$$p_i=\frac{\partial S}{\partial x^i}\,, \tag{86}$$

а экстремали (траектории движения, мировые линии, линии тока) находятся из системы уравнений

$$\dot{x}^i=\left.\frac{\partial\Phi(p;x)}{\partial p_i}\right|_{p_k=\frac{\partial S}{\partial x^k}}\cdot\lambda(x)\,, \tag{87}$$

где $\lambda(x) \neq 0$ – некоторая функция, $\dot{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\tau}$, а τ – параметр вдоль экстремали, параметр эволюции.

Финслерово пространство, конформно связанное с исходным, имеет метрическую функцию вида
$$\tilde{L}(\xi; x) = \kappa(x) L(\xi; x)\,, \tag{88}$$
где $\kappa(x) > 0$ – некая скалярная функция. Элемент длины в таком пространстве определяется формулой
$$d\tilde{s} = \kappa(x) L(dx; x)\,. \tag{89}$$
Обобщенные импульсы
$$\tilde{p}_i = \kappa(x)\,\frac{\partial L(dx; x)}{\partial (dx^i\,)} \tag{90}$$
связаны соотношением
$$\Phi_m(\tilde{p}; x) - \kappa^m = 0\,, \tag{91}$$
то есть функция Финслера конформно связанного пространства определяется следующим образом:
$$\tilde{\Phi}(\tilde{p}; x) = \Phi_m(\tilde{p}; x) - \kappa^m\,. \tag{92}$$

Пусть $S_W(x)$ – скалярная функция, тогда в области, где выполняется неравенство
$$\Phi_m\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}, ...\frac{\partial S_W}{\partial x^n}; x\right) > 0\,, \tag{93}$$
определена финслерова геометрия, конформно связанная с исходной, и полем коэффициента растяжения-сжатия
$$\kappa(x) = \sqrt[m]{\Phi_m\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}, ...\frac{\partial S_W}{\partial x^n}; x\right)}\,, \tag{94}$$
причем в этой же области функция $S_W(x)$ определяет нормальную конгруэнцию геодезических
$$\dot{x}^i = \left.\frac{\partial \Phi_m(\tilde{p}; x)}{\partial \tilde{p}_i}\right|_{\tilde{p}_k = \frac{\partial S_W}{\partial x^k}} \cdot \tilde{\lambda}(x)\,, \tag{95}$$
где $\tilde{\lambda}(x) \neq 0$ – некоторая функция, $\dot{x}^i \equiv \dfrac{dx^i}{d\tau}$, а τ – параметр эволюции. Таким образом, функция $S_W(x)$ является действием как функцией координат в конформно связанном пространстве.

Из принципа самодостаточности финслеровой геометрии следует, что функция S_W не может быть произвольной, а должна удовлетворять некоторому полевому фундаментальному уравнению. Если в исходном пространстве элемент объема имел вид
$$dV = \varrho(x)\, dx^1 dx^2 ... dx^n\,, \tag{96}$$
то лагранжиан, из которого следует фундаментальное уравнение для поля S_W, имеет вид
$$\mathfrak{L} = \varrho(x)\,\kappa^n(x) \equiv \varrho(x)\,\left[\Phi_m\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial S_W}{\partial x^n}; x^1, ..., x^n\right)\right]^{\frac{n}{m}}\,, \tag{97}$$
а фундаментальное уравнение соответственно запишется следующим образом:
$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\varrho(x)\,\Phi_m^{\frac{n-m}{m}}\,\frac{\partial \Phi_m}{\partial\left(\frac{\partial S_W}{\partial x^i}\right)}\right\} = 0\,. \tag{98}$$

Если в качестве исходного финслерова пространства взять невырожденное поличисловое пространство $P_n \ni X$, то любая компонента произвольной аналитической функции $F(X)$ в нем удовлетворяет фундаментальному уравнению поля (98) для Мировой функции $S_W(x)$. Аналитические функции можно перемножать, брать их линейные комбинации, строить функцию от функции, при этом опять будут получаться аналитическая функция. Если не оговорено другое, в качестве Мировой функции в невырожденном поличисловом пространстве выступает компонента $U(x^1, ..., x^2)$ при единице

$$F(X) = U(x) \cdot 1 + V^1(x) \cdot j_1 + ... + V^{n-1}(x) \cdot j_{n-1} \tag{99}$$

в базисе $1, j_1, ..., j_{n-1}$, в котором имеет место экспоненциальное представление поличисел, то есть

$$X = |X| \exp(\alpha^1 \cdot j_1 + ... + \alpha^{n-1} \cdot j_{n-1}) \,, \tag{100}$$

тогда в этом базисе

$$\ln(X/b) = \ln(|X|/b) \cdot 1 + ... \,, \tag{101}$$

где b – действительное число, а $|X|$ – модуль поличисла [8].

