# МЕТРИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

**С.В. Сипаров**

*Государственный Университет гражданской авиации, Санкт-Петербург, Россия*
*НИУ информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, Россия*

sergey.siparov@gmail.com

Предлагается геометрический подход, на основании которого можно последовательно построить описание движений физической системы. Показано, то представление о силовых полях, определяющих динамику систем, эквивалентно соответствующей метрике анизотропного пространства, которое используется для моделирования физического мира и происходящих в нем явлений. Рассмотрены примеры из гидродинамики, электродинамики, квантовой механики и теории гравитации. Такой подход позволяет избавиться от ряда парадоксов и может быть использован для дальнейшего развития теории.

**Ключевые слова:** метрическая динамика, теория относительности, гидродинамика, электродинамика, квантовая механика, гравитация.

## Введение

Измеряя движения тела, наблюдатель классифицирует их и может поставить вопрос об их причинах. В качестве такой причины в классической механике вводится понятие силы и постулируется прямая пропорциональность между равнодействующей сил, считающихся аддитивными, и ускорением тела (2-й закон динамики). Это позволяет говорить о векторном поле сил. Прямое измерение сил с помощью динамометра возможно лишь в некоторых (как правило, в статических или стационарных) случаях. В остальных случаях силы и поля, если это необходимо, вычисляются с помощью упомянутого 2-го закона, а измеряется ускорение тела. Для этого необходимо измерить его координаты в каждой точке его движения и параметризовать полученную зависимость. Естественным параметром является действительное число на отрезке числовой оси, изоморфном траектории между начальной и конечной точками движения тела. Однако можно пользоваться и временем – числом периодов стационарного периодического процесса, протекавшего тогда же, когда тело двигалось. Взаимное влияние процедуры измерения траектории, выполняемой непосредственно или удаленно, и движущегося тела должно быть оговорено. Кроме того, должно быть введено соглашение о правиле вычисления расстояния по так или иначе измеренным координатам, т.е. о геометрии, используемой при расчетах. После измерений координат и соответствующих значений параметра и расчета ускорения, для расчета силы дополнительно понадобится соглашение о константе связи между ускорением и силой.

В классической механике приняты следующие допущения:

- ни окружение тела, ни наблюдатель и его инструменты при бесконтактном наблюдении и измерении не воздействуют на тело – именно это позволяет принять основной постулат о существовании инерциальных систем отсчета;
- скорость распространения информации о координатах тела и др. бесконечна;
- геометрия пространства является Евклидовой, и геометрическое пространство, используемое при математическом моделировании явлений, представляет собой прямую сумму трехмерного координатного пространства и одномерного времени;
- коэффициентом пропорциональности между силой и ускорением является инертная масса тела.

Как известно, эти допущения содержат произвол и противоречия:

- в микромире наблюдатель неустранимо влияет на объект, а в мегамире объект неустранимо влияет на наблюдателя, причем в обоих случаях недетерминированным образом, поэтому постулат о существовании инерциальных систем в реальном физическом мире (1-й закон динамики), неправомерен или требует оговорок;
- бесконечная скорость распространения сигнала приводит к логическим парадоксам [1], не позволяющим ввести в теорию структуру причинности;
- выбор геометрии моделирующего пространства, а также его размерности произволен и определяется наблюдателем;
- природа свойства инертности, т.е. его принадлежность самому телу или окружающему миру не может считаться установленной и является философским допущением [2].

В современной науке эти проблемы отчасти преодолены, хотя и не всегда полностью удовлетворительным образом. Так, микромир успешно описывается с помощью квантовой механики, которая, впрочем, содержит такие парадоксы, как корпускулярно-волновой дуализм, редукция волновой функции и др.. В мегамире успехи ОТО неоспоримы, но в последнее время при интерпретации наблюдений с ее помощью возникла проблема темных понятий (темной материи и темной энергии), на долю которых неожиданно пришлось 96% материального содержания Вселенной, а их носителей обнаружить не удается. Если считать, что 1-й закон динамики о существовании инерциальных систем выполняется приближенно, т.е. начиная с некоторого расстояния между объектами, то в теорию должна входить константа с размерностью расстояния.

Отказ от бесконечной скорости распространения сигнала, во-первых, сделал необходимым введение мировой константы, имеющей размерность скорости, во всех соответствующих теориях. А во-вторых, – подтолкнул к возможности выбора неевклидовой геометрии пространства, моделирующего физический мир, в тех случаях, когда это оправдано. В простейшем случае СТО используется 4-х мерная геометрия Минковского, а в ОТО – 4-мерная геометрия Римана. Использование этих геометрий позволило экономно и строго описывать наблюдаемые эффекты, либо не хуже, чем в соответствующих физических теориях (ср. СТО и теорию электрона Лоренца), либо даже лучше (ср. ОТО и теорию гравитации Ньютона). Это указало новую область приложения геометрических идей к физическому миру.

В связи с проблемой инертности в теориях макро- и мегамира используется принцип эквивалентности, поэтому коэффициент, имеющий смысл массы тела, иногда выпадает из уравнений, что лишает понятие силы концептуальной значимости. Кроме того, в микромире имеется прямой эксперимент (так называемый эффект Ааронова-Бома, зарегистрированный в [3]), в котором движение частицы определяется не силами, а потенциалами.

Таким образом, аксиоматическая база классической механики (динамики Ньютона), следствия которой допускают сопоставление с наблюдениями, содержит две отдельные части, которые не связаны между собой: геометрия как способ адекватного описания реального пространства и протекающих в нем процессов и сила как причина ускорения тел.

## 1 Геометризация законов динамики

Обе части, указанные выше, существенно используются в принципе наименьшего действия, занимающем центральное место в физической теории. Уравнения динамики Ньютона, включающие силовые поля, отождествляются с уравнениями Эйлера-Лагранжа, которые содержит функцию Лагранжа и получаются при варьировании функционала действия. А экстремаль функционала действия, как известно [4], совпадает с экстремалью функционала расстояния между двумя точками (геодезической), в пространстве с той геометрией, которая используется для моделирования реального экспериментального пространства.

Сформулируем [5] следующие Предложения:

**Предложение 1.** *Геометрия пространства, моделирующего физическую реальность, выбирается так, что наблюдаемое свободное тело двигается вдоль его геодезической.*

Этим причина движения выводится из рассмотрения, и остается лишь описание наблюдаемых явлений с помощью наиболее адекватного аппарата. Смысл эвристических идей, которые можно использовать для дальнейшего развития теория, станет при этом более определенным.

*Пример 1*: в классической механике (без гравитации), когда действие сил на расстоянии отсутствует, информация распространяется бесконечно быстро, и предположительно можно наблюдать равномерное и прямолинейное движение свободного тела, геодезическая имеет вид

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0. \tag{1.1}$$

Тогда в качестве моделирующего пространства можно выбрать прямую сумму плоского изотропного 3-х мерного пространства с геометрией Евклида и 1-мерного времени.

*Пример 2*: если скорость распространения воздействия конечна, а у свободного тела наблюдается ускорение, то можно наделить моделирующее пространство кривизной и считать его 4-мерным пространством-временем с геометрией Римана, (как это сделано в ОТО). Тогда уравнение геодезической, совпадающее с уравнением движения, имеет вид

$$\frac{dy^i}{ds} + \Gamma^i_{kj} y^k y^j = 0 \tag{1.2}$$

и может быть использовано для отыскания метрического тензора по данным наблюдений.

*Пример 3*: если наблюдаемое ускоренное движение свободного тела к тому же обнаруживает зависимость от некоторого векторного поля, то, помимо кривизны, моделирующее пространство следует наделить еще и анизотропией. При этом возникнет касательное расслоение, а уравнение геодезической усложнится. Эта ситуация будет подробнее рассмотрена ниже.

**Предложение 2.** *Сила, действующая на тело, равна произведению меры его количества вещества (массы) на ускорение, определяемое уравнением геодезической.*

Предложение 2 сформулировано так, что сила является не основным, а вспомогательным понятием в отличие от классического 2-го закона динамики Ньютона. Оно имеет целью сохранить технические результаты известной теории. Релятивистские аспекты понятия (инертной) массы, следующие из построений СТО, сохраняют свой смысл.

**Предложение 3.** *Ускорение первого тела, измеряемое по отношению ко второму, равно по величине и противоположно по направлению ускорению второго тела, измеряемого по отношению к первому.*

Предложение 3 соответствует 3-му закону Ньютона, где говорится о равенстве сил действия и противодействия.

