МОДЕЛЬ ФИЗИЧЕСКОГО ПОЛЯ В СОБСТВЕННОМ ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ГЕОМЕТРИИ СОБЫТИЙ БЕРВАЛЬДА-МООРА

Р. Г. Зарипов

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань, Россия
zaripov@mail.knc.ru

Построена модель физического векторного поля с плотностями скалярного и векторного источников в собственном трехмерном пространстве для геометрии событий Бервальда-Моора. Получены релятивистские уравнения третьего порядка для векторного поля и четвертого порядка для потенциалов.

1 Введение

В настоящее время релятивистская теория на основе финслерова полностью анизотропного пространства-времени является предметом интенсивных исследований, обусловленных возможностью практических приложений. Метрическая функция глобального четырехмерного пространства-времени Бервальда-Моора в скалярно-векторной форме запишется так

$$F = s_{12} = \left\{ \prod_{m}^{4} \left[c\,(t_2 - t_1) + \boldsymbol{\varepsilon}^m\,(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \right] \right\}^{1/4} = \left[c^4 T_{12}^4\,(t_2 - t_1, \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) - \rho^4\,(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \right]^{1/4}\,, \tag{1.1}$$

где введены интервалы физического времени и расстояния в собственном трехмерном пространстве [1]

$$\begin{gathered} T_{12}\,(t_2 - t_1, \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) = \left[(t_2 - t_1)^4 - 2(t_2 - t_1)^2\,(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)^2 \big/ c^2 + \right. \\ \left. +4\,(t_2 - t_1)\,((\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)\,\{(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)\,(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)\})\,/\,3c^3 \right]^{1/4}, \\ \rho\,(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \rho\,(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) = \left[\{(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)\,(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)\}^2 - ((\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)\,(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1))^2 \right]^{1/4}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Интервал физического времени нелинейно зависит от разности координат и координат событий. Собственное трехмерное пространство с расстоянием в виде полунормы определяется как множество одновременных событий по физическому времени при сигнальном методе синхронизации разноместных часов [1]. В метрической функции (1.1) имеют место известные значения компонентов векторов $\boldsymbol{\varepsilon}^1 = (1,\,1,\,1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^2 = (-1,\,1,-1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^3 = (1,\,-1,\,-1)$, $\boldsymbol{\varepsilon}^4 = (-1,-1,\,1)$ выделенных направлений в трехмерном пространстве, которые удовлетворяют равенствам [2]

$$\begin{gathered} \sum_{m}^{4} \varepsilon_\alpha^m = 0, \qquad \tfrac{1}{4} \sum_{m}^{4} \varepsilon_\alpha^m \varepsilon_\beta^m = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \tfrac{1}{4} \sum_{m}^{4} \varepsilon_\alpha^m \varepsilon_\beta^m \varepsilon_\gamma^m = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}, \\ 1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m)^2 = 4, \qquad 1 + (\boldsymbol{\varepsilon}^m \boldsymbol{\varepsilon}^r) = 0 \qquad (m \neq r)\,. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера и $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ есть трехмерный абсолютно симметричный символ со свойством $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 1$ при $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, а остальные значения являются нулевыми, m – номер вектора и α с β имеют значения 1, 2, 3. При $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}^r c\,(t_2 - t_1)$ с учетом (1.3) получим равные величины $\rho^4\left[\boldsymbol{\varepsilon}^r c\,(t_2 - t_1)\right] = c^4 T^4 \left[t_2 - t_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}^r c\,(t_2 - t_1)\right] = 3c^4\,(t_2 - t_1)^4$

и, соответственно $F = 0$ для всех выделенных направлений. Компоненты указанных векторов являются элементами нормализованной матрицы Адамара порядка четыре с элементами равными числам ± 1

$$\boldsymbol{H}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_2 & \boldsymbol{H}_2 \\ \boldsymbol{H}_2 & -\boldsymbol{H}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_1 & \boldsymbol{H}_1 \\ \boldsymbol{H}_1 & -\boldsymbol{H}_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_1 = 1, \quad \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^T = 4\boldsymbol{I}, \tag{1.4}$$