Конформный потенциал, таким образом построенный с помощью аналитической функции в поличисловом невырожденном пространстве, наиболее близок к понятию комплексного потенциала в теории функций комплексной переменной, поэтому функцию $F(X)$ можно называть гиперкомплексным потенциалом.

8 Малые поля

Под *малыми полями* будем понимать поля, включение которых в метрическую функцию финслерова пространства мало меняет саму метрическую функцию и компоненты обобщенного импульса, а значит и новая индикатриса мало отличается от старой. Поясним это подробнее.

Пусть

$$L_0 = L(\xi^1, ..., \xi^n; x^1, ..., x^n; 0) \,, \qquad L = L(\xi^1, ..., \xi^n; x^1, ..., x^n; \varphi) \tag{102}$$

– метрические функции финслерова пространства с выключенным и включенным полем $\varphi(x)$. Будем говорить, что поле $\varphi(x)$ малое, если

$$|L(\xi; x; \varphi) - L(\xi; x; 0)| \ll L(\xi; x; 0) \tag{103}$$

и

$$\left| \frac{\partial L}{\partial \xi^i} - \frac{\partial L_0}{\partial \xi^i} \right| \ll \left| \frac{\partial L_0}{\partial \xi^i} \right| \,. \tag{104}$$

Уравнения поля, которые можно записать в финслеровых пространствах, исходя из *принципа самодостаточности*, обычно являются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Введение понятия малого поля позволяет получить линейные дифференциальные уравнения в качестве полевых.

9 Псевдориманово пространство с сигнатурой $(+,-,-,-)$

Рассмотрим псевдориманово пространство с сигнатурой $(+,-,-,-)$, явно выделив в метрическом тензоре $g_{ij}(x)$ этого пространства метрический тензор $\overset{o}{g}_{ij}$ пространства Минковского,

$$g_{ij}(x) = \overset{o}{g}_{ij} + h_{ij}(x) \,. \tag{105}$$

Будем предполагать, что поле $h_{ij}(x)$ малое, то есть

$$|h_{ij}(x)| \ll 1\,. \tag{106}$$

Лагранжиан псевдориманова пространства с сигнатурой $(+,-,-,-)$ равен

$$\mathcal{L} = \sqrt{-det(g_{ij})}\,. \tag{107}$$

Вычислим величину $[-det(g_{ij})]$ до членов $|h_{ij}(x)|^2$ включительно:

$$-det(g_{ij}) \simeq 1 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2\,, \tag{108}$$

где

$$\mathcal{L}_1 = \overset{o}{g}{}^{ij}\ h_{ij} \equiv h_{00} - h_{11} - h_{22} - h_{33}\,, \tag{109}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = &-h_{00}(h_{11} + h_{22} + h_{33}) + \\ &+ h_{11}h_{22} + h_{11}h_{33} + h_{22}h_{33} - h_{12}^2 - h_{13}^2 - h_{23}^2 + h_{03}^2 + h_{02}^2 + h_{01}^2\,. \end{aligned} \tag{110}$$

Тогда

$$\mathcal{L} \simeq 1 + \frac{1}{2}\,\mathcal{L}_1 + \frac{1}{2}\,\left[\mathcal{L}_2 - \frac{1}{4}\,\mathcal{L}_1^2\right]\,, \tag{111}$$

Для того, чтобы получить уравнения для малого поля в первом приближении надо использовать лагранжиан $\mathcal{L}_1$, а во втором приближении – лагранжиан $\left(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - \frac{1}{4}\,\mathcal{L}_1^2\right)$.