Совокупность этих Предложений предполагает объединение двух частей аксиоматической базы теоретической физики, упомянутых выше, и предлагает, опираясь на наблюдения в реальном мире, более четко отделить способ математического описания наблюдаемых явлений от их физической сущности.

## 2 Геометрия анизотропного пространства

Рассмотрим ситуацию, в которой наблюдаемое ускорение свободного тела зависит не только от координаты, но и от вектора скорости его движения. Если не строить гипотез о причинах ускорения[1], а пытаться лишь описать движение тела, то при выборе геометрии моделирующего пространства кривизны недостаточно, и оно оказывается касательным расслоением.

Пусть $M=\boldsymbol{R}^4$ дифференцируемое 4-мерное многообразие класса $C^\infty$, $TM$ – его касательное расслоение, с координатами $(x,y)=(x^i,y^i)$; $i=0\div 3$. Если $c$ – кривая на $M$, задаваемая $c:[a,b]\to M$, $t\mapsto(x^i(t))$, то ее естественное продолжение на $TM$ есть $\tilde{c}:[a,b]\to TM$, $t\mapsto(x^i(t),y^i(t))$, где $y^i=\dfrac{\partial x^i}{\partial t}$.

Ввиду дальнейших приложений заметим, что если принять $x^0=ct$, где $c=\mathrm{const}$ – константа теории, а параметр $t$ считается временем, то $y^0=c/H=\mathrm{const}$, причем $H$ – новая константа теории, возникающая в связи с необходимостью измерения всех координат в одинаковых единицах и имеющая размерность частоты. Последнее означает, что $y^0$ – некоторая фундаментальная длина.

Длина дуги $s$, которая обычно принимается в качестве естественного параметра, равна $s=\int\limits_0^t\sqrt{g_{ij}y^iy^j}d\tau$, где $g_{ij}$ – метрический тензор, и $\sqrt{g_{ij}y^iy^j}\equiv F$. Пусть метрический тензор зависит и от $y$, введенного выше, т.е. $g_{ij}=g_{ij}(x,y)$. Зависимость метрического тензора от $x$ будет связана с кривизной пространства, а его зависимость от $y$ будет означать анизотропию пространства. Иными словами, для вычисления расстояния между двумя точками необходимо в каждой из них задавать дополнительный вектор. Для того чтобы обеспечить неизменность длины кривой, метрический тензор $g_{ij}$ должен быть 0-однородным по $y$, т.е. $g_{ij}(x,\lambda y)=g_{ij}(x,y)$; $\lambda>0$, т.е. метрика зависит только от направления $y$, но не от его величины. Последнее эквивалентно соотношению $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}y^k=0$; $i,j,k=0\div 3$. (Если же одновременно выполняется и $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}y^j=0$, то метрика превратится в метрику Финслера [6], но здесь этот случай не рассматривается).

Такой метрический тензор соответствует обобщенной геометрии Лагранжа, и является дважды ковариантным симметричным тензором на $TM$ со следующими ограничениями: а) $\det(g_{ij})\neq 0$ для всех $(x,y)$ на $TM$ и б) при замене координат на $TM$, индуцированной заменой координат на $M$, его компоненты преобразуются по тому же правилу, что и компоненты тензора (0, 2)-типа на основном многобразия $M$. Это означает, что $TM$ превращается в восьмимерное Риманово многообразие, что представляет очевидную аналогию с известным в физике шестимерным фазовым пространством. 4-мерное основное многообразие $M$ можно рассматривать как вложенное в восьмимерное касательное расслоение $TM$, и касательные векторы для всех возможных кривых на $M$ образуют 4-мерное векторное пространство, то есть касательное пространство. Касательное расслоение можно рассматривать как изоморфное прямой сумме основного многообразия и касательного пространства. Геометрия такого восьмимерного «фазового пространства-времени» является достаточно сложной и требует некоторых специфических составляющих, (например, таких, как нелинейная связность Эресмана).

[1]Что Ньютон бы не мог не одобрить.

Ограничимся простейшим случаем. Пусть преобразования координат $x^i = \Lambda^i_j x^j$ являются линейными, т.е. $\Lambda^i_j$ – постоянные, а пространство считается слабо искривленным и слабо анизотропным с метрикой $g_{ij} = \eta_{ij} + \varepsilon_{ij}(x,y)$, где $\eta_{ij} = diag\{1,-1,-1,-1\}$ – метрика Минковского на $M$. Кроме того, полагая, что $\varepsilon_{ij}(x,y) = \sigma\zeta_{ij}(x,y)$; $\sigma \ll 1$ – малая (линейно аппроксимируемая) анизотропная деформация, при вычислениях сохраним только члены, пропорциональные $\alpha_1\varepsilon_{ij}, \alpha_2\dfrac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x^k}, \alpha_3\dfrac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial y^k}$ и $\alpha_4\dfrac{\partial^2\varepsilon_{ij}}{\partial x^l\partial y^k}$, где все коэффициенты $\alpha_k = O(1)$, $\sigma\alpha_k \ll 1$, $k = 0 \div 3$. Тогда необходимая геометрия существенно упростится. Введенное определение $y^i$ позволяет поднимать и опускать индексы, соответствующие как «горизонтальным» ($x$-), так и «вертикальным» ($y$-) величинам на касательном расслоении, с помощью одного и того же метрического тензора $g_{ij}(x,y)$, т.е. использовать простейший случай – так называемый лифт Сасаки [7].

## 3 Уравнение движения

В соответствии с Предложением 1 уравнением движения будет уравнение геодезической пространства, выбранного для моделирования физической реальности. Определим геодезические как экстремальные кривые для длины дуги $s = \int\limits_0^t F d\tau$, где $F = \sqrt{(\eta_{ij} + \varepsilon_{ij}(x,y))y^i y^j}$. Вариационная процедура для этого выражения, дающая уравнения Эйлера-Лагранжа в виде $\dfrac{\partial F}{\partial x^k} - \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y^k}\right) = 0$, подробно приведена в [8, 9].

С учетом принятой линейной аппроксимации, уравнение геодезической в рассматриваемом анизотропном пространстве имеет вид

$$\frac{dy^i}{ds} + \left(\Gamma^i_{lk} + \frac{1}{2}\eta^{it}\frac{\partial^2\varepsilon_{kl}}{\partial x^j\partial y^t}y^j\right)y^k y^l = 0 \qquad (3.1)$$

где $\Gamma^i_{jk} = \dfrac{1}{2}\eta^{ih}\left(\dfrac{\partial\varepsilon_{hj}}{\partial x^k} + \dfrac{\partial\varepsilon_{hk}}{\partial x^j} - \dfrac{\partial\varepsilon_{jk}}{\partial x^h}\right)$ – коэффициенты связности. В данном случае они представляют собой обычные символы Кристоффеля, которые содержат в себе зависимость от $y$. В отличие от уравнения геодезической (1.2) в пространстве Римана, полученное уравнение (3.1) показывает, что в анизотропном пространстве использование преобразования координат такого, что все $\Gamma^i_{lk}$ обращаются в ноль, не делает систему локально-инерциальной, что устраняет противоречие, связанное с существованием инерциальных систем отсчета.

Перечислим допущения, которые будут использоваться:

1. согласно условию предыдущего раздела, в метрике удерживаются только линейные члены, пропорциональные $\alpha_1\varepsilon_{ij}$, $\alpha_2\dfrac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x^k}$, $\alpha_3\dfrac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial y^k}$ и $\alpha_4\dfrac{\partial^2\varepsilon_{ij}}{\partial x^l\partial y^k}$, где $\alpha_n = O(1)$; $i,j,l,k = 0 \div 3$; $n = 1 \div 4$;
2. компонентами $y^1, y^2, y^3$ можно пренебречь по сравнению с $y^0$;
3. производной по времени в уравнениях геодезической можно пренебречь по сравнению с производными по координатам.
4. в $y$-подпространстве производной по $y^0$ можно пренебречь по сравнению с производными по $y^1$-, $y^2$- и $y^3$.

В результате уравнение (3.1) примет вид [9, 10]

$$\frac{dy^i}{ds} + \Gamma^i_{00} + \frac{1}{2}\eta^{ik}\frac{\partial^2\varepsilon_{00}}{\partial x^j\partial y^k}y^j = 0. \qquad (3.2)$$

Таким образом, оказывается, что единственной компонентой метрического тензора, которая остается в уравнениях для рассматриваемого случая малой кривизны и малой анизотропии, является $\varepsilon_{00}$. Пространственное 3D-сечение уравнения (3.2) имеет вид

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{c^2}{2}\left\{-\nabla\varepsilon_{00} + \nabla\left(\vec{v}, \frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\vec{v}}\right) + \left[\vec{v}, \mathrm{rot}\frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\vec{v}}\right]\right\} \tag{3.3}$$

и дает связь ускорения и скорости тела с метрическим тензором рассматриваемого анизотропного пространства.

