ВРЕМЯ КАК ПОЛЕ СИНХРОНИЗИРОВАННЫХ СОБСТВЕННЫХ ВРЕМЕН НОРМАЛЬНОЙ КОНГРУЭНЦИИ МИРОВЫХ ЛИНИЙ II

Г.И. Гарасько

ФГУП ВЭИ, Москва, Россия

gri9z@yandex.ru, gri9z.wordpress.com

В данной работе показано, что зная функцию Финслера $\Phi(p;x)$, функцию $S(x)$ - действие как функция координат, которая определяет нормальную конгруэнцию мировых линий, и зная при этом элемент собственных времен вдоль них, можно получить дифференциальное уравнение с частными производными для поля собственных времен $T(x)$ этой нормальной конгруэнции мировых линий. Наиболее интересной является такая взаимосвязь между упомянутыми выше понятиями, когда гиперповерхности уровня $T(x) = \mathrm{const}$ являются трансверсальными гиперповерхностями к нормальной конгруэнции мировых линий, определяемых Мировой функцией $S_W(x)$.

Ключевые слова: Бервадьд - Моор, время, конгруэнция мировых линий, метрическая функция, Мировая функция, нормальная конгруэнция мировых линий, параметр эволюции, пространство Минковского, синхронизация, собственное время, собственно пространство, тангенциальное уравнение индикатрисы, финслерова геометрия, финслерово пространство, функция Финслера.

1 Введение

Данная работа является продолжением (II-ой частью) работы [2]. Наши представления о пространстве событий, как 4-мерном, так, возможно, и другой размерности, несколько отличаются от общепринятых представлений [3], [4]. Физический Мир "в нулевом приближении" видится нам как пространство событий с парой математических объектов, имееющих и физический смысл:

1) поля производных координат пространства событий по некоторому параметру эволюции и поля обобщенных импульсов, или

2) конгруэнции мировых линий и поля обобщенных импульсов.

Ни 1)-е, ни 2)-е требование не подразумевает определенной метрической геометрии, так как один и тот же физический Мир "в нулевом приближении" может быть реализован в качественно разных геометриях, причем геометрии являются необязательно псевдоевклидовыми или псевдоримановыми [1]. Поэтому наши представления о пространстве событий, геометрии пространства событий, собственном времени и собственно пространстве отличается от того, что предлагают классические СТО и ОТО.

Если исходить от понятий наблюдатель и системы отсчета, связанной с этим наблюдателем, то в четырехмерном пространстве событий x^0, x^1, x^2, x^3 мировая линия наблюдателя – координатная ось x^0, то есть прямая линия, описываемая системой уравнений:

$$x^1 = 0, \qquad x^2 = 0, \qquad x^3 = 0\,. \tag{1}$$

Каждый наблюдатель старается построить систему координат x^0, x^1, x^2, x^3 во всем пространстве событий, что в принципе не возможно – практически не осуществимо. Но собственное время он может измерять довольно точно: с точностью тех часов, которые он имеет, и тех представлений о времени, которые у него сложились из всего опыта физической науки. Последнее более существенно и более сложно: во-первых, измеряемое собственное время должно монотонно увеличиваться –

$$dx^0 > 0\,, \qquad x^0 \in [x^0_{(1)}, x^0_{(2)}]\,, \qquad x^0_{(1)} < x^0_{(2)} \tag{2}$$

– в том промежутке, который интересует наблюдателя, например, от значения $x^0_{(1)}$ до значения $x^0_{(2)}$; во-вторых, собственное время должно увеличиваться равномерно, с одной и той же "скоростью". Таким образом, создание часов и осмысление понятия собственного времени это сложный противоречивый процесс.

Замечание. Все измеряемые физические величины можно разделить на две группы:

1. К первой группе отнесем наиболее фундаментальные понятия, для которых вначале возникли способы, единицы измерения и приборы для измерения этих величин, а уж затем много позже появилось само понятие.
2. Ко второй группе отнесем измеряемые величины, которые вначале были получены (сконструированы) теоретически, а уж затем были созданы приборы для измерения этих величин.