10 Единственное скалярное поле

Для единственного скалярного поля $\varphi(x)$ "в пространстве Минковского" наиболее простое представление тензора $h_{ij}(x)$ имеет вид

$$h_{ij}(x) \equiv h_{ij}^{(\varphi)}(x) = \pm\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\,, \tag{112}$$

поэтому

$$\mathcal{L}_\varphi = \sqrt{-det(g_{ij})} = \sqrt{1 \pm \mathcal{L}_1} \simeq 1 \pm \frac{1}{2}\,\mathcal{L}_1 - \frac{1}{8}\,\mathcal{L}_1^2\,, \tag{113}$$

где

$$\mathcal{L}_1 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\right)^2\,. \tag{114}$$

В первом приближении используя лагранжиан $\mathcal{L}_1$, получим следующее полевое уравнение:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^0\partial x^0} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\partial x^1} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^3\partial x^3} = 0\,, \tag{115}$$

которое является волновым уравнением. Стационарное поле, зависящее только от радиуса

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}\,, \tag{116}$$

будет соответственно удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = 0\,, \tag{117}$$

интегрируя которое, получим

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\,C_1\frac{1}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(r) = C_0 + C_1\,\frac{1}{r}\,. \tag{118}$$

Во втором приближении надо использовать лагранжиан $\left(\mathcal{L}_1 - \frac{1}{4}\,\mathcal{L}_1^2\right)$, при этом получаем уравнение поля во втором приближении:

$$\overset{o}{g}{}^{ij}\ \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\left(\pm 1 - \frac{1}{2}\,\mathcal{L}_1\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right] = 0\,. \tag{119}$$

Это уравнение уже является нелинейным, и закон суперпозиции для его решений не выполняется.

Точное уравнение поля

$$\overset{o}{g}{}^{ij}\ \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^j}}{\sqrt{1\pm\,\mathcal{L}_1}}\right) = 0 \tag{120}$$

также является нелинейным, и для его решений не выполняется закон суперпозиции. В этом случае стационарное поле, зависящее только от радиуса, должно соответственно удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{\dfrac{d\varphi}{dr}}{\sqrt{1\mp\left(\dfrac{d\varphi}{dr}\right)^2}}\right) = 0\,, \tag{121}$$

интегрируя которое, получим

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{C_1}{\sqrt{r^4\pm C_1^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(r) = C_0 + \int\limits_r^\infty \frac{C_1}{\sqrt{r^4\pm C_1^2}}\,dr\,. \tag{122}$$

Поле с верхним знаком и поле с нижним знаком качественно различаются: верхний знак ("$+$" в формуле (112)) дает поле конечное без особенностей во всем пространстве, нижний знак ("$-$" в формуле (112)) дает поле определенное везде, кроме сферической области

$$0 \le r \le \sqrt{|C_1|}\,, \tag{123}$$

в которой поле отсутствует, причем при

$$r > \sqrt{|C_1|}\,, \quad r \to \sqrt{|C_1|} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\varphi}{dr} \to -\,C_1\,\cdot\infty\,. \tag{124}$$

В то же время на бесконечности ($r\to\infty$) оба решения $\varphi_\pm(r)$ ведут себя одинаково как решение (118) волнового уравнения.

Зная лагранжиан, можно записать тензор энергии импульса T_j^i для полученных решений и попытаться вычислить энергию системы, деленную на скорость света:

$$P_0 = const \int^{(3)} T_0^0 dV \, . \tag{125}$$

Для полученных стационарных сферически симметричных решений имеем

$$T_0^0 = -\frac{r^2}{\sqrt{r^4 \pm C_1^2}} \, , \tag{126}$$

поэтому и для верхнего, и для нижнего знака $|P_0| \to \infty$.

Метрический тензор (105), (112) – простейший способ "включения" гравитационного поля в пространстве Минковского – исходном плоском пространстве, не содержащем полей. Аддитивно добавляя еще несколько таких слагаемых (112) в метрический тензор, мы сможем описывать все более сложные гравитационные поля с тензором $h_{ij} = h_{ij}^{(grav)}$.

11 Ковариантное векторное поле

Для того, чтобы из ковариантного поля $A_i(x)$ построить симметрический дважды ковариантный тензор $h_{ij}(x)$, не прибегая к использованию объектов связности, вспомним, что альтернированная частная производная от тензора есть тензор,

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \, , \tag{127}$$

но антисимметрический. Построим на основе тензора F_{ij} симметрический тензор. Для этого вначале запишем скаляр

$$\mathfrak{L}_A = \overset{o}{g}{}^{ij} \overset{o}{g}{}^{km} F_{ik} F_{jm} = 2 \, \overset{o}{g}{}^{ij} \overset{o}{g}{}^{km} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} \right) , \tag{128}$$

откуда следуют выражения для двух симметрических тензоров

$$h_{ij}^{(1)} = \overset{o}{g}{}^{km} \left(2 \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} - \frac{\partial A_k}{\partial x^j} \frac{\partial A_i}{\partial x^m} \right) , \tag{129}$$

$$h_{ij}^{(2)} = \overset{o}{g}{}^{km} \left(2 \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k} \frac{\partial A_m}{\partial x^i} \right) . \tag{130}$$

Заметим, что не только F_{ij} и $\mathfrak{L}_A$, но и тензоры $h_{ij}^{(1)}$, $h_{ij}^{(2)}$ являются градиентно инвариантными, то есть не изменяются при преобразовании

$$A_i \to A_i + \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \, , \tag{131}$$

где $f(x)$ – произвольная скалярная функция.