Если $\varepsilon_{00} \neq \varepsilon_{00}(y)$, то $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{c^2}{2}\nabla\varepsilon_{00}$, и полученное выражение приводит к известному геометрическому формализму ОТО для гравитации, который в пределе переходит в формализм классической механики. Если же $\varepsilon_{00} \neq \varepsilon_{00}(x)$, и $\frac{c^2}{2}\mathrm{rot}\frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\vec{v}} \equiv \vec{\Omega}$, то движение свободной частицы будет происходить по винтовой линии, ось которой направлена вдоль вектора $\vec{\Omega}$. Если и $\nabla\left(\vec{v}, \frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\vec{v}}\right) = 0$, то радиус $R$ и шаг $b$ такой винтовой линии равны $R = \frac{v\sin(\vec{v},\vec{\Omega})}{|\vec{\Omega}|}$ и $b = 2\pi\frac{v\cos(\vec{v},\vec{\Omega})}{|\vec{\Omega}|}$, а период $\tau$ равен $\tau = 2\pi|\vec{\Omega}|^{-1}$. При этом если $\vec{v}$ изначально лежит в плоскости, перпендикулярной $\vec{\Omega}$, то $b = 0$, свободное движение является финитным, и частица остается в плоскости, двигаясь по окружности радиуса $R$. Если же скорость $\vec{v}$ изначально коллинеарна $\vec{\Omega}$, то $\vec{v}$ остается постоянной. Винтовая линия представляет собой базовый вид траектории свободного движения частицы в рассматриваемом анизотропном пространстве.

При усложнении вида компоненты $\varepsilon_{00}$ метрического тензора ось винтовой линии перестанет быть прямой. Если метрика такова, что эта ось сама является замкнутой окружностью с радиусом $R_M$, большим радиуса винтовой линии $R$, то свободное движение будет происходить по поверхности тора. При

$$n_1 2\pi R_M = n_2 b, \tag{3.4}$$

где $n_1$ и $n_2$ – целые числа, траектория на поверхности тора станет замкнутой, в этом случае $\tan(\vec{v},\vec{\Omega})$ есть рациональное число. Таким образом, в метрической динамике получается, что характерный линейный размер области, на поверхности которой расположена траектория свободной частицы при ее финитном движении, не может быть сделан меньшим $2R$. При интерпретации это может привести к представлению об атоме.

## 4 Уравнение поля

В классической физике принято говорить о материальных носителях воздействия на движущееся тело и связывать их с соответствующими (силовыми, физическими) полями, которые могут быть измерены. Однако, как уже было указано, прямые измерения сил можно выполнить только в некоторых (статических или стационарных) случаях, как правило, силы вычисляют, используя классический закон динамики. В геометродинамике (т.е. в ОТО) роль "воздействия" отводится геометрическим свойствам моделирующего пространства, в котором движется тело. В то же время при выводе уравнений поля с помощью вариационного принципа используется понятие лагранжиана, выбор которого является своего рода искусством и неявно связан с классической динамикой сил и соответствующих понятий. При геометризации динамики, которая обсуждается в данной статье и основана на использовании наблюдаемых движений, естественно сохранить геометрический подход, но к физической интерпретации получаемых соотношений переходить лишь на последнем этапе в зависимости от класса рассматриваемых задач.

В анизотропном пространстве каждая его точка снабжена вектором. Отметим некоторые математические обстоятельства, связанные с наличием произвольного векторного поля. Рассмотрим произвольный ковариантный вектор с компонентами $B_k=(B_0,\vec{B})$, $\vec{B}=(B_1,B_2,B_3)$ и построим антисимметричный ковариантный тензор $F_{ik}=B_{k,i}-B_{i,k}$, где $B_{k,i}=\dfrac{\partial B_k}{\partial x^i}$. Тогда выражение

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k}+\frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j}=0 \tag{4.1}$$

представляет собой геометрическое тождество, иногда называемое тождеством Максвелла, справедливое для любой геометрии.

Расписывая это тождество в компонентах [9, 10], можно ввести формальные обозначения для пары новых векторов, построенных из компонент тензора $F_{ik}$

$$\vec{F}^{(*)}=(F_{12},F_{31},F_{10});\qquad \vec{F}^{(**)}=(-F_{30},F_{20},-F_{23}). \tag{4.2}$$

Тогда получим пару однородных уравнений

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\vec{F}^{(**)}}{\partial t}+rot\vec{F}^{(*)}=0\\ &div\vec{F}^{(**)}=0,\end{aligned} \tag{4.3}$$

где $t\equiv x^0$. В этих уравнениях вид геометрии пространства никак не проявляется.

Произвольно выберем и зафиксируем геометрию пространства: пусть ей соответствует метрический тензор $g^{ik}$, позволяющий переходить от ковариантных компонент тензора $F_{ik}$ к его контравариантным компонентам $F^{ik}$ по формуле $F^{ij}=g^{ik}g^{jm}F_{mk}$. Введем новые дополнительные обозначения, а именно – контравариантный 4-вектор $I^i=(I^0,\underset{\to}{j})$, $\underset{\to}{j}=(I^1,I^2,I^3)$ так, что $I^i=\dfrac{\partial F^{ij}}{\partial x^j}$. Используя обозначения

$$I^0\equiv\rho;\quad I^1\equiv j_x;\quad I^2\equiv j_y;\quad I^3\equiv j_z, \tag{4.4}$$

получим вторую пару теперь уже неоднородных уравнений

$$\begin{aligned}&\mathrm{rot}\vec{F}^{(**)}-\frac{\partial\vec{F}^{(*)}}{\partial t}=\underset{\to}{j}\\ &\mathrm{div}\vec{F}^{(*)}=\rho.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Не выходя за пределы математического формализма, будем называть $\rho$ – плотностью распределения источников, а $\underset{\to}{j}$ – плотностью тока. Для описания этих величин, входящих в уравнения (4.3, 4.5), можно формально применять соответствующие интегральные теоремы. Это приведет к выражению, известному как уравнение непрерывности

$$\mathrm{div}\,\underset{\to}{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{4.6}$$

Соотношения (4.3, 4.5, 4.6) выполняются всегда, поскольку являются следствиями математического тождества (4.1).

Если вектора $\vec{F}^{(*)}$ и $\vec{F}^{(**)}$, составленные из компонент тензора $F_{ik}=B_{k,i}-B_{i,k}$, не зависят от $t$, то из уравнений (4.3, 4.5) следует, что $\vec{F}^{(*)}=-\nabla\varphi$, где $\varphi$ – некоторая скалярная функция (*скалярный потенциал*) такая, что она удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi=-\rho, \tag{4.7}$$

а в отсутствие источников ($\rho = 0$) – уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \tag{4.8}$$

Для точечного источника $\rho = q\delta(r)$ введенный скалярный потенциал удовлетворяет выражению

$$\varphi \sim \frac{q}{r}. \tag{4.9}$$

Уравнение (4.7) линейно, поэтому для распределенных источников принцип суперпозиции дает

$$\vec{F}^{(*)} = -\nabla\left(\int \frac{\rho(r)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}dV\right) \tag{4.10}$$

Если распределение источников является однородным и имеет сферическую симметрию, то при ограниченном распределении выражение (4.10) для внешней задачи приводит к формуле (4.9), где $q = \int\limits_V \rho dV$, а для внутренней задачи – к зависимости

$$\varphi \sim q_1 r^2, \tag{4.11}$$

где $q_1 = \int\limits_{V_1} \rho dV$, $V_1$ – объем сферы радиуса $r$.

Для вектора $\vec{F}^{(**)}$ получается, что его можно представить в виде $\vec{F}^{(**)} = \mathrm{rot}\vec{U}$, где $\vec{U}$ – еще один новый вектор – так называемый (3-мерный) *векторный потенциал*, удовлетворяющий уравнению

$$\Delta\vec{U} = -\vec{j}, \tag{4.12}$$

и соответственно

$$\vec{F}^{(**)} = \mathrm{rot}\left(\int \frac{\vec{j}(r)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}dV\right) \tag{4.13}$$

4-вектор $(\varphi, \vec{U}) \equiv D_k$ характеризует геометрические свойства анизотропного пространства, в каждой точке которого задан вектор $B_k = g_{ik}B^i$. Если в качестве вектора $B^i$ выбрать 4-скорость пробного тела $y^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial t}$, то все приведенные рассуждения остаются справедливыми.