Важно подчеркнуть, что первая группа величин тесно связана и даже, можно сказать, определяется приборами и методами их измерения.

И все же будем предполагать: мы понимаем, что такое собственное время, умеем его, равномерно и монотонно увеличивающееся, "точно" измерять, и координатное время в системе отсчете, связанной наблюдателем $V_{(1)}$, суть собственное время наблюдателя $V_{(1)}$.

Тогда любая мировая линия наблюдателя $V_{(2)}$ в системе отсчета и координатах, связанных с наблюдателем $V_{(1)}$, будет определяться системой уравнений:

$$x^0 = x^0\,, \qquad x^1 = g_{(1)}(x^0)\,, \quad x^2 = g_{(2)}(x^0)\,, \quad x^3 = g_{(3)}(x^0)\,, \tag{3}$$

или

$$x^0 = u_{(0)}(x^0)\,, \quad x^1 = u_{(1)}(x^0)\,, \quad x^2 = u_{(2)}(x^0)\,, \quad x^3 = u_{(3)}(x^0)\,, \tag{4}$$

где g, u – функции одного действительного аргумента, достаточное число раз дифференцируемые и удовлетворяющие еще некоторым дополнительным условиям. Вместо системы уравнений (4) для описания произвольной мировой линии можно использовать и другую систему уравнений:

$$x^0 = f_{(0)}(\tau)\,, \quad x^1 = f_{(1)}(\tau)\,, \quad x^2 = f_{(2)}(\tau)\,, \quad x^3 = f_{(3)}(\tau)\,, \tag{5}$$

где f – функции одного действительного аргумента, достаточное число раз дифференцируемые, а τ – параметр эволюции. Параметр эволюции должен обладать всеми свойствами собственного времени, кроме равномерности. Если параметр эволюции можно выразить через координата x^0, x^1, x^2, x^3 пространства событий в системе отсчета наблюдателя $V_{(1)}$, где x^0 – собственное время наблюдателя $V_{(1)}$, то вдоль любой мировой линии

$$\frac{d\tau}{dx^0} > 0\,. \tag{6}$$

Собственное время наблюдателя связано с его биологическим временем. Если наблюдатель здоров – у него нет аритмии, и он находится в состоянии покоя и спокойствия, и внешняя среда не влияет на пульс, то число ударов его сердца за одну единицу собственного времени в разные моменты собственного времени должно быть одним и тем же.

Сразу же возникает вопрос о синхронизации всех часов, имеющихся у всевозможных наблюдателей. Эта проблема имеет, как практический аспект, так и теоретический. Нас будет интересовать только теоретический аспект.

Будем исходить из того, что в пространстве событий в некоторой окрестности точки $M_0(0,0,0,0)$ нахождения наблюдателя он может с некоторой точностью построить систему координат x^0, x^1, x^2, x^3, экстраполировать ее на все пространство событий, а затем уточнять эту систему координат по мере продвижения по собственной мировой линии (1). Именно в этом смысле мы и будем понимать координатное пространство x^0, x^1, x^2, x^3 или $x^0, x^1, x^2, ..., x^{n-1}$ в n-мерном пространстве событий.

На данный момент мы исходим из концепции, что пространство событий (как четырехмерное так и, если понадобится, n-мерное) является финслеровым пространством (финслеровой геометрией). Материальному объекту в этом пространстве соответствует мировая линия. Любая модель физического Мира в нулевом приближении это нормальная конгруэнция мировых линий плюс поле обобщенного импульса. Будем также предполагать, что в финслеровых физических пространствах всегда существует такая система координат $x^0, x^1, x^2, ..., x^{n-1}$, в которой x^0 – собственное время, измеряемое наблюдателем, тесно связанное с понятием прибора "часы" – для измерения собственного времени.