посредством которой метрическая функция (1.1) для локального пространства-времени принимает следующий вид

$$\begin{gathered} F = ds = \left[c^4dt^4 + dx^4 + dy^4 + dz^4 - \right. \\ \left. -2\left(c^2dt^2dx^2 + c^2dt^2dy^2 + c^2dt^2dz^2 + dx^2dy^2 + dy^2dz^2 + dz^2dx^2\right) + 8cdtdxdydz\right]^{1/4} = \\ = \left[(cdt + dx + dy + dz)(cdt - dx + dy - dz)(cdt + dx - dy - dz)(cdt - dx - dy + dz)\right]^{1/4} = \\ = \left(\varepsilon_{1234} H_i^1 H_j^2 H_k^3 H_l^4 dx^i dx^j dx^k dx^l\right)^{1/4} = \left(\tfrac{1}{4!}\varepsilon_{abcd} H_i^a H_j^b H_k^c H_l^d dx^i dx^j dx^k dx^l\right)^{1/4}, \end{gathered} \tag{1.5}$$

где символ ε_{abcd} есть абсолютно симметричный символ со свойством $\varepsilon_{abcd} = 1$ если $a \neq b \neq c \neq d$, остальные значения нулевые, $dx^i = (cdt, d\boldsymbol{x})$, H_i^a есть матрица Адамара со свойством $H_i^a H_a^j = 4\delta_i^j$ и четырехмерным символом Кронекера δ_i^j, $\boldsymbol{I}$ – единичная четырехмерная матрица. Учет гравитации приводит к функциям $H_k^a = H_k^a\left(x^i\right)$ с непрерывными частными производными, а ds интерпретируется как полунорма вектора dx^i.

В продолжение работы [3], в которой приводятся релятивистские уравнения, здесь ставится цель кратко изложить нахождение уравнений некоторого физического векторного поля в собственном трехмерном пространстве при наличии скалярного и векторного источников.

2 Дифференциальные гиперкомплексные операторы

Воспользуемся элементами векторной алгебры в собственном трехмерном пространстве [2] и скалярно-векторной формой для композиции квадрачисел

$$(a_0, \boldsymbol{a}) \circ (b_0, \boldsymbol{b}) = \left(a_0 b_0 + (\boldsymbol{ab}), b_0\boldsymbol{a} + a_0\boldsymbol{b} + \{\boldsymbol{ab}\}\right) \tag{2.1}$$

с известным равенством композиции четырех квадрачисел скалярной величине

$$(a_0, \boldsymbol{a}) \circ (a_0, \boldsymbol{a}_1) \circ (a_0, \boldsymbol{a}_2) \circ (a_0, \boldsymbol{a}_3) = a_0^4 - 2a_0^2\boldsymbol{a}^2 + 4a_0\left(\boldsymbol{a}\{\boldsymbol{aa}\}\right)/3 + (\boldsymbol{aa})(\boldsymbol{aa}) - \left(\{\boldsymbol{aa}\}\{\boldsymbol{aa}\}\right), \tag{2.2}$$

которая при $a_0 = c\left(t_2 - t_1\right)$ и $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$ равняется метрической функции (1.1) в степени четыре. Здесь $(\boldsymbol{ab})$ есть скалярное произведение, $(\boldsymbol{aa}) = |\boldsymbol{a}|^2$ с модулем вектора $|\boldsymbol{a}|$, а для нового векторного произведения $\{\boldsymbol{ab}\}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma$ имеем следующие соотношения из [3] и некоторые дополнительные равенства