Пусть в формуле (105)

$$h_{ij} \equiv h_{ij}^{(A_k)} = \chi(x) \, h_{ij}^{(1)} + [1 - \chi(x)] \; h_{ij}^{(2)} \, , \tag{132}$$

где $\chi(x)$ – некоторая скалярная функция. Тогда в первом приближении получим

$$\mathfrak{L}_1 = 2 \, \overset{o}{g}{}^{ij} \overset{o}{g}{}^{km} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \frac{\partial A_j}{\partial x^m} \right) \equiv \mathfrak{L}_A \, , \tag{133}$$

то есть в первом приближении для поля $A_i(x)$ следует выполнение уравнений Максвелла:

$$\overset{o}{g}{}^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} A_k - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\overset{o}{g}{}^{ij} \frac{\partial A_j}{\partial x^i}\right) = 0\,. \tag{134}$$

Если принять лоренцевскую калибровку

$$\overset{o}{g}{}^{ij} \frac{\partial A_j}{\partial x^i} = 0\,, \tag{135}$$

то уравнения (134) принимают вид

$$\Box A_k = 0\,. \tag{136}$$

Замечание: вполне возможно, (132) не самая общая запись тензора h_{ij}, который в первом приближении дает уравнения поля, совпадающие с уравнениями Максвелла.

Для того, чтобы получит уравнения Максвелла не для свободного поля, а с заданными источниками $j_i(x)$, можно, например, аддитивно добавить к $h_{ij}^{(A_k)}$ (132) еще тензор

$$h_{ij}^{(j_k)} = \left(\frac{16\pi}{c}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(A_i j_j + A_j j_i\right)\,, \tag{137}$$

то есть метрический тензор (105) с тензором

$$h_{ij} = h_{ij}^{(Max)} \equiv h_{ij}^{(A_k)} + h_{ij}^{(j_k)} \tag{138}$$

описывает малое электромагнитное поле с источниками поля $j_k(x)$.

Таким образом, метрический тензор (105) с тензором

$$h_{ij} = \mu h_{ij}^{(A_k)} + \gamma h_{ij}^{(grav)}\,, \tag{139}$$

где μ, γ – фундаментальные постоянные, в рамках единой псевдоримановой геометрии описывает одновременно свободное электромагнитное и свободное гравитационное поле. Для того, чтобы такая теория включала в себя еще и источники электромагнитного поля $j_k(x)$, необходимо, чтобы метрический тензор, кроме $j_k(x)$, содержал и частные производные этого поля или чтобы поле $j_k(x)$ выражалось через другие поля, например, как показано ниже.

Если гравитационное поле "включено" простейшим образом, как это показано в предыдущем разделе, источники электромагнитного поля можно связать со скалярным полем следующим образом:

$$j_i(x) = q\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\,. \tag{140}$$

В этом случае в первом приближении в случае лоренцевской калибровки имеем

$$\Box A_k = \frac{4\pi}{c} j_k\,, \tag{141}$$

$$\Box \varphi = 0\,. \tag{142}$$

А так как плотность тока имеет вид (140), то из уравнения (142) следует уравнение непрерывности

$$\overset{o}{g}{}^{ij} \frac{\partial j_i}{\partial x^j} = 0\,. \tag{143}$$

12 Два скалярных поля

Переход от малых к более сильным полям может приводить к переходу от линейных уравнений поля для независимых полей к нелинейным уравнениям поля для взаимосвязанных взаимодействующих полей. Покажем это на примере двух скалярных полей $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, "включающих" гравитационное поле в пространстве Минковского.