Следует отметить две различные возможности: 1) когда мировая линия (1) наблюдателя, связанного с системой координат, принадлежит рассматриваемой нормальной конгруэнции мировых линий – обычный физический Мир в нулевом приближении; 2) и когда мировая линия (1) не принадлежит рассматриваемой нормальной конгруэнции – обычный физический Мир в нулевом приближении и плюс дополнительный наблюдатель, поставивший себя вне физического Мира, – Бог!?

В СТО изучается пространство Минковского dx^0, dx^1, dx^2, dx^3 с элементом длины

$$ds = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}\,. \tag{7}$$

И в этой теории вполне разумно обосновывается, что в системе координат, где dx^0 – с точностью до постоянного коэффициента собственное время наблюдателя в системе отсчета, связанной с этим наблюдателем, собственное время любого другого наблюдателя, движущегося равномерно и прямолинейно, равно интегралу

$$T = \frac{1}{c}\int \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}\,, \tag{8}$$

взятому вдоль соответствующей мировой линии, или, определенным образом синхронизуя часы первого и второго наблюдателя,

$$T = \frac{1}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}\;x^0\,, \tag{9}$$

где v – скорость второго наблюдателя относительно первого.

Если второй наблюдатель движется относительно первого неравномерно и/или непрямолинейно, часто применяют ту же формулу (8), что совершенно необоснованно. В ОТО это неверное применение формулы (8) усугубляется ее обобщением:

$$T = \frac{1}{c}\int ds\,, \tag{10}$$

где интеграл берется вдоль соответствующей мировой линии, а ds – элемент длины в псевдоримановом пространстве А. Эйнштейна.

Если не выходить за рамки СТО и ОТО, то можно принять формулу (10) и те парадоксы, которые она порождает, но, к сожалению или к счастью, в теоретической физике давно уже встречаются и другие геометрии, например, движение релятивистской заряженной частицы массы m, зарядом e в электромагнитном поле $A_i(x)$ происходит по экстремалям (мировым линиям) финслеровой геометрии с элементом длины

$$ds = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} + \frac{e}{m\,c^2}\ A_i(x)\,dx^i + q_i\,dx^i\,, \tag{11}$$

где в рассматриваемой системе координат $q_i = (q_0, 0, 0, 0)$, q_0 – постоянная, причем $q_0 > 1$ и $q_0 \gg \dfrac{|e|}{m\,c^2}\,|A_0(x)|$. Используя формулу (10), получим "собственное время" для покоящегося наблюдателя в точке $(x^0, 0, 0, 0)$, если A_0 не зависит от x^0:

$$T = \frac{1}{c}\ \left(1 + \frac{e}{m\,c^2}\ A_0(x^1, x^2, x^3)\right) x^0\,. \tag{12}$$

Это доказывает (как и два примера в работе [2]), что в общем случае формула (10) не применима.

Поэтому в данной работе будем исходить из того, что в финслеровом пространстве $x^0, x^1, ..., x^{n-1}$, кроме метрической функции $L(\xi; x)$, определена еще конкретная нормальная конгруенция экстремалей (мировых линий) и для этой конгруэнции определен вдоль мировых линий элемент собственных времен:

$$dT = \frac{1}{c}\,\Theta\left(dx^0, dx^1, ..., dx^{n-1};\ x^0, x^1, ..., x^{n-1}\right)\,, \tag{13}$$

где функция $\Theta(\xi; x) > 0$, если вектор ξ направлен по касательной к мировой линии рассматриваемой конгруэнции в точке $M(x)$ основного пространства; функция $\Theta(\xi; x)$ должна быть положительно однородной первой степени относительно первых n аргументов.