Если источники и токи отсутствуют, т.е. $\rho = 0$; $\vec{j} = 0$, то система уравнений (4.5) имеет отличные от нуля решения, которые удовлетворяют уравнению

$$g^{ki}\frac{\partial^2 D^i}{\partial x^k \partial x^l} = 0, \tag{4.14}$$

Для метрики Минковского

$$g_{ik} \equiv \eta_{ik} = diag\{-1, 1, 1, 1\} \tag{4.15}$$

уравнение (4.14) представляет собой *волновое уравнение*, записанное в четырехмерном виде. Для других геометрий получаемые выражения также могут представлять интерес. В частности, для случая, рассматриваемого в данной статье, $g_{ik} = \eta_{ik} + \varepsilon_{ik}(x, y)$, и волновое уравнение станет неоднородным, причем поправка будет линейной по $\varepsilon$, т.е. должна удерживаться в рассмотрении. Однако если $D^i$ также пропорционально $\varepsilon$,то тогда поправкой можно пренебречь, и уравнение (4.14) останется обычным волновым уравнением.

Содержательность и простота полученных формальных выражений делает их привлекательными для использования при интерпретации наблюдаемых физических явлений. В частности, волновые движения в природе хорошо известны и, таким образом, могут быть адекватно описаны в терминах рассмотренных потенциалов. Наблюдаются также и взаимодействия, измерение которых для определенных масштабов и систем источников приводит к зависимостям соответствующих физических полей, пропорциональным $\sim 1/r^2$ и $\sim r$. Эти физические поля могут быть определены через введенные потенциалы с помощью обычных операций и соответствующих обозначений.

Таким образом, рассуждения, связанные с геометрическим тождеством, приводят к следующим заключениям:

1. независимо от того, с чем связано произвольное векторное поле, используемое при моделировании физического явления в реальном пространстве, (с физической причиной или способом математического описания), оно эквивалентно существованию "кулоновского потенциала" и волновых процессов, определяющих движение пробного тела;

2. геометрия, выбранная для описания ситуации, никак не сказывается на скалярном потенциале и всегда дает "закон Кулона", но учитывается при описании волновых процессов;

   Заметим, что это также означает, что при экспериментальных измерениях следует обращать внимание и на установление геометрического характера (ранга тензора) объектов, участвующих в рассмотрении. В частности, если измерять "физическое поле" и считать его векторным, а его источник – сингулярным, то оно будет неизбежно связано с законом обратных квадратов в силу тождества (4.1). Если же его источники непрерывно распределены в конечной области с достаточно гладкой границей, то вне области все останется по-прежнему (в ОТО такая ситуация называется "островной моделью"), а внутри – поле будет линейно зависеть от расстояния до фиксированной точки, поле в которой полагается заданным (см. подробнее в [9]).

   Кроме того:

3. в качестве векторного поля можно использовать поле скорости пробного тела;

4. если векторное поле образовано с использованием метрического тензора, то соответствующий вклад в метрику имеет волновой характер.

Известные уравнения *гравитационного* поля, полученные Гильбертом и Эйнштейном с помощью вариационного принципа, содержат *тензор* энергии-импульса. При их выводе используется другое геометрическое тождество, а именно интегральная теорема о дивергенции [12]. Это обстоятельство служит связью между базовыми аксиомами, упомянутыми во Введении. Однако ясно, что в рамках трех сделанных выше Предложений вторая из аксиом (о причинах ускорений, а точнее – о способе их описания) не является независимой от первой, поэтому объект вариационной процедуры следует изменить.

## 5 Несколько замечаний о каноническом формализме

При исследовании причин движения физических систем в метрической динамике принцип наименьшего действия используем в следующем виде: *для любой физической системы существует такая геометрия моделирующего пространства, что имеется интеграл, называемый действием, достигающий минимума для действительного движения системы.* Следует отметить, что при геометрическом подходе смысл ряда понятий канонического формализма и их свойства меняются, однако их выписывание остается содержательным.

Поскольку уравнения движения уже имеются, выполним обратное построение и найдем структурные элементы, характерные для традиционного вариационного подхода. Функционал (действия) представляет собой интеграл от функции Лагранжа $L$, которая в классической механике представляет собой разность кинетической и потенциальной энергий $T$

и $U$. Обозначим $\left[\vec{v}, \mathrm{rot}\dfrac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\vec{v}}\right] \equiv \nabla\varphi_{(a)}$ и будем называть анизотропным потенциалом $\Phi_{(a)}$ величину, определяемую по формуле

$$\Phi_{(a)} = \frac{c^2}{2}\left\{\varepsilon_{00} - (\vec{v}, \frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\vec{v}}) - \phi_{(a)}\right\}. \tag{5.1}$$

Тогда движение свободного тела в слабо искривленном и слабо анизотропном пространстве происходит в соответствии с уравнением

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla\Phi_{(a)} \tag{5.2}$$

Поскольку уравнение геодезической (3.1), (3.2) или (3.3) является теперь уравнением движения, его можно считать уравнением Эйлера-Лагранжа $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\vec{v}} = \dfrac{\partial L}{\partial\vec{r}}$. Назовем тогда кинетической и потенциальной энергиями $T$ и $U$ выражения, которые имеют вид

$$T = \frac{mv^2}{2}\left\{\sin^2\left(\vec{v}, \vec{\Omega}\right) + \cos^2\left(\vec{v}, \vec{\Omega}\right)\right\} \tag{5.3}$$

$$U = \frac{mc^2}{2}\left\{\varepsilon_{00} - \left(\vec{v}, \frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\vec{v}}\right) - \varphi_{(a)}\right\}, \tag{5.4}$$

где $\dfrac{c^2}{2}\mathrm{rot}\dfrac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\vec{v}} \equiv \vec{\Omega}$. При $\varepsilon \neq \varepsilon(y)$ выражение (5.3) переходит в обычное соотношение для кинетической энергии, а выражение (5.4) может быть соотнесено с потенциальной энергией в ОТО. При этом в соответствии с Предложением 2, формальное выражение для силы $\vec{F}_{(a)}$, получаемое умножением уравнения (3.3) с обеих сторон на массу пробного тела $m$, будет иметь привычный вид $\vec{F}_{(a)} = -\, m\nabla\Phi_{(a)}$.

В метрической динамике будем называть замкнутой такую систему, для которой изменение числа ее частей не требует изменения геометрии, применяемой для описания ее движения. Функция Лагранжа $L = T - U$ такой системы обладает аддитивностью, т.е. равна сумме функций Лагранжа частей системы. Учет возможного *взаимодействия частей*, (в частности, принадлежащих внешнему миру), рассматриваемый в классической механике, происходит здесь за счет изменения геометрии и сопровождается изменениями как в выражении (5.3), так и в выражении (5.4). Закон сохранения полной энергии замкнутой системы выполняется, поскольку параметр на отрезке, изоморфном траектории тела от начальной до конечной точки движения, распределен однородно. Полный импульс замкнутой системы, состоящей из $N$ тел,

$$\vec{P} = \sum_n \frac{\partial L}{\partial\vec{v}_n}; \quad n = 1, 2 \ldots N \tag{5.5}$$

приобретает дополнительный геометрический смысл и также сохраняется, хотя определяется более сложным выражением, чем обычно, и при нулевых значениях скоростей может содержать ненулевые вклады.

Заметим, что в случае анизотропного пространства, фундаментальное механическое движение происходит по винтовой линии, поэтому нет необходимости говорить об *аналогии* между механикой и волновой (геометрической) оптикой. Это означает, что принцип Ферма о минимальности изменения фазы между начальной и конечной точками применим непосредственно к описанию движения пробного тела. Первое слагаемое в (5.3) связано с "поступательным" движением частицы вдоль оси $\vec{\Omega}$, а второе слагаемое – с "вращательным" движением вокруг этой оси. Если $\vec{\Omega}\neq 0$, то кинетическая энергия при $b=0$ не обращается в ноль. Энергия в этом случае может быть интерпретирована как энергия “покоя”[2]. При этом для произвольной частицы произведение $\vec{p}=mR\vec{\Omega}$ может рассматриваться как ее “импульс покоя”. При движении по винтовой линии можно условно говорить о действии квазилоренцевой *силы*, не совершающей *работы*. По этой причине в рассмотрении возникает новое каноническое понятие, связанное с периодом винтовой линии и являющееся ориентированным объемом. В классической теории оно имеет отношение к переменным действие-угол и к адиабатическому инварианту [13].

