# О КУБИЧЕСКИХ МАТРИЦАХ

**А.М. Гальмак**

*Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев, Белоруссия*

halm54@mail.ru

В статье изучаются кубические матрицы трёх видов: кубические матрицы порядка $n$, у которых для любого $r=1,2,\ldots,n$ $r$-ые сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ совпадают; кубические матрицы, у которых в каждом сечении любой ориентации все элементы симметричны как относительно главной диагонали, так и относительно побочной диагонали; кубические матрицы из множества $\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P)$, которое определил автор. Все перечисленные кубические матрицы объединяет то, что они являются симметрическими.

**Ключевые слова:** кубическая матрица, ориентация, сечение, кристалл.

## 1 Введение

В [1] для любой кубической матрицы $A$ порядка $n$ над ассоциативным, коммутативным кольцом $P$ с единицей были определены четыре вида определителей:

$\det^{(i)} A$ – определитель ориентации $(i)$;

$\det^{(j)} A$ – определитель ориентации $(j)$,

$\det^{(k)} A$ – определитель ориентации $(k)$

и полный определитель $\det A$.

*Определителем ориентации* $(s)$ кубической матрицы $A=(a_{ijk})$, где $s\in\{i,j,k\}$, называется [1] произведение определителей всех её сечений ориентации $(s)$.

*Полным определителем* кубической матрицы $A=(a_{ijk})$ называется [1] произведение ее определителей ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$.

Таким образом, согласно определению,

$$\det^{(i)}(a_{ijk}) = \det(a_{1jk})\det(a_{2jk})\ldots\det(a_{njk}),$$

$$\det^{(j)}(a_{ijk}) = \det(a_{i1k})\det(a_{i2k})\ldots\det(a_{ink}),$$

$$\det^{(k)}(a_{ijk}) = \det(a_{ij1})\det(a_{ij2})\ldots\det(a_{ijn}),$$

$$\det(a_{ijk}) = \det^{(i)}(a_{ijk})\det^{(j)}(a_{ijk})\det^{(k)}(a_{ijk}).$$

Сравнивая приведенные выше определения определителей из [1] с определением кубических детерминантов из [2, 3], видим, что определители из [1] и кубические детерминанты из [2, 3] – это совершенно разные понятия.

