ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ЧАСТИЦ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ МИНКОВСКОГО

С.С. Кокарев[1,2]

[1] *НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия*
[2] *РНОЦ "Логос", Ярославль, Россия*

logos-center@mail.ru

На основе гиперболически-сферически-симметричного решения волнового уравнения в пространстве-времени Минковского — пространственно-временного аналога закон Кулона — и принципа суперпозиции построено действие для системы взаимодействующих частиц. Показано, что соответствующие уравнения движения являются интегро-дифференциальными. Их запись в форме второго закона Ньютона в релятивистской форме выявляет динамическую природу массы: она получается как коллективный эффект части гиперболического взаимодействия рассматриваемой частицы с ее окружением (принцип Маха). Анализируются частные случаи гиперболического самодействия одиночной мировой линии и взаимодействия пары частиц с параллельными мировыми линиями.

Ключевые слова: гиперболическое поле, материальное событие, кулоновский потенциал, логарифмический потенциал, 4-мерная статика, взаимодействие мировых линий, гиперболическая линза.

1 Введение

Специальная теория относительности (СТО), построенная в начале XX века, послужила основой для нового понимания сущности пространства-времени и физических процессов, протекающих в нем. Одним из главных ингредиентов СТО является ее геометрическая интерпретация: в основе всей релятивистской физики лежит концепция 4-мерного пространства-времени Минковского $\mathcal{M}_{1,3}$ с псевдоевклидовой метрикой

$$(\eta) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Геометрический язык СТО позволяет наиболее ясно и последовательно сформулировать ее сущность и основные положения, вывести всевозможные следствия и эффекты, проанализировать эксперименты в области релятивистской физики и сделать последовательный переход к общей теории относительности (ОТО). 4-мерный язык псевдоевклидовой геометрии уже давно стал обычным рабочим инструментом физиков. В прикладных и фундаментальных задачах он часто используется как удобный математический прием для ковариантной записи уравнений и соотношений. Между тем, СТО представляет собой не только (или даже не столько!) расширение и модификацию законов ньютоновской механики, сколько кардинально новый взгляд на физический мир — новую *релятивистскую парадигму.* Эта теория уже на уровне своих фундаментальных положений кардинально отличается от классической механики и вводит понятия, аналоги которых в нерелятивистской физике как правило, либо существенно отличаются, либо вообще отсутствуют. Нижеприведенная Таблица 1 поясняет суть отмеченного различия на конкретных примерах.

В качестве теоретической основы настоящей статьи лежит правая часть таблицы. Обоснование законов Ньютона в рамках концепции 4-мерной статики сильно напряженных струн (9-10 строки таблицы) были сделаны ранее в работе [1]. Чтобы продвигаться далее, следуя логике 4-мерной геометрии Минковского, необходимо отступить от традиционного

Объекты-Свойства	Ньютон	Минковский
1. Пр-во событий	$E^1 \times E^3$ (евкл. время (1D) и пр-во (3D))	$\mathcal{M}_{1,3}$ — 4-мерное ПВ
2. Событие	Пара $(t, x) \in E^1 \times E^3$	радиус-вектор $X \in \mathcal{M}_{1,3}$
3. Метрика	η_1 для E^1, η_3 для E^3	η для $\mathcal{M}_{1,3}$
4. База топологии	евклидовы сферы	гиперболоиды (нехаусдорф.)
5. Свет	не выделен	изотропные векторы и конус
6. Временной порядок	абсолютный	относительный
7. Инварианты	Длина, форма, длительность,...	4-мерная длина
8. Элем. физ. объект	частица (мат. точка)	частица (мировая линия) — ?
9. Составные объекты	система частиц (тела)	4-тела (мировые трубки)
10. Динамика	отображение $E^1 \to E^3$ (эволюция)	статика в $\mathcal{M}_{1,3}$
11. Масса	количество материи	форма энергии
12. Законы сохранения	энергия и импульс	4-импульс
13. Основной оператор	Δ — оператор Лапласа	$\Box$ — оператор Даламбера

Таблица 1: Сравнительная характеристика основных понятий

толкования элементарной частицы (строка 8 и знак вопроса там): элементарным физическим объектом мы будем считать не частицу или, точнее, не мировую линию частицы, а истинный аналог материальной точки пространства $\mathcal{M}_{1,3}$ — метрическую сферу нулевого радиуса. В пространстве-времени ей соответствует световой конус с сосредоточенными на ней материальными характеристиками. Из общих соображений таким элементарным объектам-источникам соответствует пространственно-временное поле — 4-мерный гиперболический аналог кулоновского поля. Протяженные структуры типа мировых линий или мировых трубок, вытянутых во времениподобном направлении, получаются при выстраивании (конденсации) элементарных точек-событий в такие структуры, которое описывается в рамках некоторой обобщенной теории конденсированных сред в 4-мерном пространстве-времени[1]. При этом их коллективное поле соответствует наблюдаемым физическим полям, с которыми имеет дело стандартная классическая теория поля.

На самом деле, впервые гипотеза подобного поля была сделана в рамках псевдофинслерова пространства Бервальда-Моора, которое индуцируется алгеброй поличисел, аналогично тому, как евклидова геометрия на плоскости индуцируется алгеброй комплексных чисел [2,3]. В цитированных работах сделан набросок теории гиперболического поля в рамках пространств Бервальда-Моора и показано, что такие модели содержат в себе физику в пространстве-времени Минковского или даже в искривленных пространствах-временах ОТО. Любопытно однако, что некоторые существенные свойства гиперболических полей естественным образом переносятся в пространство-время Минковского и их обсуждение оказывается более простым без тех специфических особенностей, которые привносит в теорию финслерова геометрия.