Пусть

$$h_{ij} = \varepsilon_\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j} + \varepsilon_\psi \frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^j}, \tag{144}$$

где ε_φ, ε_ψ – независимые знаковые коэффициенты. Тогда точный лагранжиан может быть записан следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\varphi,\psi} = \sqrt{1 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}\,, \tag{145}$$

где

$$\mathcal{L}_1 = \overset{o}{g}{}^{ij} \left(\varepsilon_\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j} + \varepsilon_\psi \frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^j} \right), \tag{146}$$

а

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = \varepsilon_\varphi\,\varepsilon_\psi \Bigg[&-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\frac{\partial\psi}{\partial x^1} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\psi}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\frac{\partial\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x^0}\right)^2 \\ &- \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}\frac{\partial\psi}{\partial x^3} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\frac{\partial\psi}{\partial x^0}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial\psi}{\partial x^3} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial x^3} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right)^2 \Bigg]. \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

В первом приближении в качестве лагранжиана следует использовать $\mathcal{L}_1$, тогда уравнения поля суть система двух независимых волновых уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^0\partial x^0} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1\partial x^1} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^3\partial x^3} = 0\,, \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^0\partial x^0} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^1\partial x^1} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^3\partial x^3} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{148}$$

При этом поля $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ независимы и для них выполняется закон суперпозиции.

Используя точный лагранжиан для двух скалярных полей (145), получим систему двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left.\begin{aligned} \overset{o}{g}{}^{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^j}\left(1 \pm \overset{o}{g}{}^{rs}\,\dfrac{\partial\psi}{\partial x^r}\dfrac{\partial\psi}{\partial x^s}\right) \mp \dfrac{\partial\psi}{\partial x^j}\,\overset{o}{g}{}^{rs}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^r}\dfrac{\partial\psi}{\partial x^s}}{\sqrt{1+\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}}\right] = 0\,, \\ \overset{o}{g}{}^{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x^j}\left(1 + \overset{o}{g}{}^{rs}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^s}\right) - \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^j}\,\overset{o}{g}{}^{rs}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^r}\dfrac{\partial\psi}{\partial x^s}}{\sqrt{1+\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2}}\right] = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{149}$$

При этом поля $\varphi(x)$, $\psi(x)$ зависят друг от друга, и принцип суперпозиции для них не выполняется. Переход от уравнений (148) к уравнениям (149) можно рассматривать как переход от слабых полей к более сильным полям.

13 Невырожденные полочисла

Рассмотрим некоторую систему невырожденных поличисел P_n [8]. Соответствующее координатное пространство $x^1, x^2, ..., x^n$ является финслеровым метрическим плоским пространством с элементом длины вида

$$ds = \sqrt[n]{\overset{o}{g}_{i_1 i_2 ... i_n}\, dx^{i_1} dx^{i_2} ... dx^{i_n}}\,, \tag{150}$$

$\overset{o}{g}_{i_1 i_2 ... i_n}$ – метрический тензор, не зависящий от точки пространства. Такого рода финслеровы пространства встречаются в математической литературе (см., например, [9] – [12]), но то, что все невырожденные поличисловые пространства относятся именно к такому типу финслеровых пространств было установлено, начиная с работ [13], [14] и в последующих работах тех же авторов, особо следует выделить работу [8].

Компоненты обобщенного импульса в геометрии (150) вычисляются по формулам:

$$p_i = \frac{\overset{o}{g}_{i j_2 ... j_n}\, dx^{j_2} ... dx^{j_n}}{\left(\overset{o}{g}_{i_1 i_2 ... i_n}\, dx^{i_1} dx^{i_2} ... dx^{i_n}\right)^{\frac{n-1}{n}}}\,. \tag{151}$$

Тангенциальное уравнение индикатрисы в пространстве невырожденных поличисел P_n всегда можно записать [8] в виде

$$\overset{o}{g}{}^{i_1 i_2 ... i_n}\, p_{i_1} p_{i_2} ... p_{i_n} - \mu^n = 0\,, \tag{152}$$

где $\mu > 0$ – некоторая постоянная, причем всегда найдется такой специальный базис (и, вообще говоря, не один) и такое $\mu > 0$, что

$$\left(\overset{o}{g}{}^{i_1 i_2 ... i_n}\right) = \left(\overset{o}{g}{}_{i_1 i_2 ... i_n}\right)\,. \tag{153}$$

Перейдем к новой финслеровой геометрии на основе пространства невырожденных поличисел P_n, которая (новая геометрия) уже не является плоской, но отличие новой геометрии от исходной бесконечно мало, причем элемент длины в такой геометрии пусть имеет вид

$$ds = \sqrt[n]{\left[\overset{o}{g}_{i_1 i_2 ... i_n} + \varepsilon h_{i_1 i_2 ... i_n}(x)\right] dx^{i_1} dx^{i_2} ... dx^{i_n}}\,, \tag{154}$$