**Пример 1.1**. Пусть $n=2$, $P=Z$. Рассмотрим кубическую матрицу $A$, изображенную на рисунке 1.1.

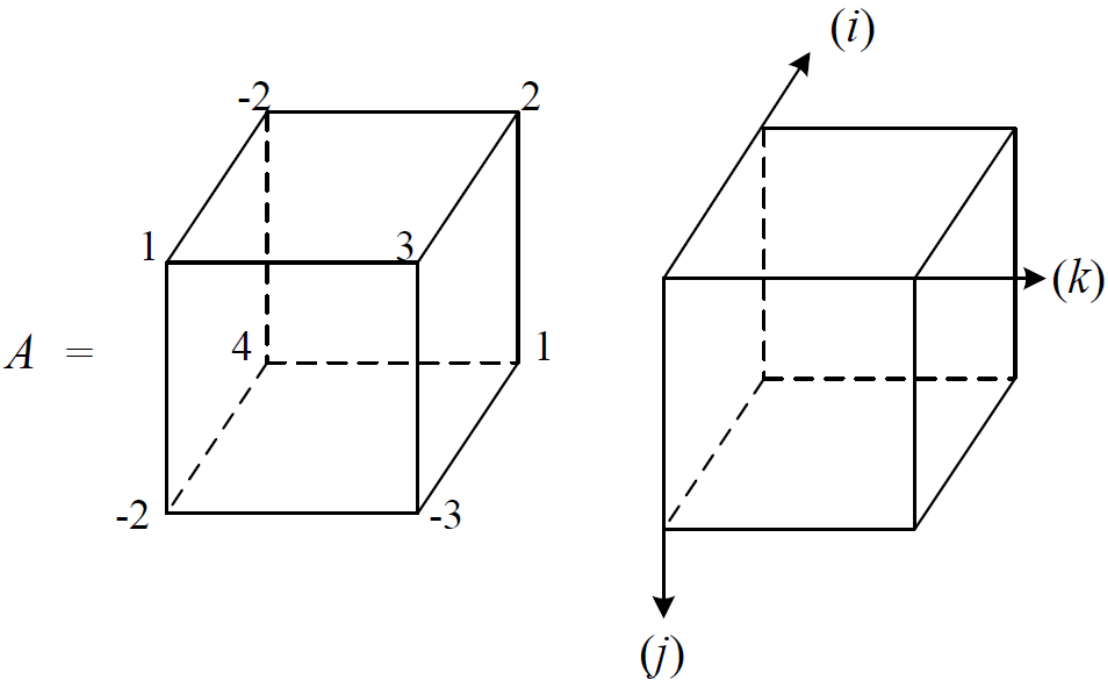


Рис. 1.1:

Найдем все определители пространственной матрицы $A$:

$$\det^{(i)} A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-10) = -30;$$

$$\det^{(j)} A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot 10 = 80;$$

$$\det^{(k)} A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 9 = 0;$$

$$\det A = 30 \cdot 80 \cdot 0 = 0.$$

Отметим, что для кубической матрицы $A$ из рассмотренного примера кубический детерминант сигнатуры $[^{+}_{i}]$ равен $-1$.

Представляет интерес следующий

**Вопрос 1.1**. *Существуют ли для любого* $n \geq 2$ *кубические матрицы, у которых определители ориентаций* $(i)$, $(j)$ и $(k)$ *совпадают?*

**Пример 1.2**. Рассмотрим кубическую матрицу, изображённую на рисунке 1.2. и её сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$, изображённые на рисунке 1.3, где $a$, $b$, $c$ и $d$ – произвольные элементы кольца $P$ (первые сечения каждой ориентации имеют зелёный цвет, вторые – красный цвет). Эта кубическая матрица примечательна тем, что у нее первые сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ совпадают, совпадают и вторые сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$. Понятно, что у этой кубической матрицы определители ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ совпадают и равны

$$(ac - b^2)(bd - c^2).$$

Таким образом, при $n = 2$ ответ на сформулированный выше вопрос 1.1 является положительным. Для $n > 2$ ответ будет также положительным, если будет получен

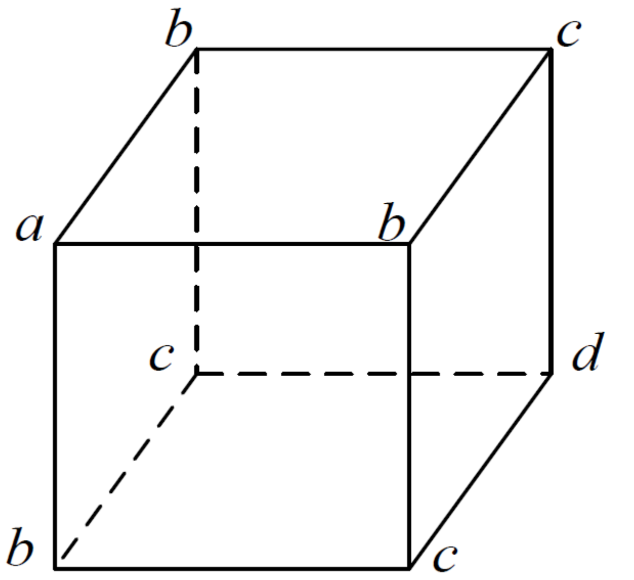


Рис. 1.2:

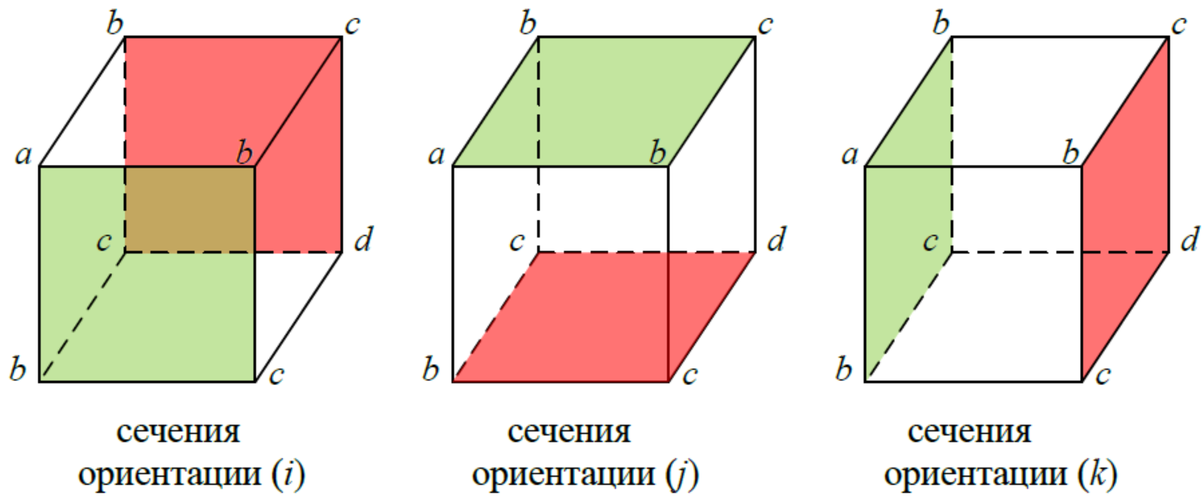


Рис. 1.3:

утвердительный ответ на

**Вопрос 1.2**. *Существуют ли для любого $n>2$ кубические матрицы порядка $n$, у которых для любого $r=1,2,\dots,n$ $r$-ые сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ совпадают?*

## 2 Симметрические кубические матрицы

Можно заметить, что кубическая матрица (1.1) является симметрической в смысле следующего определения. Кубическая матрица $(a_{ijk})$ порядка $n$ называется [2] *симметрической*, если

$$a_{ijk}=a_{ikj}=a_{jik}=a_{jki}=a_{kij}=a_{kji}$$

для любых $i,j,k\in\{1,2,\dots,n\}$.

Множество всех симметрических кубических матриц порядка $n$ над $P$ непусто, так как содержит любую кубическую матрицу порядка $n$ над $P$, у которой все элементы совпадают с одним и тем же элементом из $P$.

Ясно, что если зафиксировать $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то $r$-ые сечения ориентаций $(i)$ и $(j)$

$$(a_{rjk}) = \begin{pmatrix} a_{r11} & \ldots & a_{r1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{rn1} & \ldots & a_{rnn} \end{pmatrix}, \quad (a_{irk}) = \begin{pmatrix} a_{1r1} & \ldots & a_{1rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nr1} & \ldots & a_{nrn} \end{pmatrix}$$

кубической матрицы $(a_{ijk})$ порядка $n$ совпадают тогда и только тогда, когда $a_{rst} = a_{srt}$ для любых $s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Аналогично, $r$-ые сечения ориентаций $(i)$ и $(k)$ кубической матрицы $(a_{ijk})$ порядка $n$ совпадают тогда и только тогда, когда $a_{rst} = a_{str}$ для любых $s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Точно также, $r$-ые сечения ориентаций $(j)$ и $(k)$ кубической матрицы $(a_{ijk})$ порядка $n$ совпадают тогда и только тогда, когда $a_{srt} = a_{str}$ для любых $s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Таким образом, у кубической матрицы $(a_{ijk})$ порядка $n$ $r$-ые сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ совпадают для любого $r = 1, 2, \ldots, n$ тогда и только тогда, когда $a_{rst} = a_{srt} = a_{str}$ для любых $r, s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