2 Гиперболическое центрально-симметричное решение

В нашем рассмотрении мы будем отталкиваться от гиперболического аналога закона Кулона в пространстве Минковского. Этот аналог определяется как сферически-симметричное (в смысле псевдоевклидовой сферы) решение волнового уравнения в пустом пространстве-времени, окружающем центр гиперболической сферы:

$$\Box U = 0. \tag{1}$$

Напомним еще раз, что центром метрической гиперболической сферы в псевдоев-

[1] В такой теории будут присутствовать времениподобные силы и взаимодействия, не свойственные стандартной релятивистской физике.

клидовом пространстве Минковского с метрической точки зрения является не точка[2] $X_0 = (t_0, x_0, y_0, z_0)$, а множество точек — световой конус с вершиной в X_0, — удовлетворяющее уравнению:

$$\varrho^2(X, X_0) = (t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 = 0. \tag{2}$$

В дальнейшем мы везде полагаем $X_0 = 0$.

Напомним, что сферически-симметричное решение уравнения Лапласа в пустоте

$$\Delta\phi = 0 \tag{3}$$

оказывается единственным (с точностью до константы) и, как показывает непосредственная проверка, содержит в себе и всю информацию о точечном источнике. Действительно, кулоновский потенциал $\phi = q/r$ как решение (3) на самом деле удовлетворяет уравнению

$$\Delta\phi = -4\pi q\delta(x)\delta(y)\delta(z) = -\frac{q\delta(r)}{r^2}. \tag{4}$$

во всем пространстве. В последнем равенстве был учтен закон преобразования дельта-функции при переходе к криволинейным координатам.

Аналогично случаю кулоновского поля, мы не задаемся вопросом о структуре источника в уравнении (1): сингулярные характеристики источника будут автоматически содержаться в самом решении. Для его получения перейдем к гиперболически сферически-симметричной 4-мерной системе координат с центром в нуле:

$$\begin{cases} t &= \varrho\cosh\chi; \\ x &= \varrho\sinh\chi\,\sin\theta\,\cos\varphi; \\ y &= \varrho\sinh\chi\,\sin\theta\,\sin\varphi; \\ z &= \varrho\sinh\chi\,\cos\theta. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь ϱ — 4-радиус, χ — гиперболический угол, θ и φ — пара стандартных сферических углов. Формулы (5) справедливы для областей $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$. Метрика Минковского в этой системе координат получается с помощью обычных правил преобразования интервала и имеет вид:

$$ds^2 = d\varrho^2 - \varrho^2(d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)). \tag{6}$$

В дифференциальной геометрии волновой оператор определяется инвариантным образом по формуле:

$$\Box \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\xi^\beta}\right), \tag{7}$$

где g — детерминант метрического тензора, $g^{\alpha\beta}$ — компоненты контравариантной метрики, матрица которой обратна к $(g_{\alpha\beta})$. Из (6) следует, что $g = -\varrho^6\sinh^4\chi\sin^2\theta$, а обратная метрика имеет вид:

$$(g^{\alpha\beta}) = \mathrm{diag}\left(1, -\frac{1}{\varrho^2}, -\frac{1}{\varrho^2\sinh^2\chi}, -\frac{1}{\varrho^2\sinh^2\chi\sin^2\theta}\right). \tag{8}$$

Подставляя эти выражения в общую формулу (7), приходим к выражению для волнового оператора в 4-мерной сферической системе координат:

$$\Box = \frac{1}{\varrho^3}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^3\frac{\partial}{\partial\varrho}\right) - \frac{1}{\varrho^2}\Delta_{\chi,\theta,\varphi}, \tag{9}$$

[2]Здесь и далее, если не указано особо, мы работаем в системе единиц, в которой $c = 1$.

где введено обозначение для угловой части волнового оператора[3]:

$$\Delta_{\chi,\theta,\varphi} \equiv \frac{1}{\sinh^2\chi}\left(\frac{\partial}{\partial\chi}\sinh^2\chi\frac{\partial}{\partial\chi} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right). \tag{10}$$

Подставляя общий вид сферически-симметричного решения $U = U(\varrho)$ в оператор (9), приходим к уравнению:

$$\Box U = \frac{1}{\varrho^3}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^3\frac{\partial U(\rho)}{\partial\varrho}\right) = 0. \tag{11}$$

Его общее решение имеет вид:

$$U(\rho) = \frac{\mathcal{Q}}{\varrho^2} + C, \tag{12}$$

где $\mathcal{Q}$ и C — константы интегрирования.

Будем рассматривать полученное решение как аналог фундаментального решения для гиперболического поля, источником которого являются *материальные события* — конус с распределенной характеристикой $\mathcal{Q}$, которую мы будем называть *гиперболическим зарядом.* Вариант физической интерпретации гиперболического заряда мы дадим чуть позже. Непосредственной проверкой можно убедиться, что полученное решение удовлетворяет 4-мерному аналогу уравнения[4] (4):

$$\Box U = -\frac{2\mathcal{Q}}{\varrho^3}\delta(\varrho). \tag{13}$$

Выше мы употребили термин «аналог фундаментального решения», поскольку в отличие от классического фундаментального решения математической физики, особенность (12) сосредоточена не в точке, а на световом конусе. Будем в дальнейшем называть решение (12) *гиперболическим фундаментальным решением* волнового уравнения, в отличие от хорошо известного фундаментального решения (причинной функции Грина) классической теории поля:

$$G = \theta(t)\frac{\delta(t-r)}{4\pi r}, \tag{14}$$

где $\theta(t)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Нетрудно убедиться[5], что решение (12) удовлетворяет уравнению (13) в обобщенном смысле во всех причинных областях.