Уравнения (4.3) и (4.5), полученные в предыдущем разделе из геометрического тождества, также можно рассматривать в качестве уравнений движения, но для других обобщенных координат. Они могут быть получены варьированием некоторого лагранжиана, но уже по другим переменным. В частности, если обозначить

$$T_f=\int\left(\left(\vec{F}^{(*)}\right)^2-\left(\vec{F}^{(**)}\right)^2\right)dV \tag{5.6}$$

и назвать энергией уже это (геометрическое) выражение, то после его варьирования получатся уравнения (4.3) и (4.5). Таким образом, использование анизотропного пространства для моделирования реального физического пространства вкупе с протекающими явлениями оставляет в силе формальные математические процедуры, связанные с каноническими уравнениями, но наделяет используемые понятия несколько иным смыслом (см. также [14]).

## 6 Гидродинамика и электродинамика

Используем обозначения, которые можно встретить в гидродинамике. Введем $u_i\equiv\dfrac{c^2}{2}\dfrac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial y^i}$, где $c$ – фундаментальный параметр с размерностью скорости, и обозначим $\Omega_i\equiv\dfrac{1}{2}\mathrm{rot}u_i$ и $\varphi=\dfrac{c^2}{2}\varepsilon_{00}-(\vec{v},\vec{u})$. Связь этих обозначений с использованными выше символами $\vec{B}$, $\vec{F}^{(*)}$, $\vec{F}^{(**)}$ очевидна. Тогда уравнение (3.3) после перегруппировки и умножения и деления правой части уравнения на постоянную величину $\rho$ принимает вид

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)\,\vec{u}+2\left[\vec{\Omega},\vec{v}\right]=-\frac{1}{\rho}\nabla\left\{\frac{\rho c^2}{2}\varepsilon_{00}-(\vec{v},\vec{u})\rho\right\} \tag{6.1}$$

Будем считать вектор $\vec{u}$, характеризующий анизотропию моделирующего пространства, скоростью потока несжимаемой жидкости. Величину $\rho$ будем считать постоянной плотностью жидкости в окрестности рассматриваемого пробного тела (“жидкой частицы”), $\rho=\mathrm{const}$. Тогда, считая градиент двух слагаемых в правой части эффективным давлением, получим уравнение Эйлера для (достаточно большой) области жидкости, вращающейся как целое с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Смысл уравнения (4.6) также очевиден.

При необходимости можно повторить выкладки для компонент $F_{ik}$ и получить для гидродинамики выражения, аналогичные (4.3, 4.5), для случая, когда $\vec{u}$ считается скоростью потока несжимаемой жидкости. Соответственно, уравнения (6.1) имеют как потенциальные, так и волновые решения. Действительно, полагая скорость жидкой частицы равной скорости ее окружения $\vec{v}\cong\vec{u}$, будем искать решение (6.1) в виде

$$\vec{v}=\vec{V}e^{i((\vec{k},\vec{r})-\omega t)}. \tag{6.2}$$

[2] А в молекулярно-кинетической теории соответствовать абсолютному нулю температуры.

Амплитуду $\vec{V}$ будем считать малой настолько, что можно пренебречь слагаемым $(\vec{v},\nabla)\vec{u}\to 0$. Тогда

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+2\left[\vec{\Omega},\vec{v}\right]=-\nabla\varphi \tag{6.3}$$

Выберем локальную ось $Oz$ параллельной вектору $\vec{\Omega}$, и применим оператор rot к обеим частям (6.3), учитывая, что $\mathrm{rot}\left[\vec{\Omega},\vec{v}\right]=\vec{\Omega}\,\mathrm{div}\vec{v}-\left(\vec{\Omega},\nabla\right)\vec{v}=-\left(\vec{\Omega},\nabla\right)\vec{v}$. Получим [15]

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{v}=2\Omega\frac{\partial\vec{v}}{\partial z} \tag{6.4}$$

Уравнение дисперсии имеет вид

$$\omega=2\Omega\frac{k_z}{k}=2\Omega\cos\theta;\quad \theta=(\vec{k}\wedge\vec{\Omega}), \tag{6.5}$$

а скорость волны определяется выражением

$$\begin{aligned}&\vec{U}=\frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}}=\frac{2\Omega}{k}\left\{\vec{\nu}-\vec{n}(\vec{n},\vec{\nu})\right\};\quad \vec{\nu}=\frac{\vec{\Omega}}{\Omega};\quad \vec{n}=\frac{\vec{k}}{k}\\ &U=\frac{2\Omega}{k}\sin\theta\end{aligned} \tag{6.6}$$

В такой волне вектор скорости жидкой частицы $\vec{v}$ сохраняет свою величину и меняется только по направлению. В классической гидродинамике такие волны порождаются "силой Кориолиса" и называются инерционными волнами, при этом никакой зависимости от такой силовой характеристики, как давление, они не имеют. Однако в геометрической теории, которой принадлежит как исходное уравнение геодезической, так и тождество Максвелла, нет сил Кориолиса, но есть лишь метрический тензор, описывающий анизотропное пространство, в котором происходит движение тел. В этом пространстве нулевая компонента метрики представляет собой волну в соответствии с определением $\vec{v}\cong\vec{u}$, т.е. $\varepsilon_{00}=\dfrac{2V^2}{c^2}e^{2i((\vec{k},\vec{r})\,-\,\omega t)}$.

Обозначим теперь $\vec{F}^{(*)}\equiv\vec{E}$, $\vec{F}^{(**)}\equiv\vec{H}$ и будем интерпретировать их как напряженности электрического и магнитного полей. Тогда уравнения (4.3, 4.5) оказываются привычными уравнениями Максвелла, а соответствующие напряженности определяются формулами (4.10, 4.13). Используя обозначения

$$\frac{c^2}{2}\varepsilon_{00}\equiv\varphi,\quad \frac{c^2}{2}\frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\vec{v}}\equiv\frac{1}{c}\vec{A}, \tag{6.7}$$

получим уравнение движения пробного тела в виде

$$\frac{d}{dt}\vec{v}=\left\{-\nabla\phi+\frac{1}{c}[\vec{v},rot\vec{A}]+\frac{1}{c}(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}\right\} \tag{6.8}$$

Здесь величины $\varphi$ и $\vec{A}$ – представляют собой так называемые скалярный и векторный потенциалы *электромагнитного поля.* Смысл уравнения неразрывности (4.6) очевиден. Как известно из электродинамики (и указывалось выше), в частном случае $\varphi\neq\varphi(r)$; $\mathrm{rot}\vec{A}=\mathrm{const}$ движение заряженной частицы происходит по винтовой линии, ось которой направлена вдоль вектора $\mathrm{rot}\vec{A}$. А электромагнитные волны представляют собой классический результат теоретической физики, предсказанный Максвеллом на основе рассмотрения уравнений (4.3) и (4.5) и соответствующей интерпретации. В частности,

$\vec{A}=\mathrm{Re}\left\{\vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right\}$, где $\vec{k}=\dfrac{\omega}{c}\vec{n}$ – волновой вектор, $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении распространения волны. При этом

$$\vec{E}=ik\vec{A} \tag{6.9}$$

– напряженность “электрического поля”, а

$$\vec{H}=i[\vec{k},\vec{A}] \tag{6.10}$$

– напряженность “магнитного поля”. Отметим, что вектор электрического поля вращается в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны. Движение заряда в поле волны с круговой поляризацией происходит по окружности в той же плоскости.

Таким образом, в случае гидродинамики и электродинамики рассматриваемый подход представляет собой просто другой язык для моделирования известных наблюдений, приводящий практически к тем же результатам, что и прежний. Можно сказать, что вместо понятия физического поля теперь используется понятие метрического поля, которому физический смысл может быть *назначен при интерпретации*, но который не является изначально “присущим”.

## 7 Квантовая механика

Характерным объектом микромира, свойства которого можно изучать весьма разнообразными способами, является атом. Как следует из экспериментов, он представляет собой составную динамическую систему (планетарная модель), непосредственное измерение параметров которой затруднено, и, значит, атом также может быть описан в терминах метрической динамики.