**Замечание 2.1**. Можно показать, что если у кубической матрицы $(a_{ijk})$ порядка $n$ для любого $r = 1, 2, \ldots, n$ $r$-ые сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ совпадают, то у этой кубической матрицы все сечения любой ориентаций являются симметрическими матрицами. Поэтому у кубической матрицы $(a_{ijk})$ порядка $n$ $r$-ые сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ совпадают для любого $r = 1, 2, \ldots, n$ тогда и только тогда, когда $a_{rst} = a_{rts} = a_{srt} = a_{trs} = a_{str} = a_{tsr}$ для любых $r, s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то есть имеет место

**Предложение 2.1**. *Множество всех кубических матриц порядка* $n$ над $P$, *у которых* $r$*-ые сечения ориентаций* $(i)$, $(j)$ и $(k)$ *совпадают для любого* $r = 1, 2, \ldots, n$, *совпадает с множеством всех симметрических кубических матриц порядка* $n$ над $P$.

Таким образом, кубические матрицы из вопроса 1.2 это ни что иное как симметрические кубические матрицы.

Обозначим через $\mathbf{M}_{n\times n\times n}(P)$ множество всех кубических матриц порядка $n$ над $P$, а через $\Sigma_{n\times n\times n}(P)$ множество всех симметрических кубических матриц порядка $n$ над $P$. Согласно предложению 2.1,

$$\Sigma_{n\times n\times n}(P) = \{(a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{n\times n\times n}(P) | (a_{rjk}) = (a_{irk}) = (a_{ijr}), r = 1, \ldots, n\}.$$

Поэтому справедливо

**Предложение 2.2**. *У любой кубической матрицы* $A \in \Sigma_{n\times n\times n}(P)$ *её определители ориентаций* $(i)$, $(j)$ и $(k)$ *совпадают*: $\det^{(i)} A = \det^{(j)} A = \det^{(k)} A$.

Для $n = 1$ считаем $\Sigma_{1\times 1\times 1}(P) = P$.

Легко проверить справедливость следующего утверждения.

**Лемма 2.1**. *Множество* $\Sigma_{2\times 2\times 2}(P)$ *совпадает с множеством всех кубических матриц второго порядка, изображенных на рис. 1.2.*

## 3 Критерии симметричности кубической матрицы

Укажем один из способов получения всех кубических матриц порядка $n$, у которых для любого $r = 1, 2, \ldots, n$ $r$-ые сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ совпадают.

Обозначим через $\Sigma^{[1]}_{n\times n\times n}(P)$ множество всех кубических матриц порядка $n$ над $P$, у которых первые сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ совпадают и являются симметрическими матрицами, то есть $\Sigma^{[1]}_{n\times n\times n}(P) = \{A = (a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{n\times n\times n}(P) | (a_{1jk}) = (a_{i1k}) = (a_{ij1}) \in \Sigma_{n\times n}(P)\}$, где $\Sigma_{n\times n}(P)$ – множество всех симметрических матриц порядка $n$ над $P$.

Множество $\Sigma^{[1]}_{n\times n\times n}(P)$ – непусто.

Если у кубической матрицы $A$ порядка $n$ над $P$ удалить первые сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$, то получится кубическая подматрица порядка $n-1$ над $P$, которую будем обозначать символом ${}^{\neg 1}A$.

Обозначим через ${}^{\neg 1}\Sigma_{n\times n\times n}(P)$ множество всех кубических матриц порядка $n$ над кольцом $P$, у которых кубическая подматрица ${}^{\neg 1}A$ принадлежит множеству $\Sigma_{(n-1)\times(n-1)\times(n-1)}(P)$.

При доказательстве приведенной ниже теоремы будет использоваться следующий простой факт: *если у матриц* $A$ и $B$ *равны подматрицы, получающиеся вычеркиванием первых строк и первых столбцов, то для равенства самих матриц* $A$ и $B$ *достаточно равенства их первых строк и равенства их первых столбцов.*

Для произвольной матрицы $A$ будем использовать следующие обозначения: $A^{(i)}$ – $(i)$-ая строка, $A_{(j)}$ – $(j)$-ый столбец.

