

## К о м м е н т а р и и

### ПОПРАВКА К СТАТЬЕ «ТЕРНАРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ НАД ТРЁХМЕРНЫМИ МАТРИЦАМИ»

А.В. Лапшин

*НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия*

lavexander@mail.ru

Представлена поправка к статье «Тернарное произведение над трёхмерными матрицами» (Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(21), 2014, с. 157–179), которая исправляет формулы, представляющие частные случаи тернарного произведения единичных матриц в алгебре  $\langle \mathcal{M}^{(3,n)}, [P] \rangle$ .

**Ключевые слова:** тернарная операция, тернарное произведение, единичная матрица.

#### Поправка

В разделе 3.1 статьи [1] были представлены частные случаи произведений единичных матриц в алгебре  $\langle \mathcal{M}^{(3,n)}, [P] \rangle$ . Вследствие переобозначений в процессе редактирования были допущены досадные ошибки. А именно, в формуле 3.10 справа для их исправления необходимо циклически поменять  $E^{[i]}, E^{[j]}, E^{[k]} \in \mathcal{M}^{(3,n)}$ , а в формулах 3.11 - 3.13 и в ссылающихся на них формулах 3.21, 3.27 в [1] – поменять местами единичные матрицы  $E^{[j]}, E^{[k]} \in \mathcal{M}^{(3,n)}$ . Тогда указанные формулы станут верными и примут следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(E^{[i]})^{(i,j,k)} : E_{ijk}^{[i]} \rightarrow (E_{ijk}^{[i]})^{(i,j,k)} = E_{i \rightarrow j' j \rightarrow k' k \rightarrow i'}^{[j]} = E_{i'j'k'}^{[j]} \\ \sigma(E^{[k]})^{(i,j,k)} : E_{ijk}^{[k]} \rightarrow (E_{ijk}^{[k]})^{(i,j,k)} = E_{j \rightarrow k' k \rightarrow i' i \rightarrow j'}^{[i]} = E_{i'j'k'}^{[i]} \\ \sigma(E^{[j]})^{(i,j,k)} : E_{ijk}^{[j]} \rightarrow (E_{ijk}^{[j]})^{(i,j,k)} = E_{k \rightarrow i' i \rightarrow j' j \rightarrow k'}^{[k]} = E_{i'j'k'}^{[k]} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Частные случаи произведений единичных матриц с точностью до перенумеровки индексов:

$$\begin{aligned} \underline{E^{[i]} E^{[i]} E^{[i]}} &= E^{[i]} E^{[i]} E^{[k]} = E^{[i]} E^{[j]} E^{[i]} = E^{[j]} E^{[j]} E^{[i]} = E^{[k]} E^{[i]} E^{[k]} = \underline{E^{[i]}}, \\ \underline{E^{[j]} E^{[j]} E^{[j]}} &= E^{[j]} E^{[i]} E^{[i]} = E^{[k]} E^{[j]} E^{[k]} = E^{[j]} E^{[i]} E^{[j]} = E^{[k]} E^{[j]} E^{[j]} = \underline{E^{[j]}}, \\ \underline{E^{[k]} E^{[k]} E^{[k]}} &= E^{[k]} E^{[i]} E^{[i]} = E^{[j]} E^{[j]} E^{[k]} = E^{[k]} E^{[k]} E^{[i]} = E^{[j]} E^{[k]} E^{[k]} = \underline{E^{[k]}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Перемножение трёх единичных матриц:

1. Циклические перестановки единичных матриц:

$$E^{[i]} E^{[j]} E^{[k]} = E^{[i]}, \quad (3.12a)$$

$$E^{[k]} E^{[i]} E^{[j]} = E^{[j]}, \quad (3.12b)$$

$$E^{[j]} E^{[k]} E^{[i]} = E^{[k]}. \quad (3.12c)$$

2. Контрциклические перестановки единичных матриц:

$$E^{[j]}E^{[i]}E^{[k]} = E^{[k]}E^{[j]}E^{[i]} = n \cdot \text{diag}(1 \dots 1) = n \cdot E^{(o,n)} \in \mathcal{D}^{(o,n)}, \quad (3.13a)$$

$$E^{[i]}E^{[k]}E^{[j]} = n \cdot \mathbb{I} = n \cdot \{A_{ijk} \mid a_{ijk} = 1, \forall i, j, k\}. \quad (3.13b)$$