Как мы выяснили в работе [2], в любом финслеровом пространстве для конкретной нормальной конгруэнции можно ввести параметр эволюции τ – длина мировой линии, – таким образом, чтобы поверхности уровня

$$S(x) = \tau \tag{14}$$

были при любом τ трансверсальны мировым линиям нашей конгруэнции. При этом функция $S(x)$ в классической механике называется действием как функция координат и удовлетворяет уравнению Гамильтона - Якоби:

$$\Phi\left(\frac{\partial S}{\partial x};\ x\right) = 0\,. \tag{15}$$

Здесь $\Phi(p; x)$ – функция Финслера. Собственные времена всегда можно синхронизовать на какой-то поверхности уровня τ_0, причем иногда возможно положить $\tau_0 = 0$. Тогда конкретная мировая линия нашей конгруэнции будет характеризоваться точкой $\left(x^0_{(0)}, x^1_{(0)}, ..., x^{n-1}_{(0)}\right)$ пересечения мировой линии с поверхностью уровня τ_0, а точка на выбранной мировой линии – значением параметра эволюции. Поэтому параметрическая запись любой мировой линии из нашей конгруэнции имеет вид:

$$x^i = x^i\left(x_{(0)}; \tau\right)\,. \tag{16}$$

Подставив эти зависимости в (13) и проинтегрировав по τ от τ_0 до τ, получим

$$T(x_{(0)}; \tau) = \frac{1}{c}\ \Psi(x_{(0)}; \tau)\,. \tag{17}$$

Систему уравнений (16) можно разрешить относительно $x^i_{(0)}$ и получить

$$x^i_{(0)} = x^i_{(0)}(x;\tau)\,. \tag{18}$$

Тогда, подставив эти выражения в (17) и заменив τ на $S(x)$, получим

$$T = T(x)\,. \tag{19}$$

При этом поверхность уровня $T(x) = T(x_{(0)})$ будет совпадать с поверхностью уровня $S(x) = \tau_0$ и являться трансверсальной к рассматриваемой нормальной конгруэнции мировых линий, что можно считать синхронизацией собственных времен данной конгруэнции на одной из трансверсальных гиперповерхностей. Каждую гиперповерхность $T(x) = \mathrm{const}$ можно считать собственно пространством. Особенно если они являются трансверсальными к нашей конгруэнции, а это выполняется далеко не всегда

Как было показано в работе [2], возможно такое сочетание конкретной финслеровой геометрии, конкретной нормальной конгруэнции мировых линий в ней и формулы для элемента собственных времен, что синхронизированное собственное время будет выражаться через функцию F одной действительной переменной следующим образом:

$$T = F\left(S(x)\right)\,. \tag{20}$$

В этом случае гиперповерхности одного и того же значения T собственных времен будут трансверсальными к рассматриваемой нормальной конгруэнции мировых линий и каждую такую гиперповерхность можно считать собственно пространством в момент времени T без каких-либо сомнений. Если же функция $S(x)$ удовлетворяет фундаментальному уравнению, то она называется Мировой функцией, обычно обозначается $S_W(x)$ и тогда

$$T = F\left(S_W(x)\right)\,. \tag{21}$$

В работе [2], как раз, и приведены два конкретных примера, в которых имеет место формула (21).

В том случае, когда матрица из вторых производных Θ в формуле (13) по dx^i (первые n аргументов) имеет ранг $(n-1)$, в основном пространстве $x^0, x^1, ..., x^{n-1}$ как бы определена еще одна функция, которая обладает всеми свойствами метрической функции финслеровой геометрии:

$$L^{\mathcal{T}} = \Theta\left(dx^0, dx^1, ..., dx^{n-1};\, x^0, x^1, ..., x^{n-1}\right)\,. \tag{22}$$

Интересно рассмотреть гипотезу, что в основном координатном пространстве $x^0, x^1, ..., x^{n-1}$ определены одновременно две финслеровы геометрии с метрическими функциями $\Theta(dx;x)$ и $L(dx;x)$, которые дают одну и ту же конгруэнцию мировых линий. Из этого следует, что семейство трансверсальных поверхностей в том и другом случае должны совпадать, а значит рассматриваемый вариант сводится к предыдущему (20).