$$\begin{gathered} \{\boldsymbol{ab}\} = \{\boldsymbol{ba}\}, \qquad \{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})\} = \{\boldsymbol{ab}\} + \{\boldsymbol{ac}\}, \\ (\{\boldsymbol{ab}\}\boldsymbol{c}) = (\{\boldsymbol{ac}\}\boldsymbol{b}) = (\{\boldsymbol{ba}\}\boldsymbol{c}) = (\{\boldsymbol{bc}\}\boldsymbol{a}) = (\{\boldsymbol{ca}\}\boldsymbol{b}) = (\{\boldsymbol{cb}\}\boldsymbol{a}), \\ \{\boldsymbol{a}\{\boldsymbol{bc}\}\} - \{\{\boldsymbol{ab}\}\boldsymbol{c}\} = (\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc}), \\ \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 + (\{\boldsymbol{aa}\}\{\boldsymbol{bb}\}) = (\boldsymbol{ab})^2 + \{\boldsymbol{ab}\}^2, \\ \{\boldsymbol{ab}\}_\alpha = a_\beta b_\gamma + a_\gamma b_\beta, \qquad \{\{\boldsymbol{aa}\}\boldsymbol{b}\}_\alpha = 2a_\alpha\left(a_\beta b_\beta + a_\gamma b_\gamma\right), \end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
(\{\boldsymbol{aa}\}\,\boldsymbol{b}) = 2\,(a_\alpha a_\beta b_\gamma + a_\beta a_\gamma b_\alpha + a_\gamma a_\alpha b_\beta)\,,\\
\{\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{ab}\}\}_\alpha = a_\alpha\,(a_\beta b_\beta + a_\gamma b_\gamma) + b_\alpha\left(a_\beta^2 + a_\gamma^2\right),\\
\{\boldsymbol{aa}\}_\alpha = 2a_\beta a_\gamma, \quad \{\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{aa}\}\}_\alpha = 2a_\alpha\left(a_\beta^2 + a_\gamma^2\right), \quad (\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{aa}\}) = 6a_\alpha a_\beta a_\gamma, \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma)\,,\\
\{\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{aa}\}\}\} = (\boldsymbol{aa})\,\{\boldsymbol{aa}\} + \tfrac{1}{3}\,(\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{aa}\})\,\boldsymbol{a},\\
(\{\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{aa}\}\}\,\boldsymbol{b}) = (\{\boldsymbol{aa}\}\,\{\boldsymbol{ab}\})\,,\\
(\{\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{aa}\}\}\}\,\boldsymbol{b}) = (\{\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{aa}\}\}\,\{\boldsymbol{ab}\}) = (\boldsymbol{aa})\,(\{\boldsymbol{aa}\}\,\boldsymbol{b}) + \tfrac{1}{3}\,(\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{aa}\})\,(\boldsymbol{ab})\,.
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

В композиции четырех квадрачисел (2.2) приводятся векторы

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= (a_1, a_2, a_3)\,,\\
\boldsymbol{a}_1 &= (-a_1, a_2, -a_3)\,,\\
\boldsymbol{a}_2 &= (a_1, -a_2, -a_3)\,,\\
\boldsymbol{a}_3 &= (-a_1, -a_2, a_3)\,,
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

удовлетворяющие четырем векторным уравнениям [1]

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = 0,\\
\{\boldsymbol{aa}_1\} + \{\boldsymbol{aa}_2\} + \{\boldsymbol{aa}_3\} + \{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\} + \{\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3\} + \{\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_1\} = 0,\\
(\boldsymbol{aa}_1)\,\boldsymbol{a}_3 + \{\{\boldsymbol{aa}_1\}\,\boldsymbol{a}_3\} + (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2)\,\boldsymbol{a}_3 + \{\{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\}\,\boldsymbol{a}_3\} +\\
+ (\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{a}_3 + \{\{\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}\}\,\boldsymbol{a}_3\} + (\boldsymbol{aa}_1)\,\boldsymbol{a}_2 + \{\{\boldsymbol{aa}_1\}\,\boldsymbol{a}_2\} = 0,\\
\{\{\{\boldsymbol{aa}_1\}\,\boldsymbol{a}_2\}\,\boldsymbol{a}_3\} + (\boldsymbol{aa}_1)\,\{\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3\} + (\{\boldsymbol{aa}_1\}\,\boldsymbol{a}_2)\,\boldsymbol{a}_3 = 0.
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

Квадрачисло $(a_0, \boldsymbol{a})$ есть исходное число, а остальные $(a_0, \boldsymbol{a}_1)$, $(a_0, \boldsymbol{a}_2)$, $(a_0, \boldsymbol{a}_3)$ являются частично сопряженные к нему. Сопряженное число к исходному имеет значение [2]

$$
\begin{gathered}
(\bar{a}_0, \bar{\boldsymbol{a}}) = (a_0, \boldsymbol{a}_1) \circ (a_0, \boldsymbol{a}_2) \circ (a_0, \boldsymbol{a}_3) =\\
= \left(a_0\,(a_0^2 - \boldsymbol{a}^2) + \tfrac{1}{3}\,(\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{aa}\})\,, -(a_0^2 - \boldsymbol{a}^2)\,\boldsymbol{a} + a_0\,\{\boldsymbol{aa}\} - \{\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{aa}\}\}\right).
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