Рассмотрим следующий пример, иллюстрирующий (3.13b). Для этого явно запишем произведение трёх единичных матриц  $E^{[i]}, E^{[k]}, E^{[j]} \in \mathcal{M}^{(3,2)}$  и получим:

$$E^{[i]}E^{[k]}E^{[j]} = \begin{matrix} & \color{red}{0} & \color{red}{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & & 1+1 & & 1+1 & & 1 & 1 \\ \color{red}{1} & \color{red}{0} & 1 & 0 & \color{blue}{1} & \color{blue}{1} & & & 1+1 & & 1+1 & & \color{red}{1} & \color{red}{1} \\ & \color{red}{0} & \color{red}{1} & 0 & 1 & 1 & 1 & & 1+1 & & 1+1 & & 1 & 1 \\ \color{red}{1} & \color{red}{0} & 0 & 1 & 0 & 0 & & & 1+1 & & 1+1 & & 1 & 1 \end{matrix} = 2 \cdot \begin{matrix} & 1 & & & & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & & & & & 1 \end{matrix}$$

Рассмотрение частного случая – тернатора  $P$ -произведений трёх единичных матриц, опирающиеся на результаты с 3.12 по 3.13 на страницах 124–125 примет теперь правильный вид:

$$\begin{aligned} [E^{[i]}E^{[k]}E^{[j]}] &= E^{[i]}E^{[j]}E^{[k]} + E^{[j]}E^{[k]}E^{[i]} + E^{[k]}E^{[i]}E^{[j]} - E^{[k]}E^{[j]}E^{[i]} - \\ &- E^{[j]}E^{[i]}E^{[k]} - E^{[i]}E^{[k]}E^{[j]} = E^{[i]} + E^{[k]} + E^{[j]} - nE^{(o,n)} - nE^{(o,n)} - n\mathbb{I} = \\ &= \left[ A_{ijk} \mid a_{ijk} = \begin{cases} 3(1-n), & \text{if } i=j=k \\ 0, & \text{if } i \neq j \neq k \neq i \end{cases} \right] + \\ &+ \left[ B_{ijk} \mid b_{ijk} = \begin{cases} 1-n, & \text{if } b_{ijk} \in \mathcal{D}^{(s_{cub}(\vec{s}_1, \vec{s}_2), n)} \setminus \mathcal{D}^{(o,n)} \\ 0, & \text{if } b_{ijk} \notin \mathcal{D}^{(s_{cub}(\vec{s}_1, \vec{s}_2), n)} \setminus \mathcal{D}^{(o,n)} \end{cases} \right] + \\ &+ \left[ C_{ijk} \mid c_{ijk} = \begin{cases} -n, & c_{ijk} \in c_{\sigma(\phi\psi\omega)} \\ 0, & c_{ijk} \notin c_{\sigma(\phi\psi\omega)} \end{cases} \right] = D_{ijk} \neq 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Три возможных комбинации произведений пяти единичных матриц, основываясь на результатах с 3.11 по 3.13 на страницах 124–125, примут вид:

$$\begin{aligned} (E^{[i]}E^{[j]}E^{[k]})E^{[k]}E^{[i]} &= E^{[i]}E^{[k]}E^{[i]} = \mathbb{I}, \\ E^{[i]}(E^{[j]}E^{[k]}E^{[k]})E^{[i]} &= E^{[i]}E^{[k]}E^{[i]} = \mathbb{I}, \\ E^{[i]}E^{[j]}(E^{[k]}E^{[k]}E^{[i]}) &= E^{[i]}E^{[j]}E^{[k]} = E^{[i]}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Таким образом, переменная  $E^{[j]}, E^{[k]} \in \mathcal{M}^{(3,n)}$  никак не повлияла на сделанный в пункте 1 статьи [1, стр. 169] вывод о *правоассоциативности* операции  $P$  на расширенном множестве единичных матриц  $(E^{[i,n]}E^{[k,n]}E^{[j,n]}E^{(o,n)}), \mathbb{I}$ .

## Заключение

К счастью, ошибок введения тернарной операции  $P$  нет. Внимательный читатель легко бы смог найти исправленные выше ошибки, подставив и посчитав выписанные выше произведения единичных матриц. Однако, поскольку пока данная тернарная операция ещё не вошла в широкий научный обиход, автор счёл необходимым исправить данные ошибки самостоятельно.

## Литература

- [1] Лапшин А.В. Тернарное произведение над трёхмерными матрицами // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(21), 2014. с. 157-179.

## THE AMENDMENT TO THE PAPER «TERNARY PRODUCT OVER A THREE-DIMENSIONAL MATRICES»

**A.V. Lapshin**

*Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fрязино, Russia*  
lavexander@mail.ru

There is the amendment to the paper «Ternary product over a three-dimensional matrices» (*Hypercomplex numbers in geometry and physics*, 1 (21), 2014. p. 157-179), which corrects equations, representing partial cases of the ternary product of unit matrices in the algebra  $\langle \mathcal{M}^{(3,n)}, [P] \rangle$ .

**Key Words:** ternary operation, ternary product, unit matrix.