Подчеркнем, что нас более интересует вариант (21), когда функция $S(x)$ финслеровой геометрии с метрической функцией $L(dx;x)$ удовлетворяет принципу самодостаточности финслеровой геометрии, то есть является решением фундаментального уравнения. В силу этого вариант (21) имеет довольно "мало" решений. Поэтому имеет смысл рассмотреть вариант, когда

$$T = F\left(S_W(x);x\right) \simeq \tilde{F}\left(S_W(x)\right) + f(x)\,, \tag{23}$$

где

$$|f(x)| \ll \left|\tilde{F}\left(S_W(x)\right)\right|\,. \tag{24}$$

2 Гиперболический потенциал

Рассмотрим геометрию в координатном пространстве x^0, x^1 с элементом длины

$$ds = \kappa(x)\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2}\,, \qquad dx^0 > 0\,, \quad \kappa(x) > 0\,, \tag{25}$$

где

$$\kappa(x) = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2}\,, \tag{26}$$

причем для функции $S(x)$ имеет место уравнение поля:

$$\frac{\partial\, S}{\partial\,(x^0)^2} \;-\; \frac{\partial\, S}{\partial\,(x^1)^2} \;=\; 0\,. \tag{27}$$

Решение этого уравнения с условием

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 > 0 \tag{28}$$

есть Мировая функция $S_W(x)$.

Аналитические функции

$$F(X) = U(x^0, x^1) + jV(x^0, x^1) \tag{29}$$

гиперболической (двойной) переменной

$$X = x^0 \cdot 1 + x^1 \cdot j\,, \qquad j^2 = 1\,, \tag{30}$$

называемые также гиперболическими потенциалами, в изотропном базисе e_1, e_2:

$$e_1 e_1 = e_1\,, \qquad e_2 e_2 = e_2\,, \qquad e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0\,, \tag{31}$$

$$1 = \frac{e_1 + e_2}{2}\,, \qquad j = \frac{e_1 - e_2}{2}\,, \tag{32}$$

$$e_1 = 1 + j\,, \qquad e_2 = 1 - j \tag{33}$$

– в общем виде могут быть записаны следующим образом:

$$F(X) = f_{(1)}(x^0 + x^1) \cdot e_1 \;+\; f_{(2)}(x^0 - x^1) \cdot e_2\,, \tag{34}$$

где функции $f_{(1)}$, $f_{(2)}$ – произвольные гладкие функции одной действительной переменной. Тогда в базисе 1, j любая аналитическая функция двойной переменной – гиперболический потенциал – имеет вид:

$$F(X) = \left[f_{(1)}(x^0 + x^1) + f_{(2)}(x^0 - x^1)\right] \cdot 1 + \left[f_{(1)}(x^0 + x^1) - f_{(2)}(x^0 - x^1)\right] \cdot j. \tag{35}$$

Каждая компонента этого потенциала удовлетворяет фундаментальному уравнению (27), что следует из условий аналитичности Коши - Римана и может быть проверено непосредственной подстановкой в уравнение, но при этом не всегда выполняется условие (28). Таким образом, общее выражение для действительной части гиперболического потенциала -

$$U(x^0, x^1) = f_{(1)}(x^0 + x^1) + f_{(2)}(x^0 - x^1)\,, \tag{36}$$

а условие (28) запишется так:

$$\dot{f}_{(1)}(x^0+x^1)\,\dot{f}_{(2)}(x^0-x^1)>0\,,\tag{37}$$

где точка означает производную функции одной действительной переменной по этой переменной.

Приведенные выше формулы (более подробно см. [5]) позволяют строить Мировую функцию, используя алгебру двойных чисел.