**Теорема 3.1**. *Для любого целого* $n \geqslant 2$ *верно равенство*

$$\Sigma_{n\times n\times n}(P) = \Sigma^{[1]}_{n\times n\times n}(P) \cap {}^{\neg 1}\Sigma_{n\times n\times n}(P).$$

***Доказательство***. Так как согласно лемме 2.1, любая кубическая матрица из $\Sigma_{2\times 2\times 2}(P)$ имеет вид рис. 1.2, то

$$\Sigma^{[1]}_{2\times 2\times 2}(P) = \Sigma_{2\times 2\times 2}(P).$$

Кроме того, из условия $\Sigma_{1\times 1\times 1}(P) = P$ следует

$${}^{\neg 1}\Sigma_{2\times 2\times 2}(P) = \mathbf{M}_{2\times 2\times 2}(P).$$

Поэтому при $n = 2$ равенство из формулировки теоремы верно.

Далее считаем $n \geq 3$.

Пусть

$$A \in \Sigma^{[1]}_{n\times n\times n}(P) \cap {}^{\neg 1}\Sigma_{n\times n\times n}(P).$$

Выберем произвольно $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и пусть $R$,$S$ и $T$ – первые сечения соответственно ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ кубической матрицы $A$; $U$, $V$ и $W$ – $r$-ые сечения соответственно ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ этой же кубической матрицы $A$.

Далее для наглядности будем пользоваться изображением указанных сечений кубической матрицы $A$, показанных на рисунке 3.1.

Первая строка $U^{(1)}$ матрицы $U$ является $r$-ой строкой $S^{(r)}$ матрицы $S$, то есть

$$U^{(1)} = S^{(r)}. \tag{3.1}$$

Так как $A \in \Sigma^{[1]}_{n\times n\times n}(P)$, то $S = R$, откуда

$$S^{(r)} = R^{(r)}, \tag{3.2}$$

но $r$-ая строка $R^{(r)}$ матрицы $R$ совпадает с первой строкой $V^{(1)}$ матрицы $V$:

$$R^{(r)} = V^{(1)}. \tag{3.3}$$

Из (3.1) – (3.3) следует

$$U^{(1)} = V^{(1)}. \tag{3.4}$$

Первый столбец $U_{(1)}$ матрицы $U$ является $r$-ой строкой $T^{(r)}$ матрицы $T$:

$$U_{(1)} = T^{(r)}. \tag{3.5}$$

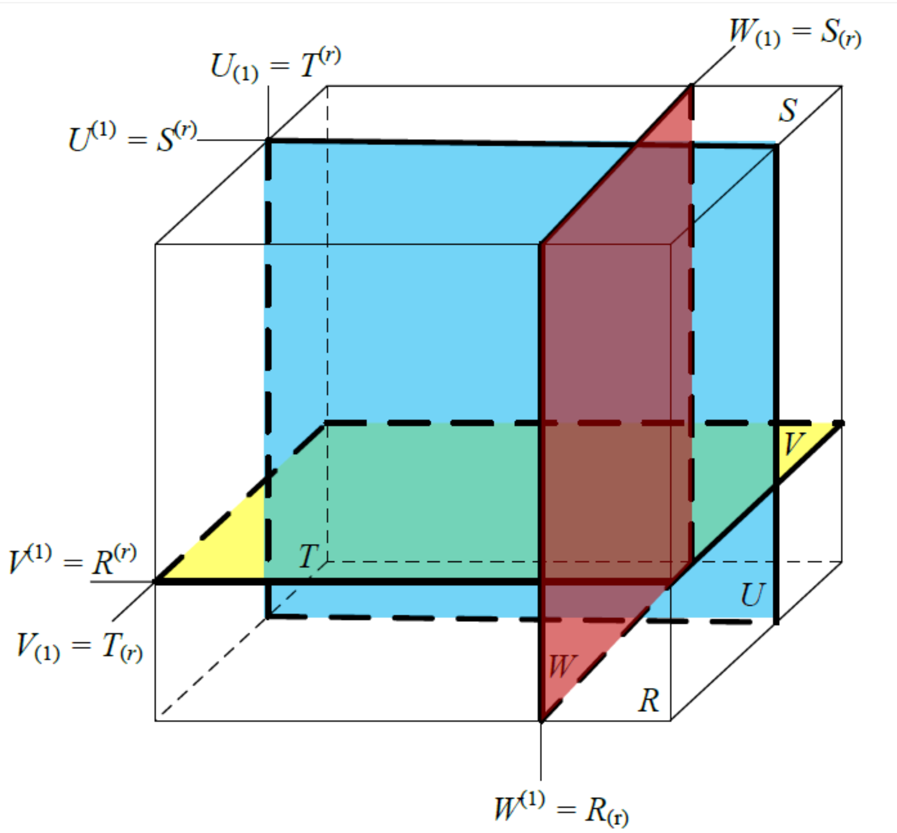


Рис. 3.1:

Снова, так как $A \in \Sigma^{[1]}_{n\times n\times n}(P)$, то $T$ – симметрическая матрица, откуда

$$T^{(r)} = T_{(r)}. \tag{3.6}$$

Но $r$-ый столбец $T_{(r)}$ матрицы $T$ является первым столбцом $V_{(1)}$ матрицы $V$:

$$T_{(r)} = V_{(1)}. \tag{3.7}$$

Из (3.5) – (3.7) следует

$$U_{(1)} = V_{(1)}. \tag{3.8}$$

Так как $A \in {}^{\neg 1}\Sigma_{n\times n\times n}(P)$, то ${}^{\neg 1}A \in \Sigma_{(n-1)\times(n-1)\times(n-1)}(P)$. Тогда из (3.4) и (3.8) ввиду замечания перед доказываемой теоремой, следует

$$U = V. \tag{3.9}$$

Так как $S$ – симметрическая матрица, то

$$S^{(r)} = S_{(r)}, \tag{3.10}$$

а так как $S = R$, то

$$S_{(r)} = R_{(r)}. \tag{3.11}$$

Кроме того,

$$R_{(r)} = W^{(1)}. \tag{3.12}$$

Из (3.1), (3.10) – (3.12) следует

$$U^{(1)} = W^{(1)}. \tag{3.13}$$

Так как $T = S$, то

$$T_{(r)} = S_{(r)}. \tag{3.14}$$

Кроме того,

$$S_{(r)} = W_{(1)}. \tag{3.15}$$

Из (3.5), (3.6), (3.14) и (3.15) следует

$$U_{(1)} = W_{(1)}. \tag{3.16}$$

Из (3.13) и (3.16), ввиду замечания перед доказываемой теоремой, следует

$$U = W. \tag{3.17}$$

Из (3.9) и (3.17), ввиду произвольного выбора $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и предложения 2.1, следует $A \in \Sigma_{n\times n\times n}(P)$. Таким образом, доказано включение

$$\Sigma^{[1]}_{n\times n\times n}(P) \cap^{\neg 1} \Sigma_{n\times n\times n}(P) \subseteq \Sigma_{n\times n\times n}(P).$$

Пусть теперь $A = (a_{ijk}) \in \Sigma_{n\times n\times n}(P)$. Ясно, что $A \in {}^{\neg 1}\Sigma_{n\times n\times n}(P)$.

Для наглядности снова обратимся к приведённому выше рисунку, считая, что на нём изображена указанная кубическая матрица.

Выберем произвольно $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Так как $A \in \Sigma_{n\times n\times n}(P)$, то согласно предложению 2.1, $U = V$, откуда следует равенство первых столбцов этих матриц: $U_{(1)} = V_{(1)}$. Из рисунка видно, что $U_{(1)} = T^{(r)}$, $V_{(1)} = T_{(r)}$, откуда и из предыдущего равенства следует $T^{(r)} = T_{(r)}$. Следовательно, матрица $T$ – симметрическая.