где ε – бесконечно малая величина. Если в исходном плоском пространстве элемент объема определялся формулой

$$dV = dx^{i_1} dx^{i_2} ... dx^{i_n}\,, \tag{155}$$

то в новом пространстве с точностью до ε в первой степени имеем

$$dV_h \simeq \left[1 + \varepsilon \cdot C_0\, \overset{o}{g}{}^{i_1 i_2 ... i_n}\, h_{i_1 i_2 ... i_n}(x)\right] dx^{i_1} dx^{i_2} ... dx^{i_n}\,, \tag{156}$$

то есть лагранжиан для малых полей в пространстве с элементом длины (154) в первом приближении по ε суть

$$\mathcal{L}_1 = \overset{o}{g}{}^{i_1 i_2 ... i_n}\, h_{i_1 i_2 ... i_n}(x)\,. \tag{157}$$

Эта формула является обобщением формулы (109).

14 Гиперкомплексное пространство $\mathbf{H_4}$

Пространство H_4 является финслеровым пространством с метрической функцией Бервальда-Моора. В физическом ("ортонормированном" [8]) базисе, в котором каждая точка этого пространства характеризуется четырьмя действительными координатами x^0, x^1, x^2, x^3, четвертая степень элемента длины ds_{H_4} определяется формулой

$$
\begin{aligned}
(ds_{H_4})^4 \equiv \overset{o}{g}_{ijkl}\, dx^0dx^1dx^2dx^3 = \\
= (dx^0+dx^1+dx^2+dx^3)(dx^0+dx^1-dx^2-dx^3)\times \\
\times(dx^0-dx^1+dx^2-dx^3)(dx^0-dx^1-dx^2+dx^3) = \\
= (dx^0)^4+(dx^1)^4+(dx^2)^4+(dx^3)^4+8dx^0dx^1dx^2dx^3- \\
-2(dx^0)^2(dx^1)^2-2(dx^0)^2(dx^2)^2-2(dx^0)^2(dx^3)^2- \\
-2(dx^1)^2(dx^2)^2-2(dx^1)^2(dx^3)^2-2(dx^2)^2(dx^3)^2\,.
\end{aligned}
\tag{158}
$$

Сравним четвертую степень элемента длины ds_{H_4} в пространстве поличисел H_4 с четвертой степенью элемента длины ds_{Min} в пространстве Минковского:

$$
\begin{aligned}
(ds_{Min})^4 = (dx^0)^4+(dx^1)^4+(dx^2)^4+(dx^3)^4- \\
-2(dx^0)^2(dx^1)^2-2(dx^0)^2(dx^2)^2-2(dx^0)^2(dx^3)^2- \\
+2(dx^1)^2(dx^2)^2+2(dx^1)^2(dx^3)^2+2(dx^2)^2(dx^3)^2\,.
\end{aligned}
\tag{159}
$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
(ds_{H_4})^4 = (ds_{Min})^4+8dx^0dx^1dx^2dx^3- \\
-4(dx^1)^2(dx^2)^2-4(dx^1)^2(dx^3)^2-4(dx^2)^2(dx^3)^2\,,
\end{aligned}
\tag{160}
$$

а в ковариантной записи имеем

$$
(ds_{H_4})^4 = \left(\overset{o}{g}_{ij}\overset{o}{g}_{kl} + \frac{1}{3}\,\overset{o}{g'}_{ijkl} - \overset{o}{G}_{ijkl}\right) dx^idx^jdx^kdx^l\,, \tag{161}
$$

где

$$
\overset{o}{g'}_{ijkl} = \begin{cases} 1\,, & \text{если индексы } i,j,k,l \text{ все разные,} \\ 0\,, & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases} \tag{162}
$$

$$
\overset{o}{G}_{ijkl} = \begin{cases} 1\,, & \text{если } \ i,j,k,l \neq 0 \text{ и } i=j\neq k=l, \\ & \text{или } i=k\neq j=l, \\ & \text{или } i=l\neq j=k; \\ 0\,, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{163}
$$

Тангенциальное уравнение индикатрисы в пространстве H_4 в физическом базисе можно записать следующим образом [8]:

$$
(p_0+p_1+p_2+p_3)(p_0+p_1-p_2-p_3)(p_0-p_1+p_2-p_3)(p_0-p_1-p_2+p_3)-1=0\,, \tag{164}
$$