Будем считать, что функция Θ в формуле (13) для элемента собственного времени произвольной мировой линии из нормальной конгруэнции мировых линий, определяемой потенциалом U, имеет следующий вид:

$$\Theta(dx^0,dx^1)=\sqrt{(dx^0)^2-(dx^1)^2}\,,\tag{38}$$

то есть

$$dT=\frac{1}{c}\sqrt{(dx^0)^2-(dx^1)^2}\,.\tag{39}$$

Следуя работе [2], подставим в эту формулу $T=F\left(S_W(x)\right)$ и учтем, что $S_W(x)\equiv U(x)$, а также

$$dx^0=\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x^0}\ d\tau}{\left(\dfrac{\partial U}{\partial x^0}\right)^2-\left(\dfrac{\partial U}{\partial x^1}\right)^2}\,,\qquad dx^1=\frac{-\dfrac{\partial U}{\partial x^1}\ d\tau}{\left(\dfrac{\partial U}{\partial x^0}\right)^2-\left(\dfrac{\partial U}{\partial x^1}\right)^2}\,,\tag{40}$$

где вдоль мировых линий из нормальной конгруэнции, определяемой U, $d\tau=dU$, получим соотношение

$$\dot{f}_{(1)}(x^0+x^1)\,\dot{f}_{(2)}(x^0-x^1)=\tilde{W}\left(f_{(1)}(x^0+x^1)+f_{(2)}(x^0-x^1)\right)\,,\tag{41}$$

где $\tilde{W}$ – некоторая функция одного действительного аргумента. Удобно перейти к эквивалентному соотношению:

$$\dot{f}_{(1)}(x^0+x^1)\,\dot{f}_{(2)}(x^0-x^1)=W\left(e^{\alpha f_{(1)}(x^0+x^1)+\alpha f_{(2)}(x^0-x^1)}\right)\,,\tag{42}$$

где опять же W – некоторая функция одного действительного аргумента, α – действительное число.

Рассмотрим соотношение (42) как функциональное уравнение относительно неизвестных функций $f_{(1)}$, $f_{(2)}$ и W одной действительной переменной. Следует рассмотреть две возможности: $\mathbf{1})\ \alpha=\mathbf{0}$ и $\mathbf{2})\ \alpha\neq\mathbf{0}$ - учитывая при этом, что x^0+x^1 и x^0-x^1 суть две независимые переменные.

$\mathbf{1})\ \alpha=\mathbf{0}$

В этом случае общее решение уравнения (42) можно записать следующим образом:

$$f_{(1)}=a_1(x^0+x^1)+b_1\,,\qquad f_{(2)}=a_2(x^0-x^1)+b_2\,,\qquad a_1\cdot a_2>0\,.\tag{43}$$

Здесь a_1,a_2,b_1,b_2 – постоянные. Это приводит нас к выражению поля собственных времен нормальной конгруэнции мировых линий, определяемых Мировой функцией U, как функции U:

$$T(x^0,x^1)=\frac{1}{2\,c\,\sqrt{a_1a_2}}\,U(x^0,x^1)+\mathrm{const}\,.\tag{44}$$

2) $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$

В этом случае из уравнения (42) следует система уравнений:

$$\dot{f}_{(1)} = C_1\, e^{\alpha f_{(1)}}\,, \qquad \dot{f}_{(2)} = C_2\, e^{\alpha f_{(2)}}\,, \tag{45}$$

где C_1, C_2 – постоянные, причем $C_1 \cdot C_2 > 0$. Интегрируя их, имеем

$$f_{(1)} = q \ln\left(a_1(x^0 + x^1) + b_1\right)\,, \qquad f_{(2)} = q \ln\left(a_2(x^0 - x^1) + b_2\right)\,. \tag{46}$$

Здесь q, a_1, a_2, b_1, b_2 – постоянные, подчиняющиеся условиям: $q > 0$, $a_1 \cdot a_2 > 0$. Это приводит нас к выражению поля собственных времен нормальной конгруэнции мировых линий, определяемых Мировой функцией U, как функции U:

$$T(x^0, x^1) = \frac{1}{c\sqrt{a_1 a_2}}\, e^{\frac{1}{2q} U(x^0, x^1)} + \mathrm{const}\,. \tag{47}$$

3 Пространство, конформно связанное с пространством Минковского

Рассмотрим финслерову геометрию, конформно связанную с пространством, которое можно назвать пространством Минковского, а именно геометрией, которая определяется метрической функцией

$$L(dx; x) = \kappa(x)\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}, \quad dx > 0, \quad \kappa(x) > 0. \tag{48}$$