Не останавливаясь на всех свойствах векторной алгебры, отметим, что при $a_0 = 0$ из (2.6) вытекают сопряженный, обратный векторы и расстояние между одновременными событиями на концах вектора в собственном трехмерном пространстве [1]

$$
\begin{gathered}
\bar{\boldsymbol{a}} = -\{\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{aa}\}\} + \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{aa})\,,\\
\boldsymbol{a}^{-1} = -\frac{\bar{\boldsymbol{a}}}{[\rho\,(\boldsymbol{a})]^4} = \frac{\{\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{aa}\}\} - \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{aa})}{\{\boldsymbol{aa}\}\,\{\boldsymbol{aa}\} - (\boldsymbol{aa})\,(\boldsymbol{aa})},\\
\rho\,(\boldsymbol{a}) = [-(\boldsymbol{a}\bar{\boldsymbol{a}})]^{1/4} = [(\{\boldsymbol{aa}\}\,\{\boldsymbol{aa}\}) - (\boldsymbol{aa})\,(\boldsymbol{aa})]^{1/4}\,.
\end{gathered}
\tag{2.7}
$$

Композиция (2.6) с числом $(b_0, \boldsymbol{b})$ запишется так

$$
\begin{gathered}
(\bar{a}_0, \bar{\boldsymbol{a}}) \circ (b_0, \boldsymbol{b}) = \big(a_0\,(a_0^2 - \boldsymbol{a}^2)\,b_0 + \tfrac{1}{3}\,(\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{aa}\})\,b_0 - (a_0^2 - \boldsymbol{a}^2)\,(\boldsymbol{ab}) + a_0\,(\{\boldsymbol{aa}\}\,\boldsymbol{b}) -\\
- (\{\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{aa}\}\}\,\boldsymbol{b})\,, -(a_0^2 - \boldsymbol{a}^2)\,\boldsymbol{a}b_0 + a_0\,\{\boldsymbol{aa}\}\,b_0 - \{\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{aa}\}\}\,b_0 + a_0\,(a_0^2 - \boldsymbol{a}^2)\,\boldsymbol{b} +\\
+ \tfrac{1}{3}\,(\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{aa}\})\,\boldsymbol{b} - (a_0^2 - \boldsymbol{a}^2)\,\{\boldsymbol{ab}\} + a_0\,\{\{\boldsymbol{aa}\}\,\boldsymbol{b}\} - \{\{\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{aa}\}\}\,\boldsymbol{b}\}\big)\,.
\end{gathered}
\tag{2.8}
$$

При $b_0 = 0$ из (2.8) вытекает следующая композиция

$$
\begin{gathered}
(\bar{a}_0, \bar{\boldsymbol{a}}) \circ (0, \boldsymbol{b}) = (-(a_0^2 - \boldsymbol{a}^2)\,(\boldsymbol{ab}) + a_0\,(\{\boldsymbol{aa}\}\,\boldsymbol{b}) - (\{\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{aa}\}\}\,\boldsymbol{b})\,, a_0\,(a_0^2 - \boldsymbol{a}^2)\,\boldsymbol{b} +\\
+ \tfrac{1}{3}\,(\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{aa}\})\,\boldsymbol{b} - (a_0^2 - \boldsymbol{a}^2)\,\{\boldsymbol{ab}\} + a_0\,\{\{\boldsymbol{aa}\}\,\boldsymbol{b}\} - \{\{\boldsymbol{a}\,\{\boldsymbol{aa}\}\}\,\boldsymbol{b}\})\,.
\end{gathered}
\tag{2.9}
$$