3 Гиперболическая вселенная

В этом разделе мы рассмотрим общую теорию системы частиц, взаимодействующих посредством пространственно-временного потенциала (12). Мы предполагаем, что частицы характеризуются протяженными времениподобными мировыми линиями конечной или бесконечной длины, и взаимодействуют посредством универсального гиперболического закона Кулона (12), распространенного на протяженные источники с помощью принципа суперпозиции, аналогично тому, как это делается в электростатике.

[3]При малых гиперболических углах $\sinh\chi \approx \chi$ и выражение для $\Delta_{\chi,\theta,\varphi}$ переходит в оператор Лапласа в 3-мерной сферической системе координат с $r = \chi$.

[4]Отметим, что правую часть в (13) технически проще сразу записать в сферически симметричной системе координат, поскольку в такой форме она не содержит бесконечного множителя Ω_H — аналога множителя 4π в (4) определяющего меру множества всех направлений в $\mathcal{M}_{1,3}$.

[5]По существу, в процессе выкладок требуется два соотношения из теории обобщенных функций: $d\theta(\pm x)/dx = \pm\delta(x)$.

Запишем гиперболическое действие системы N частиц, мировые линии которых имеют непрерывно распределенный гиперболический заряд:

$$\mathcal{S}_N \equiv \mathcal{S}[X_1(\tau_1),\ldots,X_N(\tau_N)] = A\sum_{i\le j=1}^{N}\int\limits_{\Gamma_i}\int\limits_{\Gamma_j}\frac{\lambda_i(\tau_i)\lambda_j(\tau_j)}{\varrho_{ij}^2}ds_i ds_j, \tag{15}$$

где $\varrho_{ij} = (t(\tau_i) - t(\tau_j))^2 - (\vec{r}(\tau_i) - \vec{r}(\tau_j))^2$ — 4-интервал между элементами мировых линий ds_i и ds_j, $ds_i = \sqrt{\dot{X}_i\dot{X}_i}\,d\tau_i$, τ_i — параметр на мировой линии i-ой частицы, λ_i — линейная плотность гиперболического заряда i-ой мировой линии. Отметим, что действие (15) по существу является действием взаимодействия (включая также и самодействие мировых линий) в пространстве-времени.

Чтобы компактно записать уравнения движения:

$$\delta_{X_i}\mathcal{S} = 0, \tag{16}$$

получаемые посредством вариационной процедуры, введем следующие полезные обозначения. Определим *дифференциальный вектор влияния* j-ого элемента на i-ый (в натуральной параметризации):

$$\overrightarrow{Q}_{ij}(s_i,s_j) \equiv \epsilon_{ij}\left(\frac{2\lambda_i(s_i)\lambda_j(s_j)}{\varrho_{ij}^4(s_i,s_j)}(\overrightarrow{X}_i(s_i) - \overrightarrow{X}_j(s_j)) + \frac{d}{ds_i}\left(\frac{\lambda_i(s_i)\lambda_j(s_j)}{\varrho_{ij}^2(s_i,s_j)}\dot{\overrightarrow{X}}_i(s_i)\right)\right), \tag{17}$$

где

$$\epsilon_{ij}\begin{cases}1, & i\ne j;\\ 2, & i=j\end{cases}$$

— фактор, учитывающий двойной вклад самодействия элементов мировой линии. Величина $\overrightarrow{Q}_{ij}(s_i,s_j)$ характеризует влияние элемента ds_j на элемент ds_i, отнесенных к положениям s_i и s_j на мировых линиях Γ_i и Γ_j соответственно. Отметим, что $\overrightarrow{Q}_{ij}\ne\overrightarrow{Q}_{ji}$. Далее определим *интегральный вектор влияния* j-ой мировой линии на элемент i-ой:

$$\overrightarrow{Q}_{ij}^R(s_i) \equiv \int\limits_{\Gamma_j}\overrightarrow{Q}_{ij}(s_i,s_j)\,ds_j. \tag{18}$$

Величина $\overrightarrow{Q}_{ij}^R(s_i)$ по своему определению зависит от индексов i,j и переменной s_i, но теперь уже не зависит от переменной s_j. Определим, наконец, *интегральный вектор влияния* окружения на i-ую мировую линию:

$$\langle\overrightarrow{Q}_i^R\rangle(s_i) \equiv \sum_{j=1}^{N}\overrightarrow{Q}_{ij}^R(s_i). \tag{19}$$

Тогда непосредственной проверкой можно убедиться, что имеет место логическая эквивалентность:

$$\delta_{X_i}\mathcal{S} = 0 \Leftrightarrow \langle\overrightarrow{Q}_i^R\rangle(s_i) = 0, \quad i = 1,\ldots,N. \tag{20}$$

Уравнения движения в форме (20) представляют собой систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, определяющих полную историю частиц. Для прояснения физического смысла уравнений (20) и выявления их связи с классической ньютоновской формой уравнений механики следует подробно расписать производную в правой части определения (17) и выделить коэффициенты при производных $\ddot{\overrightarrow{X}}_i, \dot{\overrightarrow{X}}_i$ и свободную часть.