С этой целью используем уравнение геодезической (3.3) и условие замкнутости траектории (3.4). Замкнутые траектории являются устойчивыми. Для упрощения будем считать траекторию окружностью с радиусом $R$, а число оборотов $n_1=1$. Тогда получим:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=-\frac{c^2}{2}\nabla\varepsilon_{00}+\nabla\left(\vec{v},\frac{c^2}{2}\frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\vec{v}}\right)+\left[\vec{v},\vec{\Omega}\right] \tag{7.1}$$

$$2\pi R=nb \tag{7.2}$$

где $b$ – шаг винтовой траектории, $\vec{\Omega}\equiv\dfrac{c^2}{2}\mathrm{rot}\dfrac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\vec{v}}$, $n$ – целое положительное число. Таким образом, основой квантования является уравнение (7.2), имеющее математическую природу.

При решении уравнения (7.1) будем искать $\vec{v}$ в виде

$$\vec{v}=\vec{V}\exp i\left\{\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right\}, \tag{7.3}$$

а поправку $\varepsilon_{00}$ к компоненте метрического тензора в виде

$$\varepsilon_{00}=\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}=\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\exp 2i\left\{\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right\}, \tag{7.4}$$

в обоих случаях имея в виду действительные части. Тогда $\nabla\varepsilon_{00}=2i\vec{k}\varepsilon_{00}$, $\nabla\left(\vec{v},\dfrac{c^2}{2}\dfrac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\vec{v}}\right)=c^2 2i\vec{k}\varepsilon_{00}$, $\vec{\Omega}=\dfrac{i}{2}\left[\vec{V},\vec{k}\right]\exp\left\{i\left\{\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right\}\right\}$, и уравнение (7.1) дает

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=ic^2\left\{\vec{w}+\left[\vec{w},\left[\vec{w},\vec{k}\right]\right]\right\}\varepsilon_{00} \tag{7.5}$$

где $\vec{w}=\dfrac{\vec{V}}{V}$, а дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega\vec{w} = -\frac{1}{2}V\left\{\vec{k}+\left[\vec{w},\left[\vec{w},\vec{k}\right]\right]\right\}\exp i\left\{\left(\vec{k},\vec{r}\right)-\omega t\right\}. \tag{7.6}$$

Очевидная связь характеристик волны и винтовой линии дает $b=\dfrac{2\pi}{k}$, поэтому из уравнения (7.2) найдем оценку для размера атома

$$R=\frac{n}{k}, \tag{7.7}$$

и из (7.3, 7.4) следует, что в рассматриваемом случае справедливы оценки

$$v = V\cos n \tag{7.8}$$

$$\varepsilon_{00}=\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\cos^2 n. \tag{7.9}$$

Будем, как и раньше, считать, что при переходе атома из состояния в состояние, характеризуемые разными числами $n$, изменяется его энергия. Теперь она вычисляется с помощью формул (5.3, 5.4). Подставим в них результаты, полученные в этом разделе

$$T=\frac{mv^2}{2}\left\{\sin^2(\vec{v},\vec{\Omega})+\cos^2(\vec{v},\vec{\Omega})\right\}=\frac{mV^2}{2}\cos^2 n \tag{7.10}$$

$$U=\frac{mc^2}{2}\left\{\varepsilon_{00}-\left(\vec{v},\frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\vec{v}}\right)-\varphi_{(a)}\right\}=\frac{mc^2}{2}(\varepsilon_{00}-2\varepsilon_{00}+\varepsilon_{00})=0 \tag{7.11}$$

Оказывается, что в рассматриваемом случае движение по различным замкнутым траекториям определяется одним и тем же (нулевым) значением “потенциальной энергии”. Это обстоятельство, возникающее в метрической динамике, является математическим отражением “физического” постулата Бора о существовании стационарных орбит, т.е. об устойчивости такой динамической системы, как атом, причем в нескольких возможных состояниях. Таким образом

$$|E_n-E_m|=\frac{mV^2}{2}|\cos^2 n-\cos^2 m| \tag{7.12}$$

Если при дальнейшей интерпретации предположить, что при переходе из состояния в состояние разность энергий излучается из системы в виде кванта, то из соотношения (7.12) следует, что спектр такого излучения должен быть практически непрерывным, поскольку разность квадратов косинусов целых чисел может быть практически любой (меньшей единицы) при соответствующем выборе целых чисел. Это согласуется с известным фактом, что ксеноновые и другие источники света на основе инертных газов дают практически непрерывный спектр излучения.

Поскольку в метрической динамике гипотеза Планка о квантах является естественной, и энергия кванта равна $\mathrm{E}=h\nu$, используем величину $h$, полученную из опытов с излучением, для оценки скорости финитного движения частицы, считая $\mathrm{E}=|E_n-E_m|$. Для видимого света $\nu\sim10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$ и массы электрона $m_e\sim10^{-30}$ kg, измеренных независимо, получим $V\sim10^6$ m/s. Тогда из соотношений (7.6, 7.7) следует оценка размера атома $R\sim\dfrac{1}{k}\sim\dfrac{V}{\nu}\sim10^{-10}$ m, совпадающая с известной.

Различие в результатах с теорией атома водорода, предложенной Бором на основе анализа спектров, состоит в том, что атом водорода описывался в рамках задачи двух тел с кулоновским потенциалом взаимодействия. Однако для более сложных систем задача многих тел (с кулоновским потенциалом) не имеет решения. Поэтому использовать прежний подход для описания переходов в атомах инертных газов[3], происходящих внутри “элек-

[3]И в других сложных атомах.

тронной оболочки", содержащей несколько тел, невозможно. Это – одна из причин, по которым дальнейшее развитие квантовой механики пошло по пути отказа от наглядных представлений.

Как известно, уравнение Шрёдингера не выводится, а постулируется с помощью аналогии с классической оптикой, на основе обобщения экспериментальных данных, интерпретируемых как проявления иногда корпускулярных, а иногда волновых свойств микрочастиц. Это позволило до определенной степени придать физический смысл формальной аналогии между теорией Якоби, позволявшей вычислять классическое действие для частицы по формуле

$$S = Et - mv\left(\alpha x + \beta y + \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}z\right), \tag{7.13}$$

и волновой теорией, позволявшей вычислять фазу волны по формуле

$$\varphi = \nu t - \frac{1}{\lambda}\left(\alpha x + \beta y + \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}z\right), \tag{7.14}$$

Связав движение частицы, имеющей энергию, $E$ с распространением волны, имеющей частоту $\nu$, с помощью постоянной Планка $h$, а классический импульс частицы – с соответствующей ей длиной волны формулой, введенной де Бройлем,

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \tag{7.15}$$

Шредингер использовал выражение

$$\psi = a\exp(i\frac{2\pi}{h}S), \tag{7.16}$$

известное как волновая функция, для описания динамики микросистемы.

Между уравнениями (7.13) и (7.14) имеется важное различие. Оно состоит в том, что выражение (7.13) для действия основано на классических уравнениях механики, в которой свободное движение частицы является равномерным и прямолинейным, что является *философским допущением*, справедливость которого не очевидна. А уравнение (7.14) следует из формального волнового уравнения, которое оказалось пригодно для описания имеющихся *наблюдений*. Именно это обстоятельство привело к известным парадоксам, связанным с интерпретацией введенных понятий.

В метрической динамике с геодезической (3.1, 3.2) в качестве уравнения движения, не использующей указанных допущений, траектория свободного движения представляет собой винтовую линию общего вида. Поэтому движение частицы естественно характеризуется понятием фазы, а плоским волнам соответствуют проекции траектории движения на различные плоскости[4]. Одновременно волновые свойства процесса такие, как огибание частицами препятствий и появление разнообразных дифракционных и интерференционных картин, зависящих от краевых условий, теперь описываются с помощью выбора геометрии моделирующего пространства.

Отметим, что для приложений, связанных с однородными уравнениями Максвелла можно рассмотреть величину $\Psi = E + iH$, аналогичную волновой функции, но выраженную через геометрические характеристики (6.7, 6.9, 6.10). Тогда эту пару уравнений Максвелла можно преобразовать в уравнение

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = c\cdot\mathrm{rot}\Psi \tag{7.17}$$

которое можно использовать в задачах, обычно связанных с решением уравнения Шредингера.

[4]Заметим, что формализм обычной квантовой механики будет соответствовать описанию именно этих проекций.

# 8 Гравитация

Астрономические объекты и процессы, наблюдаемые на галактических масштабах и выше, в ряде случаев позволяют выполнять удаленные кинематические измерения. Однако все, что касается связанных с ними физических, в частности, гравитационных полей, есть лишь вопрос интерпретации, основанной на используемой теории. Поскольку на масштабах планетных систем геометрический подход (ОТО) не только оказался адекватным, но и позволил успешно предсказать новые эффекты, он стал основой интерпретации и на более значительных масштабах. Это, однако, не может означать, что сам подход и использованная геометрия Римана являются единственно пригодными во всех случаях. Известные альтернативные теории, не привели к заметным продвижениям.