Далее перейдем к операциям векторного анализа и введем следующие дифференциальные гиперкомплексные операторы

$$\begin{array}{ll}\left(\frac{\partial}{c\partial t},\boldsymbol{\nabla}\right), & \boldsymbol{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right),\\ \left(\frac{\partial}{c\partial t},\boldsymbol{\nabla}_1\right), & \boldsymbol{\nabla}_1=\left(-\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ -\frac{\partial}{\partial z}\right),\\ \left(\frac{\partial}{c\partial t},\boldsymbol{\nabla}_2\right), & \boldsymbol{\nabla}_2=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ -\frac{\partial}{\partial y},\ -\frac{\partial}{\partial z}\right),\\ \left(\frac{\partial}{c\partial t},\boldsymbol{\nabla}_3\right), & \boldsymbol{\nabla}_3=\left(-\frac{\partial}{\partial x},\ -\frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right),\end{array} \tag{2.10}$$

где первый есть исходный, а остальные три являются частично сопряженные к нему. При этом первый гиперкомплексный оператор в (2.10) вытекает при замене $(a_0,\boldsymbol{a})\to\left(\frac{\partial}{c\partial t},\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$, а остальные при замене остальных векторов. Согласно (2.2) композиция дифференциальных гиперкомплексных операторов из (2.10) дает скалярный дифференциальный оператор четвертого порядка с одним операторным вектором $\boldsymbol{\nabla}$ [3]

$$\begin{gathered}\square_4=\left(\frac{\partial}{c\partial t},\boldsymbol{\nabla}\right)\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\boldsymbol{\nabla}_1\right)\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\boldsymbol{\nabla}_2\right)\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\boldsymbol{\nabla}_3\right)=\\ =\frac{\partial^4}{c^4\partial t^4}-2\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\Delta+\frac{4}{3}\frac{\partial}{c\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla}\left\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\right\}\right)+\Delta\Delta-\left(\left\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\right\}\left\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\right\}\right)=\\ =\frac{\partial^4}{c^4\partial t^4}+\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}+\frac{\partial^4}{\partial z^4}-2\left(\frac{\partial^4}{c^2\partial t^2\partial x^2}+\frac{\partial^4}{c^2\partial t^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{c^2\partial t^2\partial z^2}+\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\right.\\ \left.+\frac{\partial^4}{\partial y^2\partial z^2}+\frac{\partial^4}{\partial z^2\partial x^2}\right)+8\frac{\partial^4}{c\partial t\partial x\partial y\partial z}=\prod_m^4\left[\frac{\partial}{c\partial t}+\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m\boldsymbol{\nabla}\right)\right],\end{gathered} \tag{2.11}$$

где $\Delta=(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla})$ есть оператор Лапласа. При выводе (2.11) используются соотношения для операторных векторов

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\nabla}+\boldsymbol{\nabla}_1+\boldsymbol{\nabla}_2+\boldsymbol{\nabla}_3=0,\\ \{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}_1\}+\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}_2\}+\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}_3\}+\{\boldsymbol{\nabla}_1\boldsymbol{\nabla}_2\}+\{\boldsymbol{\nabla}_2\boldsymbol{\nabla}_3\}+\{\boldsymbol{\nabla}_3\boldsymbol{\nabla}_1\}=0,\\ (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}_1)\,\boldsymbol{\nabla}_3+\{\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}_1\}\,\boldsymbol{\nabla}_3\}+(\boldsymbol{\nabla}_1\boldsymbol{\nabla}_2)\,\boldsymbol{\nabla}_3+\{\{\boldsymbol{\nabla}_1\boldsymbol{\nabla}_2\}\,\boldsymbol{\nabla}_3\}+\\ +(\boldsymbol{\nabla}_2\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{\nabla}_3+\{\{\boldsymbol{\nabla}_2\boldsymbol{\nabla}\}\,\boldsymbol{\nabla}_3\}+(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}_1)\,\boldsymbol{\nabla}_2+\{\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}_1\}\,\boldsymbol{\nabla}_2\}=0,\\ \{\{\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}_1\}\,\boldsymbol{\nabla}_2\}\,\boldsymbol{\nabla}_3\}+(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}_1)\,\{\boldsymbol{\nabla}_2\boldsymbol{\nabla}_3\}+(\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}_1\}\,\boldsymbol{\nabla}_2)\,\boldsymbol{\nabla}_3=0.\end{gathered}\quad. \tag{2.12}$$

которые вытекают из равенств (2.5).