Выполнение этой процедуры приводит к удобным определениям: *мгновенной массы* (индуцированной окружением):

$$\mathcal{M}_i(s_i) \equiv \sum_{j=1}^{N} \mathcal{M}_{ij}, \quad \mathcal{M}_{ij}(s_i) \equiv \epsilon_{ij} \int\limits_{\Gamma_j} \frac{\lambda_j(s_j)}{\varrho^2(s_i, s_j)} ds_j, \tag{21}$$

и *мгновенной равнодействующей силы*:

$$\overrightarrow{\mathcal{F}}_i(s_i) \equiv \sum_{j=1}^{N} \overrightarrow{\mathcal{F}}_{ij}, \quad \overrightarrow{\mathcal{F}}_{ij}(s_i) \equiv -2\epsilon_{ij} \hat{\mathcal{P}}_i \cdot \int\limits_{\Gamma_j} \frac{\lambda_j(s_j)}{\varrho^4(s_i, s_j)} (\overrightarrow{X}_i - \overrightarrow{X}_j) ds_j, \tag{22}$$

где $\hat{\mathcal{P}}_i \equiv (\hat{\mathrm{Id}} - \overrightarrow{X}_i \otimes \overleftarrow{X}_i)$ — оператор проектирования векторов и форм на 3-пространство $\overrightarrow{X}_i^{\perp}(s_i)$. С учетом этих определений, мы приходим к эквивалентной (квазиньютоновской) форме уравнений (20):

$$\mathcal{M}_i \ddot{\overrightarrow{X}}_i = \overrightarrow{\mathcal{F}}_i - \frac{d \ln \lambda_i}{ds_i} \mathcal{M}_i \dot{\overrightarrow{X}}_i. \tag{23}$$

Проектируя это уравнение на $\dot{\overrightarrow{X}}_i$ с учетом соотношений $\overrightarrow{\mathcal{F}}_i \cdot \dot{\overrightarrow{X}}_i = 0$ и $\ddot{\overrightarrow{X}}_i \cdot \dot{\overrightarrow{X}}_i = 0$ приходим к соотношениям:

$$\lambda_i = \mathrm{const}_i \tag{24}$$

выражающим закон сохранения линейной плотности гиперболического заряда и приводящим к ньютоновским уравнениям динамики:

$$\mathcal{M}_i \ddot{\overrightarrow{X}}_i = \overrightarrow{\mathcal{F}}_i, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{25}$$

Сделаем несколько замечаний по поводу уравнений (20) и (25).

1. На языке векторов влияния закон движения частицы можно выразить следующим образом: *средний по всем частицам вектор влияния, отнесенный к любой частице системы, равен нулю.* Очевидно, что вселенная, состоящая из N частиц рассматриваемого типа, имеет существенно самосогласованный характер, при этом процедура самосогласования имеет при $N \gg 1$ явно статистическую природу.

2. Исходное действие (15) было чистым действием гиперболического взаимодействия, в то время как уравнения (23) имеют вид уравнений движения частицы, выведенных из традиционного принципа наименьшего действия, содержащего специфические кинетический и потенциальный члены. Другими словами, рассматриваемый подход позволяет интерпретировать кинетическую энергию частиц как специфическую форму (разновидность) потенциальной энергии пространственно-временного взаимодействия.

3. Теория, основанная на действии (15), проливает новый свет на физическую природу массы. В соответствии с формулами (21) масса является интегральным результатом части гиперболического взаимодействия, зависящим от всей истории движения окружающих частиц (принцип Маха). В соответствии с выражением (21) следует ожидать, что в динамике пары частиц их массы могут заметно флуктуировать. Стационарные массы получаются, когда мы рассматриваем ансамбль большого числа частиц, в котором массовая часть гиперболического взаимодействия усредняется и флуктуации сглаживаются. Такое усреднение подразумевает решение полной самосогласованной задачи о статике ансамбля гиперболически взаимодействующих мировых нитей, что представляет собой технически сложную задачу.

4. Сохранение линейной плотности гиперболического заряда λ вдоль мировой линии у каждой из частиц, как это будет показано далее, эквивалентно закону сохранения обобщенного 3-мерного заряда (массы и (или) электрического заряда). Из уравнения (23) ясно, что несохранение этой величины на ньютоновском языке эквивалентно наличию времениподобной «силы трения»-. Такого рода силы отсутствуют в релятивистской физике. Наличие подобной силы можно было бы интерпретировать как изменение темпа хода собственного времени [3].

5. Интересно, что граничные условия для уравнений (20), получаемые в процессе их вывода посредством вариационной процедуры, с помощью (21) можно записать на языке масс или импульсов на концах A и B мировых линий:

$$\delta\overrightarrow{X}_A \cdot \overrightarrow{P}(A) = \delta\overrightarrow{X}_B \cdot \overrightarrow{P}(B), \tag{26}$$

где $\overrightarrow{P} = \mathcal{M}\dot{\overrightarrow{X}}$ — 4-импульс. Помимо стандартных граничных условий $\delta\overrightarrow{X}_A = \delta\overrightarrow{X}_B = 0$, используемых в теоретической механике, соотношения (26) допускают произвольные пространственно-подобные вариации концов мировых линий (релятивистский аналог скользящих концов).

6. В динамике, выведенной на основе действия (15), вообще говоря не выполняется соотношение $\overrightarrow{\mathcal{F}}_{ij} = -\overrightarrow{\mathcal{F}}_{ji}$ (третий закон Ньютона), хотя оно может выполняться при специальных предположениях относительно распределения и динамики частиц в пространстве-времени. Как следствие этого обстоятельства, в общем случае отсутствует и аналог закона сохранения полного импульса системы и, следовательно, возможно самоускорение. Отметим, что отсутствие самоускорения и сохранение полного импульса $\overrightarrow{P} = \sum\limits_{i=1}^{N} \overrightarrow{P}_i$ является более слабым ограничением на систему, чем выполнение в ней 3-его закона Ньютона [4].