Для такой геометрии компоненты обобщенного импульса равны

$$\begin{aligned} p_0 &= \ \ \kappa(x)\, \frac{dx^0}{\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}}\,, \\ p_\mu &= -\kappa(x)\, \frac{dx^\mu}{\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}}\,, \end{aligned} \tag{49}$$

где $\mu = 1, 2, 3$; а тангенциальное уравнение индикатрисы можно записать в виде:

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - \kappa^2(x) = 0\,. \tag{50}$$

Действие как функция координат должно удовлетворять уравнению Клейна - Гордона:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2 = \kappa^2(x)\,, \tag{51}$$

из которого можно получить выражение поля конформного коэффициента через поле $S(x)$:

$$\kappa(x) = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2}\,. \tag{52}$$

Если функция $\kappa(x)$ не задана изначально, то согласно принципу самодостаточности финслеровых геометрий она должна определяться формулой (52), а поле $S(x)$ является решением уравнения Лагранжа - Эйлера - Остроградского с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \mathrm{const} \cdot \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2\right]^2\,. \tag{53}$$

Выпишем это уравнение явно:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial x^0}\left\{\frac{\partial S}{\partial x^0}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2\right]\right\}-\\
-\frac{\partial}{\partial x^1}\left\{\frac{\partial S}{\partial x^1}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2\right]\right\}-\\
-\frac{\partial}{\partial x^2}\left\{\frac{\partial S}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2\right]\right\}-\\
-\frac{\partial}{\partial x^3}\left\{\frac{\partial S}{\partial x^3}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2\right]\right\}=0\,.
\end{gathered} \tag{54}$$

Его решение при условии

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^0}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^1}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial x^3}\right)^2>0 \tag{55}$$

и есть Мировая функция $S_W(x)$.

В предыдущем разделе удалось явно выписать общее решение для Мировой функции и использовать его. Здесь мы такой возможности не имеем.

Будем считать, что функция Θ в формуле (13) для элемента собственного времени произвольной мировой линии из нормальной конгруэнции мировых линий, определяемой Мировой функцией $S_W(x)$, имеет следующий вид:

$$\Theta(dx^0,dx^1)=\sqrt{(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2}\,, \tag{56}$$

то есть

$$dT=\frac{1}{c}\sqrt{(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2}\,. \tag{57}$$

Следуя работе [2], подставим в эту формулу $T=F\left(S_W(x)\right)$ и учтем, что

$$\left.\begin{aligned}
dx^0&=\frac{\dfrac{\partial\,S_W}{\partial\,x^0}\;\;d\tau}{\left(\dfrac{\partial\,S_W}{\partial\,x^0}\right)^2-\left(\dfrac{\partial\,S_W}{\partial\,x^1}\right)^2-\left(\dfrac{\partial\,S_W}{\partial\,x^2}\right)^2-\left(\dfrac{\partial\,S_W}{\partial\,x^3}\right)^2}\,,\\
dx^\mu&=\frac{-\dfrac{\partial\,S_W}{\partial\,x^\mu}\;\;d\tau}{\left(\dfrac{\partial\,S_W}{\partial\,x^0}\right)^2-\left(\dfrac{\partial\,S_W}{\partial\,x^1}\right)^2-\left(\dfrac{\partial\,S_W}{\partial\,x^2}\right)^2-\left(\dfrac{\partial\,S_W}{\partial\,x^3}\right)^2}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Здесь $\mu=1,2,3$, и вдоль мировых линий из нормальной конгруэнции, определяемой $S_W(x)$, $d\tau=dS_W(x)$. В результате получим соотношение (уравнение):

$$\left(\frac{\partial\,cT}{\partial\,x^0}\right)^2-\left(\frac{\partial\,cT}{\partial\,x^1}\right)^2-\left(\frac{\partial\,cT}{\partial\,x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial\,cT}{\partial\,x^3}\right)^2=1\,. \tag{59}$$

Искать его решения можно следующим образом:

$$cT = \sqrt{1 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\; x^0 + a_1\, x^1 + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + C(a_1, a_2, a_3)\,, \tag{60}$$

$$\frac{\partial\, cT}{\partial\, a_\mu} = 0\,, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a_\mu}{\sqrt{1 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\; x^0 + x^\mu + \frac{\partial\, C}{\partial\, a_\mu} = 0\,, \tag{61}$$

где $\mu = 1, 2, 3$, выбирая различные функции $C(a_1, a_2, a_3)$.