Согласно (2.6) и (2.10), сопряженный дифференциальный гиперкомплексный оператор имеет следующий вид

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{c\partial t},\boldsymbol{\nabla}_1\right)\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\boldsymbol{\nabla}_2\right)\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t},\boldsymbol{\nabla}_3\right)=\\ =\left(\frac{\partial}{c\partial t}\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\Delta\right)+\frac{1}{3}\left(\boldsymbol{\nabla}\left\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\right\}\right),-\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\Delta\right)\boldsymbol{\nabla}+\frac{\partial}{c\partial t}\left\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\right\}-\left\{\boldsymbol{\nabla}\left\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\right\}\right\}\right).\end{gathered} \tag{2.13}$$

Тогда скалярный дифференциальный оператор (2.11) запишется как следующая композиция

$$\square_4=\left(\frac{\partial}{c\partial t},\boldsymbol{\nabla}\right)\circ\left(\frac{\partial}{c\partial t}\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\Delta\right)+\frac{1}{3}\left(\boldsymbol{\nabla}\left\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\right\}\right),-\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\Delta\right)\boldsymbol{\nabla}+\frac{\partial}{c\partial t}\left\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\right\}-\left\{\boldsymbol{\nabla}\left\{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\right\}\right\}\right). \tag{2.14}$$

Новое векторное произведение представляется через производные в компонентах

$$\{\boldsymbol{\nabla a}\} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial z},\ \frac{\partial a_x}{\partial z} + \frac{\partial a_z}{\partial x},\ \frac{\partial a_y}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial y}\right),$$
$$\{\boldsymbol{\nabla a}\}_\alpha = 2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} e_{\beta\gamma}, \quad e_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_\beta}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta}\right). \tag{2.15}$$

с тензором "деформации" $e_{\beta\gamma}$ для векторного поля $\boldsymbol{a}$. Наряду с (2.15) легко находится из $\{\boldsymbol{\nabla}_1\boldsymbol{a}\}$, $\{\boldsymbol{\nabla}_2\boldsymbol{a}\}$ и $\{\boldsymbol{\nabla}_3\boldsymbol{a}\}$ компоненты еще трех тензоров "деформации" векторного поля $\boldsymbol{a}$. Можно говорить о четырех тензорах "деформаций", которые соответствуют четырем выделенным направлениям в собственном трехмерном пространстве. Сумма этих четырех тензоров "деформации" с учетом первого равенства в (2.12) равняется нулю.

Используя формулы (2.3), выпишем некоторые дифференциальные операции различных порядков для скалярного и векторных полей в операторной форме

$$\begin{gathered}
(\{\boldsymbol{\nabla}\{\boldsymbol{\nabla\nabla}\}\}\boldsymbol{\nabla}\varphi) = (\{\boldsymbol{\nabla\nabla}\}\{\boldsymbol{\nabla\nabla}\})\varphi,\\
\{\{\boldsymbol{\nabla}\{\boldsymbol{\nabla\nabla}\}\}\boldsymbol{\nabla}\varphi\} = \Delta\{\boldsymbol{\nabla\nabla}\varphi\} + \tfrac{1}{3}(\boldsymbol{\nabla}\{\boldsymbol{\nabla\nabla}\})\boldsymbol{\nabla}\varphi,\\
(\{\boldsymbol{\nabla}\{\boldsymbol{\nabla}\{\boldsymbol{\nabla\nabla}\}\}\}\boldsymbol{A}) = (\{\boldsymbol{\nabla}\{\boldsymbol{\nabla\nabla}\}\}\{\boldsymbol{\nabla A}\}) = \Delta(\boldsymbol{\nabla}\{\boldsymbol{\nabla A}\}) + \tfrac{1}{3}(\boldsymbol{\nabla}\{\boldsymbol{\nabla\nabla}\})(\boldsymbol{\nabla A}),\\
\{\boldsymbol{\nabla}\{\boldsymbol{\nabla A}\}\} - \{\{\boldsymbol{\nabla\nabla}\}\boldsymbol{A}\} = \Delta\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla A}).
\end{gathered} \tag{2.16}$$

3 Уравнения физического поля

Рассмотрим квадрачисло потенциалов

$$(\varphi, \boldsymbol{A}), \qquad \boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z) \tag{3.1}$$

и композицию с исходным гиперкомплексным оператором

$$\left(\frac{\partial}{c\partial t}, \boldsymbol{\nabla}\right) \circ (\varphi, \boldsymbol{A}) = (0, \boldsymbol{R}), \tag{3.2}$$