Поэтому в качестве теории гравитации был предложен и использован подход, который естественно называть анизотропной геометродинамикой (АГД), основанный на обсуждаемой здесь геометрии. Он достаточно подробно изложен в статьях [10,17] и монографии [9]. Здесь мы коснемся лишь основных моментов и приведем результаты, полученные ранее в указанных работах.

Уравнение движения вновь определяется уравнением геодезической (3.3), а гравитационная сила в соответствии с Предложением 2 имеет вид

$$\vec{F}_g = \frac{mc^2}{2}\left\{-\nabla\varepsilon_{00} + \nabla\left(\vec{v}, \frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\vec{v}}\right) + \left[\vec{v}, rot\frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\vec{v}}\right]\right\}, \tag{8.1}$$

т.е. содержит вклады трех слагаемых. Если не сделано дополнительных предположений, то ни одним из них нельзя пренебречь по сравнению с остальными. И тогда различие со случаем использования геометрии Римана в ОТО очевидно. Физический смысл, который можно приписать дополнительным слагаемым при интерпретации, также прозрачен: принцип эквивалентности должен носить обобщенный характер, т.е. поскольку сила инерции может зависеть от скорости тела, сила гравитации также должна от нее зависеть. По этой причине АГД можно также называть обобщенной теорией эквивалентности (ОТЭ). В зависимости от угла между скоростью частицы и векторами, связанными с $\dfrac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\vec{v}}$, их вклады, сравнимые по величине, могут иметь разные знаки. Это обстоятельство отражает возможность *наблюдения* не только притяжения, но и отталкивания или тангенциального действия. Воспользовавшись представлениями о "метрическом поле" из раздела 4, можно рассчитать любую модельную ситуацию, в которой будут заданы распределения движущихся источников $\rho$ и $\vec{j}$, позволяющие рассчитать $\vec{F}^{(*)}$ и $\vec{F}^{(**)}$. Для простейшей системы, где пробное тело движется вдоль замкнутого *тока*, окружающего сингулярный *источник*, уравнение движения приведет к

$$v^2 = \frac{C_1}{r} \pm vC_2 \tag{8.2}$$

где $C_1$ и $C_2$ – константы, а знак зависит от направления движения пробного тела. Решения имеют вид

$$v = \frac{C_2}{2}\left(1 - \sqrt{1 \pm \frac{4C_1}{rC_2^2}}\right) \tag{8.3}$$

$$v = \frac{C_2}{2}\left(1 + \sqrt{1 \pm \frac{4C_1}{rC_2^2}}\right) \tag{8.4}$$

Если применить эту модель для описания движения звезды в спиральной галактике, то формула (8.3) соответствует Ньютоновскому результату и означает, что скорость орбитального движения уменьшается с удалением от центра. Это соответствует результатам ОТО и гравитации Ньютона. Одновременно формула (8.4) описывает выход зависимости скорости орбитального движения звезды на константу, что соответствует наблюдаемым плоским кривым вращения. В работах [9, 10, 17] показано, что имеется и количественное соответствие наблюдениям. Выписывая явные выражения для констант $C_1$ и $C_2$ через параметры задачи и принимая, что светимость спиральной галактики пропорциональна ее площади, получим закон Талли-Фишера $v_{orb} \sim L_{lum}^{1/4}$, не имеющий объяснения в ОТО.

Таким образом, использование анизотропной геометрии для описания астрономических явлений галактического масштаба позволяет адекватно описывать наблюдения, не требуя существования "темной материи". Другие результаты, полученные в рамках АГД в [9, 10, 17], сведены в следующую таблицу:

| **Следствия АГД** | **Наблюдения** | **Современная интерпретация** |
|---|---|---|
| 1. При отсутствии зависимости гравитационного поля от скоростей тел уравнения АГД переходят в уравнения ОТО | Подтверждают теорию на масштабах Солнечной системы | ОТО |
| 2. При движении в планетной системе тела, выполняющего гравитационный маневр разгона, должно наблюдаться дополнительное ускорение, направленное к центру, величина которого пропорциональна $cH$ | Эффект "Пионеров", имеющий порядок $cH$ | 14 различных объяснений, учитывающих следующие причины: технические, обработку данных, космические объекты, "новую физику". Их порядки сравнимы по величине, что не дает возможности предпочесть лишь одну из них. |
| 3. Кривые вращения для спиральных галактик должны быть плоскими | Да. | 1. Существует темная материя, масса которой в 4-7 раз превосходит массу светящейся (барионной) материи в галактике. Частицы темной материи обладают экзотическими свойствами и пока не обнаружены в прямом эксперименте<br>2. В теории МОНД предлагается изменить уравнение динамики Ньютона за счет введения дополнительного слагаемого, обеспечивающего соответствие наблюдениям. |
| 4. Орбитальные скорости звезд и газа, соответствующие плоским кривым вращения в спиральной галактике, должны соответствовать центростремительному ускорению порядка $cH$ на расстояниях порядка радиуса галактики | Да. | Интерпретация отсутствует |

| | | |
|---|---|---|
| 5. Если считать, что светимость галактики пропорциональна массе, а масса спиральной галактики распределена в ее плоскости, то светимость должна быть пропорциональна четвертой степени орбитальной скорости звезд на периферии | Закон Талли-Фишера, следующий из наблюдений. | Интерпретация отсутствует. Отметим, что в этих наблюдениях гипотетическая темная материя, присутствующая в галактике, никак не проявляет себя, что противоречит ее предполагаемым свойствам оказывать гравитационное действие. |
| 6. У галактик с большим угловым моментом должны быть рукава | Да, спиральные галактики | Теория волн плотности.<br>Не предсказывает перекладины. |
| 7. У спиральных галактик должны быть бары (перекладины) | Да. | Интерпретация отсутствует |
| 8. Движение отдельных объектов в плоскости спиральной галактики должно противоречить закону Кеплера | Наблюдения шаровых скоплений в плоскости галактики указывают на нарушение статистики закона Кеплера (число скоплений в центре галактики существенно больше, чем на периферии). | Интерпретация отсутствует |
| 9. Движение объектов в плоскости спиральной галактики и в перпендикулярной к ней плоскости должно различаться | Наблюдения шаровых скоплений в перпендикулярной плоскости соответствует закону Кеплера в отличие от п.8. | Интерпретация отсутствует |
| 10. В некоторых гравитационных линзах, обладающих необходимой ориентацией должно быть существенное превышение преломления по сравнению с оценкой, следующей из ОТО | Да. | Считается связанным с действием темной матери и используется для оценки ее количества. |
| 11. Гравитационные линзы, представляющие собой спиральные галактики, при профильной ориентации должны давать асимметрию в изображении | Да. Например, крест Эйнштейна. | Интерпретация отсутствует |

| | | |
|---|---|---|
| 12. В силу эквивалентности массы и энергии кластеры галактик должны обладать большей массой, чем это можно оценить по их светимости, и большей, чем поправка, которая следует из ОТО | Наблюдения Ф.Цвике. | "Скрытая масса" (по Ф.Цвике) и темная материя |
| 13. При столкновениях отдельных галактик должен проявляться избыток "массы-энергии", связанный с взаимным движением | Наблюдение столкновения галактик в кластере Пуля, выполненные обсерваторией "Чандра" | Темная материя |
| 14. Красное смещение в излучении удаленных объектов должно нарастать с расстоянием линейно, что связано с вихревыми движениями объектов масштаба галактик и выше | Эмпирический закон, обнаруженный Хабблом | Космологическое расширение Вселенной |
| 15. Могут существовать рассеивающие гравитационные линзы, что приведет к неверному (завышенному) определению расстояний до соответствующих источников света | Обнаружены отклонения от линейного закона Хаббла, соответствующие этой гипотезе. | Расширение Вселенной происходит ускоренно за счет темной энергии (отталкивания) |
| 16. Распределение материи вблизи ядер спиральных галактик может иметь характерный вид (знак "бесконечность") | Обнаружено обсерваторией "Гершель" при наблюдении холодных облаков газа в центре нашей галактики | Интерпретация отсутствует |

Таблица 1:

Дополнительно можно упомянуть недавние прецизионные измерения движения геодезических спутников "Лагеос" [18]. Авторы интерпретируют их в классическом духе как влияние "вихрей эфира". Использование этого понятия возвращает к экспериментальным проблемам обнаружения эфира, (как и в случае с экспериментальным обнаружением носителей темной материи). Однако эти наблюдения можно также описать в терминах АГД как частного случая метрической динамики.