4 Вселенная одной частицы

Рассмотрим самый простой случай динамики частиц, рассмотренной в предыдущем разделе, при $N = 1$. Единственное интегро-дифференциальное уравнение, определяющее глобальное равновесие этой мировой линии, сводится к равенству нулю интегрального вектора самодействия:

$$\langle\overrightarrow{Q}_1^R\rangle = \int\limits_{\Gamma_1} \overrightarrow{Q}_{11}\, ds_1 = 0. \tag{27}$$

Уравнение (27) вообще говоря не исключает существование многократных временных петель и нетривиального запутывания мировой линии в пространстве-времени. Для более наглядного представления характера уравнений и потенциальных проблем, связанных с его решением, рассмотрим частный случай одномерного движения, для которого закон представляется 4-мерным радиус вектором следующего специального вида: $\overrightarrow{X} = (t, \varphi(t), 0, 0)$, где $\varphi(t)$ — некоторая гладкая функция, характеризующая пространственный закон движения в координатной параметризации. Для этого случая уравнения (27) сводятся к одному единственному независимому интегро-дифференциальному уравнению для $\varphi(t)$ вида:

$$2\int\limits_{T_1}^{T_2} \frac{(t_1 - t_2)D_2}{\varrho^4}\, dt_2 + \frac{\dot{\varphi}_1\ddot{\varphi}_1}{D_1^4}\int\limits_{T_1}^{T_2} \frac{D_2}{\varrho^2}\, dt_2 + \frac{1}{D_1^2}\frac{\partial}{\partial t_1}\int\limits_{T_1}^{T_2} \frac{D_2}{\varrho^2}\, dt_2 = 0, \tag{28}$$

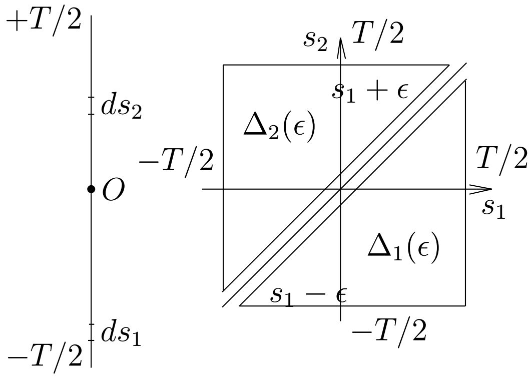

Рис. 1: Самодействие мировой линии и регуляризация интеграла

где $\varphi_i \equiv \varphi(t_i)$; $D_i \equiv \sqrt{1-\dot{\varphi}_i^2}$; $\varrho^2 \equiv (t_1-t_2)^2 - (\varphi_1-\varphi_2)^2$. Ввиду сильной нелинейности уравнения (28) и отсутствия регулярных методов его анализа и решения, вопрос об отыскании общего решения и условиях его единственности остается открытым. Между тем, вопрос о существовании частного решения имеет положительный ответ: непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что при $\varphi(t) = x_0 + vt$ величина $Q_{11} \equiv 0$. Другими словами, *инерциальные движения являются решениями уравнений (28) в сильном смысле, так как на них обращается в нуль дифференциальный вектор самодействия, а не его среднее значение.* Этот результат, вполне естественный и ожидаемый с позиций законов классической механики Ньютона, с одной стороны обнаруживает факт существования решений уравнения (28), но не закрывает вопроса о наличии других движений, удовлетворяющих этому уравнению (и тем более общему уравнению (27)), которые мы в рассматриваемой картине также с полным основанием могли бы называть инерциальными.

Простой анализ обнаруживает, что нерелятивистское ускоренное движение с $\varphi(t) = x_0 + vt + at^2/2$ является решением в сильном смысле с точностью до слагаемых $O(a^2)$, и в слабом с точностью до $O(a^3)$, если все встречающиеся в вычислениях расходящиеся интегралы понимать в смысле их главного значения.

Остановимся более подробно на физическом смысле параметров модели для случае прямолинейной мировой линии, которую всегда можно интерпретировать как мировую линию покоящейся частицы за счет надлежащего выбора системы отсчета. Оказывается, что самодействие такой мировой линии самосогласованно определяет некоторые ее важнейшие характеристики! Действительно энергию самодействия мировой линии длины T можно представить в виде:

$$U_{\text{self-act}} = \frac{1}{2}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\int\limits_{-T/2}^{T/2} \frac{\lambda ds_1 \cdot \lambda ds_2}{(s_1-s_2)^2}\frac{\lambda^2}{2}\int\limits_{Q_T(0)} \frac{ds_1 \wedge ds_2}{(s_1-s_2)^2} \tag{29}$$

Последнее выражение представляет результат самодействия как интеграл от 2-формы по квадрату со стороной T, причем 2-форма имеет сингулярность на диагонали $s_1 = s_2$ (самодействие одиночных элементов мировой линии). Для придания физического смысла расходящемуся интегралу, сделаем его регуляризацию, схема которой иллюстрируется на рис. 1.

Согласно этой схеме мы выбрасываем из квадрата ϵ-окрестность диагонали и включаем наш интеграл в однопараметрическое семейство интегралов, зависящих от величины параметра ϵ:

$$\int\limits_{Q_T(0)} = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{\Delta_1(\epsilon)} + \int\limits_{\Delta_2(\epsilon)}, \tag{30}$$

где каждый из интегралов справа берется по треугольной области, на которой 2-форма регулярна. Результат вычисления можно представить в следующем виде:

$$U_{\text{self-act.reg.}} = \lambda^2(N - \ln N - 1) \overset{N \gg 1}{=} \lambda^2 N, \quad N \equiv \frac{T}{\epsilon}, \tag{31}$$

имеющем при $\epsilon \ll T$ физический смысл суммы большого числа квантов энергии самодействия λ^2. Другими словами, *регуляризация интеграла энергии самодействия приводит к необходимости введения в теорию фундаментального параметра временной длительности* ϵ, *при этом на каждый элемент мировой линии длины* ϵ *(его можно назвать квантом истории частицы) приходится энергия самодействия* λ^2.