где вектор $\boldsymbol{R}$ есть сумма векторов напряженности двух полей

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{Q}, \quad \boldsymbol{G} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{c\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\varphi, \quad \boldsymbol{Q} = \{\boldsymbol{\nabla A}\} \tag{3.3}$$

В (3.2) скалярная часть приравнивается нулю, что дает калибровку для потенциалов

$$\frac{\partial\varphi}{c\partial t} + (\boldsymbol{\nabla A}) = 0 \tag{3.4}$$

с $(\boldsymbol{\nabla A}) = div\,\boldsymbol{A}$, а компоненты $\{\boldsymbol{\nabla A}\}$ представлены формулой (2.15).

Теперь используем квадрачисло

$$(\rho, \boldsymbol{J}/c), \qquad \boldsymbol{J} = (J_x, J_y, J_z) \tag{3.5}$$

с плотностью источника ρ и вектора плотности тока источника $\boldsymbol{J} = \rho\boldsymbol{v}$ и рассмотрим следующую композицию сопряженного гиперкомплексного оператора с результатом композиции (3.2)

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\partial}{c\partial t}\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \Delta\right) + \frac{1}{3}(\boldsymbol{\nabla}\{\boldsymbol{\nabla\nabla}\}), -\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \Delta\right)\boldsymbol{\nabla} + \frac{\partial}{c\partial t}\{\boldsymbol{\nabla\nabla}\} - \{\boldsymbol{\nabla}\{\boldsymbol{\nabla\nabla}\}\}\right) \circ (0, \boldsymbol{R}) =\\
= \nu(\rho, \boldsymbol{J}/c),
\end{gathered} \tag{3.6}$$

из которой получим систему уравнений третьего порядка в операторном виде

$$-\Box\left(\nabla \boldsymbol{R}\right)+\frac{\partial}{c\partial t}\left(\{\nabla\nabla\}\boldsymbol{R}\right)-\left(\{\nabla\{\nabla\nabla\}\}\boldsymbol{R}\right)=\nu\rho, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial}{c\partial t}\Box\boldsymbol{R}+\frac{1}{3}\left(\nabla\{\nabla\nabla\}\right)\boldsymbol{R}-\Box\{\nabla\boldsymbol{R}\}+\frac{\partial}{c\partial t}\{\{\nabla\nabla\}\boldsymbol{R}\}-\{\{\nabla\{\nabla\nabla\}\}\boldsymbol{R}\}=\frac{\nu}{c}\boldsymbol{J}. \tag{3.8}$$

Здесь учитывались соотношения (2.9) и вышеуказанная замена на производные, а $\Box = \partial^2/c^2\partial t^2 - \Delta$ есть оператор Гамильтона и ν – постоянный коэффициент.

При подстановке выражений (3.3) в (3.7) и (3.8) с учетом калибровки (3.4) получим следующие волновые уравнения четвертого порядка для потенциалов

$$\begin{aligned}\Box_4\varphi&=\nu\rho,\\ \Box_4\boldsymbol{A}&=\frac{\nu}{c}\boldsymbol{J}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Дифференцируя (3.7) по времени

$$-\frac{\partial}{c\partial t}\Box\left(\nabla\boldsymbol{R}\right)+\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\left(\{\nabla\nabla\}\boldsymbol{R}\right)-\left(\{\nabla\{\nabla\nabla\}\}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{c\partial t}\right)=\nu\frac{\partial\rho}{c\partial t} \tag{3.10}$$

и умножая (3.8) скалярно на оператор ∇

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{c\partial t}\Box\left(\nabla\boldsymbol{R}\right)+\frac{1}{3}\left(\nabla\{\nabla\nabla\}\right)\left(\nabla\boldsymbol{R}\right)-\Box\left(\nabla\{\nabla\boldsymbol{R}\}\right)+\\ &+\frac{\partial}{c\partial t}\left(\nabla\{\{\nabla\nabla\}\boldsymbol{R}\}\right)-\left(\nabla\{\{\nabla\{\nabla\nabla\}\}\boldsymbol{R}\}\right)=\frac{\nu}{c}\left(\nabla\boldsymbol{J}\right),\end{aligned} \tag{3.11}$$