где p_i – компоненты обобщенного импульса,

$$p_i = \frac{\partial\, ds_{H_4}}{\partial(dx^i)}\,. \tag{165}$$

Сравнивая формулу (164) с формулой (158), имеем

$$\overset{o}{g}{}^{ijkl}\; p_i p_j p_k p_l - 1 = 0\,. \tag{166}$$

Здесь

$$\overset{o}{g}{}^{ijkl} = \overset{o}{g}{}^{ij}\,\overset{o}{g}{}^{kl} + \frac{1}{3}\,\overset{o}{g}{}'^{\,ijkl} - \overset{o}{G}{}^{ijkl}\,, \tag{167}$$

причем

$$\left(\overset{o}{g}{}^{ijkl}\right) = \left(\overset{o}{g}_{ijkl}\right)\,, \quad \left(\overset{o}{g}{}'^{\,ijkl}\right) = \left(\overset{o}{g}{}'_{\,ijkl}\right)\,, \quad \left(\overset{o}{G}{}^{ijkl}\right) = \left(\overset{o}{G}_{ijkl}\right)\,. \tag{168}$$

Для того, чтобы задать лагранжиан для малых полей в первом приближении (157), надо задать тензор h_{ijkl} в формуле (154). В упрощенном варианте его можно разделить на две аддитивные составляющие: гравитационную часть и электромагнитную часть. Гравитационная часть может быть построена аналогично тому, как это делалось в разделах 10 и 11, а вот на том как построить электромагнитную часть следует остановиться подробнее.

Так как хотелось бы, сохранив градиентную инвариантность лагранжиана, получить и в пространстве H_4 для свободного малого поля уравнения Максвелла, запишем электромагнитную часть тензора h_{ijkl} для свободного поля следующим образом:

$$h^{A_k}_{ijkl} = \chi(x)\, h^{(1)}_{ijkl} + [1-\chi(x)]\; h^{(2)}_{ijkl}\,, \tag{169}$$

где тензоры $h^{(1)}_{ijkl}, h^{(2)}_{ijkl}$ – это тензоры, стоящие в круглых скобках в правых частях формул (129), (130). Тогда

$$\mathfrak{L}_A = \;\overset{o}{g}{}^{ijkl}\; h^{A_k}_{ijkl} \equiv 2\,\overset{o}{g}{}^{ij}\,\overset{o}{g}{}^{km}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_m}{\partial x^j} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}\frac{\partial A_j}{\partial x^m}\right)\,. \tag{170}$$

Для того, чтобы получит уравнения Максвелла не для свободного поля, а с заданными источниками $j_i(x)$, надо аддитивно добавить к $h^{(A_k)}_{ijkl}$ (169) еще тензор

$$h^{(j_k)}_{ijkl} = \left(\frac{16\pi}{c}\right)\cdot\frac{1}{6}\left(2A_i j_j\;\overset{o}{g}_{kl} - A_i\;\overset{o}{g}_{jk}\; j_l - j_i\;\overset{o}{g}_{jk}\; A_l\,,\right)\,, \tag{171}$$

симметризованный по всем индексам, то есть тензор

$$h_{ijkl} = h^{Max}_{ijkl} \equiv h^{(A_k)}_{ijkl} + h^{(j_k)}_{(ijkl)} \tag{172}$$

описывает малое электромагнитное поле с источниками $j_i(x)$, где, например,

$$j_i = \sum_b q_{(a)}\frac{\partial\psi_{(b)}}{\partial x^i}\,, \tag{173}$$

а $\psi_{(b)}$ – скалярные составляющие гравитационного поля.

Для того, чтобы получить единую теорию электромагнитного и гравитационного полей следует взять линейную комбинацию тензора $h_{ijkl}^{(Max)}$, отвечающего в первом приближении за электромагнитное поле, и тензора $h_{ijkl}^{(grav)}$, отвечающего в первом приближении за гравитационное поле:

$$h_{ijkl} = \mu h_{ijkl}^{(Max)} + \gamma h_{ijkl}^{(grav)}\,, \tag{174}$$

где μ, γ – постоянные. Тензор $h_{ijkl}^{(grav)}$ можно построить, например, так

$$h_{ijkl}^{grav} = \sum_{a=1}^{N} \varepsilon_{(a)} \frac{\partial \varphi_{(a)}}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi_{(a)}}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi_{(a)}}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi_{(a)}}{\partial x^l} + \sum_{b=1}^{M} \epsilon_{(b)} \frac{\partial \psi_{(b)}}{\partial x^{(i}} \frac{\partial \psi_{(b)}}{\partial x^j} \overset{o}{g}_{kl)}, \tag{175}$$

где $\varepsilon_{(a)}$, $\epsilon_{(b)}$ – знаковые множители, а $\varphi_{(a)}$, $\psi_{(b)}$ – скалярные поля. Общее количество скалярных полей равно $(N + M)$.