## 9 Обсуждение

Переход от динамической к геометрической формулировке законов механики отсылает к идеям Э.Маха – одного из наиболее известных физиков и философов из тех, кто пытался пересмотреть некоторые идеи классической механики в связи с их противоречивостью. Поднимавшаяся им проблема взаимосвязи всего со всем находит отражение в выборе адекватной геометрии для описания данного класса явлений, а проблема инерции снимается в свете Предложения 2. Одновременно меняют свой смысл такие понятия, как энергия, импульс, замкнутая система, поскольку происходит отказ от поиска гипотетических причин (физических свойств), а рассматриваются лишь геометрические свойства пространства (математическое описание), неразделимо связанные с движением пробного тела и распределением движущихся источников.

Таким образом, в рамках такой метрической динамики вновь предлагается разделить корпускулярные и волновые свойства наблюдаемого явления, как пытались делать Маделунг и де Бройль. Однако теперь нет необходимости вводить материальный носитель этих свойств, например, эфир, как предполагалось в теории Максвелла-Лоренца, но можно воспользоваться предложением о выборе надлежащей геометрии пространства, используемого для моделирования, сделанным Минковским.

Смысл этого подхода состоит в стремлении разделить в явном виде физический и математический миры в духе идеи Р.Пенроуза [19] об их объективном существовании. Иными словами, предлагается избежать использования инструмента (математики) в качестве объекта исследования и измерения во внешнем мире (физики). Фактически, вопрос формулируется так: указать такой способ определения расстояния с помощью измерения координат, что наблюдаемые траектории соответствуют геодезическим соответствующего пространства. Это соответствует выбору геометрии. Необходимость такого подхода связана с тем, что на мега- и микро-масштабах возможность непосредственного измерения расстояний исчезает. Все они определяются с помощью измерения времени процессов распространения стандартизированных сигналов, (например, фотонов), в той среде, где находятся и объекты измерения. Измерить непосредственно, как именно протекают исследуемые процессы, невозможно, и все, что можно сделать, это предложить самосогласованное описание.

Возникший в свое время вопрос о том, какому свойству природы объекта соответствует волновая функция, и что представляет собой ее редукция, породил дискуссию среди физиков и философов, длившуюся несколько десятилетий. Поначалу Э.Маделунг предложил гидродинамическую трактовку квантовой механики, что намекало на возврат к эфиру. Затем в 1927 г. де Бройль попытался разделить волну и частицу, вводя представление о волне-пилоте. Однако под давлением общепризнанных авторитетов, предпочитавших говорить о “волнах вероятности”, что, кстати, исключало из рассмотрения понятие о траектории, де Бройль оставил эту идею. Тем не менее, в 1951 г. он напишет и лишь через 30 лет опубликует [16] следующие замечания:

*“Никакой механизм, основанный на классических или даже релятивистских представлениях о пространстве и времени, по-видимому, не может объяснить такое мгновенное стягивание* [редукцию волновой функции – С.С.], *которое, впрочем, тесно связано с неделимым характером частицы. Принимая релятивистские представления о пространстве и времени, Эйнштейн рассматривал данный вывод как возражение против волновой механики. Сейчас же, когда новые представления выглядят более устоявшимися, необходимо, по-видимому, сделанный вывод рассматривать как указание на неадекватность наших представлений о пространстве и времени, хотя бы даже и уточненных в теории относительности”.*

И там же [16]:

*“Корпускулярные представления делают невозможным введение понятие разности фаз”.*

Последнее замечание относилось к ключевому положению квантовой теории, касающемуся наличия у микрочастиц волновых свойств. Опыты К.Дэвиссона и Л.Джермера 1927 г., в которых наблюдалась дифракция потока электронов на кристалле, и опыты 1948 г. И.А.Фабриканта (и их дальнейшие уточнения) по наблюдению дифракции единичных электронов были интерпретированы как проявление волновых свойств микрочастиц. И физики смирились с наличием у одного объекта двух взаимно исключающих свойств, поскольку расчеты на основе этого допущения успешно согласовывались с экспериментом[5].

В рамках метрической динамики вновь предлагается разделить корпускулярные и волновые свойства наблюдаемого явления, как пытались делать Маделунг и де Бройль. Однако теперь нет необходимости вводить материальный носитель этих свойств, например, эфир, как предполагалось в теории Максвелла-Лоренца, но можно воспользоваться предложением о выборе надлежащей геометрии пространства, используемого для моделирования, сделанным Минковским.

С формальной точки зрения использование силовых полей эквивалентно использованию соответствующей геометрии пространства, выбранного для моделирования физической реальности. С одной стороны, это возвращает к старому философскому спору о материальности поля и о дальнодействии. Как и прежде, это может быть объектом личных предпочтений исследователя. Но так же, как и прежде, вовлечение нового математического аппарата может позволить осуществить новые теоретические продвижения, сопоставимые с результатами надлежащих экспериментов.

## Литература


[1] Silagadze Z. Relativity without tears // *Acta Phys.Pol.*, 2008, 39, p. 812

[2] Мах Э. Механика. В сб. “Альберт Эйнштейн и теория гравитации”. 1979, М.: Мир.

[3] Chambers R.G. Shift of an Electron Interference Pattern by Enclosed Magnetic Flux // *Phys. Rev. Lett.*, 1960, 5, p. 3.

[4] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука.

[5] Сипаров С.В. Об основах обобщенной теории эквивалентности (анизотропной геометродинамики) // *Гиперкомплексные числа к геометрии и физике*, т. 10 №1(19), 2013, стр. 162-183.

[6] Рунд Г. Дифференциальная геометрия Финслеровых пространств. 1981, М.: Наука.

[7] Bao D., Chern S., Shen Z. An Introduction to Riemann-Finsler Geometry. 2000, Springer Verlag.

[8] Siparov S., Brinzei N. 2008, arxiv [gr-qc]: 0806.3066v1.

[9] Siparov S. Introduction to the Anisotropic Geometrodynamics. 2011, World Scientific, London-New Jersey-Singapore, 315 p.

[10] Сипаров С.В. К вопросу об анизотропной геометродинамике // *Гиперкомплексные числа к геометрии и физике*, т. 10, 2008, стр. 64; arxiv [gr-qc]: 0809.1817v3.

[11] Эйнштейн А. Основы общей теории относительности. В сб. “Альберт Эйнштейн и теория гравитации”. 1979, М.: Мир.

[12] Сипаров С.В. В сб. “Логос” №5, с. 123-209, Ярославль, 2010.

[13] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. 1965. М.: Наука.

[14] Морнев О.А. Ньютонова динамика на многообразиях. 2001, 8-й Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, Пермь.

[15] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. 1986, М.: Наука.

[16] Де Бройль Л. Соотношения неопределенности Гейзенберга и вероятностная интерпретация квантовой механики. 1986, М.Мир.

[17] Сипаров С.В. Закон гравитации и модель источника в анизотропной геометродинамике // *Гиперкомплексные числа к геометрии и физике*, 2(12), т.6, 2009, с.140-160, arXiv: [gen-ph] 1001.1501


[5]Это смирение иллюстрируется выразительным принципом “shut up and calculate” (“заткнись и вычисляй”).

[18] Игнатенко Ю.В., Игнатенко, И.Ю., Тряпицын В.Н.. Отклонение света при лазерной локации *Гиперкомплексные числа к геометрии и физике*, 2014.

[19] Пенроуз Р. Тени разума: В поисках науки о сознании. 2011, М.: ИКИ.

## METRICAL DYNAMICS

**S.V. Siparov**

*Civil Aviation State University, Saint-Petersburg, Russia*
*NRU of Information Technologies, Mechanics and Optics, Saint-Petersburg, Russia*
sergey.siparov@gmail.com

The suggested approach makes it possible to produce a consistent description of motions of a physical system. It is shown that the concept of force fields defining the systems' dynamics is equivalent to the choice of the corresponding metric of an anisotropic space, which is used for the modeling of physical reality and the processes that take place. The examples from hydrodynamics, electrodynamics, quantum mechanics and theory of gravitation are discussed. This approach makes it possible to get rid of some known paradoxes; it can be also used for the further development of the theory.

**Key Words:** Metrical dynamics, relativity theory, hydrodynamics, electrodynamics, quantum mechanics, theory of gravitation.