На самом деле, с позиций классической механики энергию $U_{\text{self-act}}$ следует интерпретировать как действие свободной частицы. Для последовательной интерпретации необходимо выполнить одно из двух интегрирований в (29) в явном виде:

$$U_{\text{self-act}} = \mathcal{S}_0 = -\frac{\lambda^2 T}{2} \int\limits_{-T/2}^{T/2} \frac{ds}{(T/2 - s)(T/2 + s)} \tag{32}$$

График подынтегральной функции в (32) представлен на рис. 2.

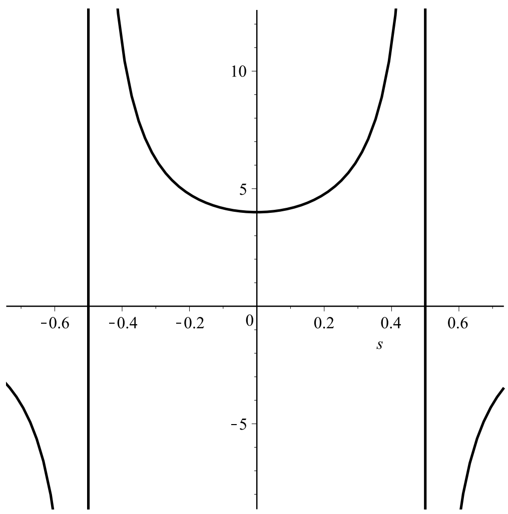

Рис. 2: Функция $f = 1/(T/2 - s)(T/2 + s)$ в (32) (на графике $T = 1$.)

Вдали от концов мировой линии (т.е. для $-T/2 \ll s \ll T/2$) подинтегральная функция меняется очень медленно и потому часть энергии самодействия в этой области принимает вид классического действия свободной частицы:

$$\mathcal{S}_0(s_1, s_2) \approx -\frac{\lambda^2 T}{2} \int\limits_{s_1}^{s_2} f(0)\, ds = -m_0 c \int\limits_{s_1}^{s_2} ds, \tag{33}$$

где $m_0 = 2\lambda^2/T$. Таким образом, *гиперболическое самодействие свободной частицы определяет вдали от концов ее мировой линии параметр, имеющий смысл массы покоя частицы.* Ее конечный характер обеспечивается как наличием гиперболического заряда мировой линии ($\lambda \neq 0$), так и конечностью ее истории ($T < \infty$). Если предположить, что $\lambda^2 \sim \hbar$ и $T \gtrsim 13$ млрд. св. лет, то получим оценку для величины характерной энергии покоя, индуцируемой гиперболическим самодействием: $m_0 c^2 \lesssim 10^{-32}$эВ!

4.1 Статическое взаимодействие частиц

Чтобы выявить внутреннюю связь между классической теорией поля и гиперболическим полем, рассмотрим очень простую ситуацию — пару покоящихся в некоторой инерциальной системе отсчета классических частиц-источников. В 4-мерной системе координат, согласованной с этой системой отсчета, рассматриваемая пара частиц будет представляться в $\mathcal{M}_{1,3}$ парой мировых линий, параллельных оси времени и разделенных пространственным расстоянием r. Эти линии «сотканы» из материальных событий. Энергию самодействия каждой частицы из пары мы подробно рассмотрели в предыдущем разделе. Поэтому сразу перейдем к энергии их гиперболического взаимодействия:

$$\phi_{12}(r) = \frac{1}{2}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\int\limits_{-T/2}^{T/2} \frac{\lambda_1\lambda_2}{(t_2-t_1)^2 - r^2} dt_1 dt_2 \tag{34}$$

(множитель 1/2 появился из-за того, что двойное интегрирование двукратно учитывает пары элементов на мировых линиях).

Поскольку вычисление интеграла связано с двумя регуляризациями, имеющими определенный физический смысл, ниже мы приводим подробные вычисления. Выполняя замену переменных $\xi_1 = t_1/r$, $\xi_2 = t_2/r$, приходим к факторизации размерных и безразмерных выражений в (34):

$$\phi_{12}(r) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2} I(a), \tag{35}$$

где безразмерный интеграл $I(a)$, зависящий только от безразмерного параметра $a = T/2r$ выражается формулой:

$$I(a) = \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-a}^{a} \frac{d\xi_1\, d\xi_2}{(\xi_2-\xi_1)^2 - 1}. \tag{36}$$

Для эффективного вычисления этого интеграла заметим, что геометрически он является интегралом точной 2-формы по квадратной области Q_{2a} ($2a$ — сторона квадрата) на плоскости переменных (ξ_1, ξ_2):

$$I(a) = \int\limits_{Q_{2a}} \frac{d\xi_1 \wedge d\xi_2}{(\xi_2-\xi_1)^2 - 1}. \tag{37}$$

Перейдем к новым координатам:

$$u = \xi_1 - \xi_2; \quad v = \xi_1 + \xi_2. \tag{38}$$

Элемент площади $d\xi_1 \wedge d\xi_2 = (du \wedge dv)/2$, а область интегрирования на плоскости переменных (u, v) будет представлять собой квадрат $\bar{Q}_{2a}$ (рис. 3) с вершинами, лежащими на осях в точках с координатами $\pm 2a$.