15 Заключение

Принцип самодостаточности финслеровой геометрии позволяет построить ТО, исходя из любого плоского финслерова пространства, которое в нерелятивистском приближении, то есть с точностью до $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ включительно, переходит в пространство Галилея с метрической функцией

$$L(dx; x) = dx^0 - \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{2\,dx^0}\,. \tag{176}$$

Теория относительности финслеровых пространств не противоречит ОТО А. Эйнштейна [15], а дополняет и развивает ее, снимая некоторые трудности. Геометрический подход [6] в теории поля, который обычно дает нелинейные не разделяющиеся уравнения поля, для малых полей в первом приближении может дать систему независимых линейных уравнений. При усилении полей принцип суперпозиции полей нарушается, уравнения поля становятся нелинейными и поля начинают взаимодействовать между собой. Можно считать, что эти изменения уравнений поля при переходе от слабых к более сильным полям происходят за счет двух механизмов: во-первых, качественное изменение уравнений поля для свободных полей в первом приближении; во-вторых, появление дополнительных источников поля.

В рамках геометрического подхода в теории поля происходит естественное объединение электромагнитного и гравитационного полей как в четырехмерном псевдоримановом пространстве с метрическим тензором $g_{ij}(x)$, так и в четырехмерном кривом пространстве Бервальда-Моора с метрическим тензором $g_{ijkl}(x)$. Это говорит о том, что эти качественно различные пространства во многом схожи.

Литература

[1] П. К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частными производными, М. - Л.: ОГИЗ, 1947.

[2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., "Наука", 1967.

[3] Н. Н Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, М., "Наука", 1973.

[4] Г. И. Гарасько, О Мировой функции и связи между геометриями. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (5)**, Т. 3 (2006), стр. 3–18.

[5] Г. И. Гарасько, Д. Г. Павлов, Конструирование псевдоримановой геометрии на основе геометрии Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (5)**, Т. 3 (2006), стр. 19–27.

[6] Г. И. Гарасько. Теория поля и финслеровы пространства, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2 (6)**, Т. 3 (2006), стр. 6–20.
[7] Г. И. Гарасько. Слабые поля, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2 (8)**, Т. 4 (2007), стр. 3–12.
[8] Д. Г. Павлов, Г. И. Гарасько: Геометрия невырожденных поличисел. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (7)**, Т. 4 (2007).
[9] M. Matsumoto, S. Numata: On Finsler spaces with 1-form metric. Tensor, N.S., Vol. 32 (1978), 161.
[10] M. Matsumoto, S. Numata: On Finsler spaces with 1-form metric II. Berwald-Moor's metric., Tensor, N.S., Vol. 32 (1978), 275.
[11] M. Matsumoto, S. Numata: On Finsler spaces with a cubic metric, Tensor, N.S., Vol. 33 (1979), 153.
[12] H. Shimada: On Finsler spaces with the metric L of m-th root metric, Tensor, N.S., Vol. 33 (1979), 365–372.
[13] Д. Г. Павлов: Обобщенные аксиомы скалярного произведения, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)** (2004), 5–19.
[14] Г. И. Гарасько: Обобщенно-аналитические функции поличисловой переменной, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (1)** (2004), 75–88.
[15] А. Эйнштейн: Сущность теории относительности. М., "ИЛ", 1955.

A self-sufficiency principle in Finsler geometry

G. I. Garas'ko

Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia
Electrotechnical Institute of Russia, Moscow, Russia
gri9z@mail.ru

By using the self-suuficiency principle of Finsler geometry, one can derive the field equations, where the gravitational field and electromagnetic field naturally join together as in the pseudo-Riemannian 4D space as well as in the curvilinear Berwald-Moor 4D space; there always exists an energy-momentum tensor related to conservation laws.

It has been shown that, in the approximation of small fields, the new geometric approach in the field theory following from the self-sufficiency principle of the Finsler geometry can result in linear field equations valid for several independent fields. When the strength of the fields increases, which means the use of the second approximation, the field equations become generally nonlinear and the fields loose independence that leads to the violation of the superposition principle for each separate field, and results in the interaction among different fields.

Key words: Finsler geometry, Berwald-Moor space, field theory.