складываем уравнения (3.10) и (3.11) и получим уравнение непрерывности для плотности источника

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left(\nabla\boldsymbol{J}\right)=0. \tag{3.12}$$

Для статических полей с потенциалами и калибровкой

$$\boldsymbol{G}=\nabla\varphi,\qquad \boldsymbol{Q}=\{\nabla\boldsymbol{A}\},\qquad (\nabla\boldsymbol{A})=0 \tag{3.13}$$

имеет место расщепление исходных уравнений (3.7) и (3.8) на систему уравнений для поля $\boldsymbol{G}$

$$\begin{aligned}\Delta\left(\nabla\boldsymbol{G}\right)-\left(\{\nabla\{\nabla\nabla\}\}\boldsymbol{G}\right)&=\nu\rho,\\ \tfrac{1}{3}\left(\nabla\{\nabla\nabla\}\right)\boldsymbol{G}+\Delta\{\nabla\boldsymbol{G}\}-\{\{\nabla\{\nabla\nabla\}\}\boldsymbol{G}\}&=0,\end{aligned} \tag{3.14}$$

и систему уравнений для поля $\boldsymbol{Q}$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{3}\left(\nabla\{\nabla\nabla\}\right)\boldsymbol{Q}+\Delta\{\nabla\boldsymbol{Q}\}-\{\{\nabla\{\nabla\nabla\}\}\boldsymbol{Q}\}&=\frac{\nu}{c}\boldsymbol{J},\\ \Delta\left(\nabla\boldsymbol{Q}\right)-\left(\{\nabla\{\nabla\nabla\}\}\boldsymbol{Q}\right)&=0,\end{aligned} \tag{3.15}$$

Потенциалы удовлетворяют дифференциальным уравнениям четвертого порядка

$$\begin{aligned}\Delta_4\varphi&=\nu\rho,\\ \Delta_4\boldsymbol{A}&=\frac{\nu}{c}\boldsymbol{J},\end{aligned} \tag{3.16}$$

где введено обозначение скалярного оператора

$$\begin{aligned}&\Delta_4=(0,\nabla)\circ(0,\nabla_1)\circ(0,\nabla_2)\circ(0,\nabla_3)=\Delta\Delta-\left(\{\nabla\nabla\}\{\nabla\nabla\}\right)=\\ &=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}+\frac{\partial^4}{\partial z^4}-2\left(\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^2\partial z^2}+\frac{\partial^4}{\partial z^2\partial x^2}\right)=\prod_m^4\left(\boldsymbol{\varepsilon}^m\nabla\right).\end{aligned} \tag{3.17}$$

Заключение

Таким образом, построена модель физического поля и найдены дифференциальные уравнения третьего порядка для векторного поля с плотностями скалярного и векторного источников. С учетом условия калибровки имеют место волновые уравнения четвертого порядка для потенциалов поля с источниками. При этом выполняется уравнение непрерывности для плотности источника. Решение полученных уравнений представляет собой отдельную задачу. Не представляет труда дать изложение в привычной ковариантной форме для четырехмерных величин пространства-времени Бервальда-Моора.

Следует отметить работы [4, 5], где последовательно изучаются физические поля в ковариантном виде для пространства-времени Бервальда-Моора. В них векторный источник определяет антисимметричный тензор напряженностей физического поля, который соотносится к аналогу электромагнитного поля. Различие этих работ от представленной состоит в том, что основой физического поля напряженностей здесь является симметричный тензор "деформации". Налицо два различных по своей природе физических поля.

Список литературы

[1] Зарипов Р. Г. Физическое время и расстояние в пространстве-времени Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2007. №2 (8). Т. 4. С. 24–40.

[2] Зарипов Р. Г. Отношение одновременности в финслеровом пространстве-времени. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2006. № 1 (5). Т. 3. С. 27–46.

[3] Зарипов Р. Г. О релятивистских уравнениях в пространстве-времени Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2007. №1 (7). Т. 4. С. 82–92.

[4] Гарасько Г. И. Теория поля и финслеровы пространства. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2006. №2 (6). Т. 3. С. 6–20.

[5] Гарасько Г. И. Слабые поля. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2007. №2 (8). Т. 4. С. 3–12.

Статья послана 30.01.2009