В новых переменных интеграл (37) примет вид:

$$I(a) = \frac{1}{2}\int\limits_{\bar{Q}_{2a}} \frac{du \wedge dv}{u^2 - 1}. \tag{39}$$

Поскольку подынтегральное выражение имеет сингулярность на прямых $u = \pm 1$, необходима регуляризация. Суть применяемой ниже регуляризации заключается в одновременном выбрасывании вкладов в интеграл ϵ-окрестностей отрезков сингулярных прямых (ϵ-полос $B_{\epsilon 1}$ и B_{ϵ_2}) с последующим предельным переходом $\epsilon \to 0$. Границы ϵ-полос и прямая $u = 0$ (на ней 2-форма регулярна) задают следующее разбиение области интегрирования:

$$\bar{Q}_{2a} = \Delta_{\epsilon 1} \cup B_{\epsilon 1} \cup T_{\epsilon 1} \cup T_{\epsilon 2} \cup B_{\epsilon 2} \cup \Delta_{\epsilon 2}, \tag{40}$$

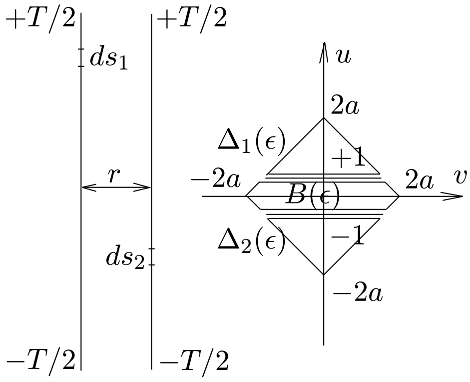

Рис. 3: Самодействие мировой линии и регуляризация интеграла

где треугольные области $\Delta_{\epsilon 1}, \Delta_{\epsilon 2}$ задаются неравенствами:

$$\Delta_{\epsilon 1}: \ -2a-u \le v \le 2a+u, \quad -2a \le u \le -1-\epsilon; \tag{41}$$

$$\Delta_{\epsilon 2}: \ -2a+u \le v \le 2a-u, \quad 1+\epsilon \le u \le 2a,$$

а трапецидальные $T_{\epsilon 1}, T_{\epsilon 2}$ — неравенствами:

$$T_{\epsilon 1}: \ -2a-u \le v \le 2a+u, \quad -1+\epsilon \le u \le 0; \tag{42}$$

$$T_{\epsilon 2}: \ -2a+u \le v \le 2a-u, \quad 0 \le u \le 1-\epsilon.$$

Интеграл (39) в регуляризованной форме теперь принимает вид:

$$I(a,\epsilon) = \frac{1}{2} \int\limits_{\bar{Q}_{2a}\setminus(B_{\epsilon 1}\cup B_{\epsilon 2})} \frac{du\wedge dv}{u^2-1}. \tag{43}$$

В каждой из областей регулярности интеграл сводится к повторному и вычисляется элементарно:

$$I_1 = \int\limits_{\Delta_{\epsilon 1}} = (2a-1)\ln(2a-1) - (2a+1)\ln(2a+1) + (2a+1)\ln(2+\epsilon) - (2a-1)\ln\epsilon; \tag{44}$$

$$I_2 = \int\limits_{T_{\epsilon 1}} = (2a-1)\ln\epsilon - (2a+1)\ln(2-\epsilon); \tag{45}$$

$$I_3 = \int\limits_{T_{\epsilon 2}} = I_2; \quad I_4 = \int\limits_{\Delta_{\epsilon 2}} = I_1. \tag{46}$$

Собирая все вместе, находим:

$$I(a,\epsilon) = (2a-1)\ln(2a-1) - (2a+1)\ln(2a+1) + (2a+1)(\ln(2+\epsilon) - \ln(2-\epsilon)). \tag{47}$$

Переходя в (47) к физическим обозначениям $2a = T/r$, получаем:

$$I(a,\epsilon) = \left(\frac{T}{r}-1\right)\ln\left(\frac{T}{r}-1\right) - (\ln(2+\epsilon)-\ln(2-\epsilon))\left(\frac{T}{r}+1\right)\ln\left(\frac{T}{r}+1\right) + \left(\frac{T}{r}+1\right). \tag{48}$$

Если теперь в этом выражении перейти к точным пределам $T \to \infty$, $\epsilon \to 0$, мы получим расходимость, независимо от порядка выполнения предельных переходов. Рассмотрим

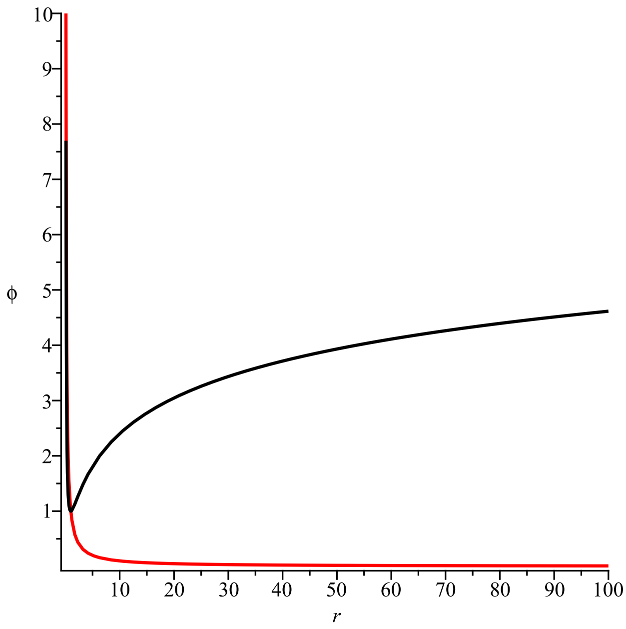

Рис. 4: Энергия гиперболического взаимодействия частиц. Черная кривая — потенциал (51) при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, красная кривая — кулоновская часть.