Пример решения уравнения (59)

Выберем $C(a_1, a_2, a_3) = -b$, где b – константа, для определенности будем считать $b > 0$. Тогда из (60) и (61) получим

$$T = \frac{1}{c}\left(\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2} - b\right)\,. \tag{62}$$

Это выражение совпадает с выражением (88) работы [2]. Решение уравнения (54), зависящее только от $T(x)$ (62), есть

$$S_W(x) = a \ln\left(\frac{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2}{b^2}\right)\,, \tag{63}$$

где $a > 0$, $b > 0$ – постоянные. Областью определения функции $S_W(x)$ (63) выберем конус будущего:

$$x^0 > 0\,, \qquad (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 > 0\,. \tag{64}$$

В этом случае в области определения функции $S_W(x)$ условие (55) выполняется автоматически. Используя формулу (63), вычислим конформный множитель:

$$\kappa(x) = \frac{2\,a}{\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2}}\,. \tag{65}$$

Таким образом, мы изучаем геометрию с метрической функцией

$$L(dx; x) = \frac{2\,a\,\sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}}{\sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2}}\,. \tag{66}$$

Все это показывает вместе с результатами работы [2], что для нормальной конгруэнции мировых линий, определяемой Мировой функцией (63), правильно в работе [2] элемент собственного времени вдоль мировых линий был выбран как (57).

4 Заключение

В настоящей работе изучались связи между Мировой функцией $S_W(x)$, которая определяет нам нормальную конгруэнцию мировых линий и естественный параметр эволюции – длину мировой линии, и функцией $\Theta(dx; x)$, которая определяет элемент собственного времени вдоль мировой линии нормальной конгруэнции. На примере показано, что при этом можно получить дифференциальное уравнение которому, подчиняется поле собственных времен $T(x)$.

Хотя условие (21) кажется вполне естественным, но оно приводит к довольно сильным ограничениям на функции $S_W(x)$ и F.

Литература

[1] Гарасько Г.И. О Мировой функции и связи между геометриями // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(5), т. 3, 2006, стр. 3 – 18.

[2] Гарасько Г.И. Время как поле синхронизированных собственных времен нормальной конгруэнции мировых линий. gri9z.wordpress.com, (апрель 23, 2014).

[3] Эйнштейн А. Сущность теории относительности. М., ИЛ, 1955.

[4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М., "Наука" , 1988.

[5] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., ТЕТРУ, 2009.

TIME AS A FIELD OF SYNCHRONIZED PROPER TIMES OF NORMAL CONGRUENCE OF WORLD LINES II

G.I. Garas'ko

Electrotechnical Institute of Russia, Moscow, Russia

gri9z@yandex.ru, gri9z.wordpress.com

The paper shows that if one knows a Finsler function $\Phi(p;x)$, and a function $S(x)$, that is an operation as a function of coordinates, determining a normal congruence of world lines, and knows an element of proper times along them, one can draw a differential equation with partial derivatives for a field of proper times $T(x)$ of the normal congruence of world lines. Interrelation of such sort between the abovementioned ideas is of special interest, when hypersurfaces of the level $T(x) = \text{const}$ are the transversal supersurfaces to the normal congruence of the world lines determined by the world function $S_W(x)$.

Key Words: Berwald-Moor, time, congruence of world lines, metric function, world function, normal congruence of world lines, parameter of evolution, Minkowski space, synchronization, space per se, tangential equation of indicatrix, Finsler geometry, Finsler space, Finsler function.