мир, в котором параметры T и ϵ отличны от своих идеальных предельных значений. Эти параметры имеют различный физический смысл: значение T отвечает за «длительность истории» частиц-источников, значение ϵ — за причинность. При $\epsilon = 0$ взаимодействие посредством гиперболического поля распространяется строго со скоростью света вдоль конусов. Малые отклонения ϵ от нуля соответствуют картине, в которой конуса слегка «размазаны». При этом параметр ϵ в этой картине приобретает смысл дополнительной «фундаментальной постоянной», которую формально можно представить в виде

$$\epsilon = \delta c/c, \tag{49}$$

где δc — абсолютная вариация скорости света c («фундаментальная постоянная»). Для описания такого мира с несколько более общими свойствами, чем пространство-время Минковского в СТО, естественно рассмотреть не предел выражения (48) при $T \to \infty$, $\epsilon \to 0$, а его асимптотический вид при этих условиях. Удерживая несколько первых членов соответствующих разложений, мы получим (отбрасывая несущественные вещественные константы):

$$I(T, \epsilon) \overset{\text{as}}{=} \frac{\epsilon T}{r} + 2\ln(r/T) + O(\epsilon) + O((r/T)^2). \tag{50}$$

В выражении (50) выделяется кулоновская часть — она сохраняется благодаря конечному значению комбинации ϵT, отвечающей за своеобразный баланс между длительностью истории и причинностью, и логарифмическая часть.

С учетом (35) окончательное выражение для энергии взаимодействия пары покоящихся частиц-источников в асимптотическом приближении можно записать следующим образом:

$$\phi_{12}(r) \overset{\text{as}}{=} \frac{\alpha_1\alpha_2}{r} + \lambda_1\lambda_2 \ln r, \tag{51}$$

где $\alpha_i = \lambda_i\sqrt{\epsilon T/2}$ — кулоновские заряды, λ_i — логарифмические заряды, которые совпадают с линейной плотностью исходного гиперболического заряда.

График функции (51) представлен на рис. 4.

В потенциале (51) на малых расстояниях доминирует кулоновская часть, а на больших — логарифмическая. При этом «малые расстояния» в рассматриваемой асимптотической теории определяются естественным условием $r \ll \epsilon T$. Для грубого согласования с наблюдениями, следует положить $\epsilon \lesssim 10^{-10}$ (современная точность измерения скорости света), $T \gtrsim 10^{24}$м (масштаб времени существования Вселенной по современным представлениям), тогда кулоновская область определяется неравенством: $r \ll 10^{14}$м, что с запасом покрывает размеры Солнечной системы. С другой стороны, на космологических масштабах в энергии взаимодействия заведомо доминирует логарифмическая часть. Нетрудно показать, что логарифмический потенциал обеспечивает плоский характер кривых вращения частиц, вращающихся вокруг общего массивного центра, без привлечения концепции темной материи. Действительно, полагая во втором законе Ньютона для вращательного движения силу притяжения $\sim 1/r$, получаем:

$$\frac{v^2}{R} \sim \frac{A}{R} \Rightarrow v \sim \text{const}. \tag{52}$$

Отметим, что полученный результат в принципиальном отношении позволяет обойтись без концепции темной материи, как это делается, например, в теориях типа MOND (Modified Newton Dynamics) [5]. Из предыдущего изложения очевидно, что в отличие от теорий MOND, мы модифицируем не вид второго закона Ньютона, а фундаментальный закон взаимодействия.

Литература

[1] S.S. Kokarev, Classical solids dynamics as 4D statics of elastic strings, *Nuovo Cimento B* 116, 915 (2001), gr-qc/0108007.

[2] D.G. Pavlov, S.S. Kokarev, Essentials of Polynumbers Field Theory, In *Advances in General Relativity Research* (ed. C. Williams) 2015, ch.7, pp. 157-266, Nova Science Publishers, NY,USA

[3] D.G. Pavlov, S.S. Kokarev, Algebra, Geometry and Physics of Hyperland, In *Advances in General Relativity Research* (ed. C. Williams) 2015, ch.8, pp. 267-342, Nova Science Publishers, NY,USA

[4] С.С.Кокарев, Три лекции о законах Ньютона, *Сборник трудов РНОЦ «Логос»* (2006) 1, с.45-72, arxiv: 0905.3285

[5] M. Milgrom, MOND theory, arxiv: 1404.7661 [astro-ph.CO]

INTEGRAL HYPERBOLIC DYNAMICS OF PARTICLES IN THE MINKOWSKI SPACE-TIME

S.S. Kokarev[1,2]

[1] *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia*
[2] *RSEC Logos, Yaroslavl, Russia*

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

The paper presents an action of an interacting particles system based on a hyperbolic-spherical-symmetric decision of a wave equation in the Minkowski space-time, space-time analog of the Colomb's law, and the superposition law. The corresponding motion equations are integro-differential, and their notation according to the Newton's second law in the relativistic form reveals the dynamic nature of a mass: it becomes a result of a cooperative effect of a part of hyperbolic interaction between the particle and its environment (the Mach's principle). The author analyses some special cases of the hyperbolic self-action of a solitary world line and interactions between a pair of particles and parallel world lines.

Key Words: hyperbolic field, matter event, Coulomb,s potential, logarithmic potential, 4-dimensional static, interaction of world lines, hyperbolic lense.