А так как $T = R = S$, то матрицы $R$ и $S$ – также являются симметрическими. Таким образом, $A \in \Sigma^{[1]}_{n\times n\times n}(P)$, и более того,

$$A \in \Sigma^{[1]}_{n\times n\times n}(P) \cap^{\neg 1} \Sigma_{n\times n\times n}(P).$$

Тем самым доказано включение

$$\Sigma_{n\times n\times n}(P) \subseteq \Sigma^{[1]}_{n\times n\times n}(P) \cap^{\neg 1} \Sigma_{n\times n\times n}(P),$$

а значит и требуемое равенство. Теорема доказана.

Согласно теореме 3.1, у любой кубической матрицы $A$ из $\Sigma_{n\times n\times n}(P)$ первые сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ являются симметрическими. В действительности верно, как отмечалось в замечании 2.1, следующее более общее утверждение.

**Предложение 3.1**. *Если у кубической матрицы порядка $n$ для любого $r = 1, 2, \ldots, n$ $r$-ые сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ совпадают, то у этой кубической матрицы все сечения любой ориентаций являются симметрическими матрицами.*

Это легко показать, если в фрагменте доказательства теоремы 3.1, касающегося установления симметричности матрицы $T$, заменить эту матрицу любым $q$-ым сечением $(a_{ijq})$ ориентации $(k)$, где $q \in \{2, \ldots, n\}$, оставив всё остальное без изменений. В результате будет установлена симметричность этого сечения $(a_{ijq})$. А так как для матрицы $A = (a_{ijk}) \in \Sigma_{n\times n\times n}(P)$ $q$-ые сечения $(a_{qjk})$, $(a_{iqk})$ и $(a_{ijq})$ ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ совпадают, то симметрическими будут и сечения $(a_{qjk})$ и $(a_{iqk})$.

Сформулируем ещё одно

**Предложение 3.2**. *Кубическая матрица, у которой все сечения любой ориентации являются симметрическими матрицами, сама является симметрической.*

***Доказательство***. Пусть $A=(a_{ijk})$ – кубическая матрица, у которой все сечения любой ориентаций являются симметрическими матрицами.

Для элемента $a_{rst}$ имеем:

$$a_{rst}=a_{rts} \quad (\text{в } r\text{-ом сечении ориентации } (i)); \tag{3.18}$$

$$a_{rst}=a_{tsr} \quad (\text{в } s\text{-ом сечении ориентации } (j)); \tag{3.19}$$

$$a_{rst}=a_{srt} \quad (\text{в } t\text{-ом сечении ориентации } (k)). \tag{3.20}$$

Для элемента $a_{rts}$ имеем

$$a_{rts}=a_{str} \quad (\text{в } t\text{-ом сечении ориентации } (j)). \tag{3.21}$$

Для элемента $a_{tsr}$ имеем

$$a_{tsr}=a_{trs} \quad (\text{в } t\text{-ом сечении ориентации } (i)). \tag{3.22}$$

Из (3.18) – (3.22) вытекает

$$a_{rst}=a_{rts}=a_{tsr}=a_{srt}=a_{str}=a_{trs}$$

для любых $r,s,t\in\{1,2,\ldots,n\}$. Следовательно, $A=(a_{ijk})$ – симметрическая кубическая матрица. Предложение доказано.

Предложения 2.1, 3.1, 3.2 и теорема 3.1 позволяют сформулировать следующую теорему.

**Теорема 3.2**. *Для любой кубической матрицы $A$ порядка $n\geq 2$ следующие утверждения равносильны*:

1. *у $A$ $r$-ые сечения ориентаций* $(i)$, $(j)$ и $(k)$ *совпадают для любого* $r=1,2,\ldots,n$;
2. *у $A$ все сечения любой ориентации являются симметрическими матрицами*;
3. $A$ – *симметрическая*;
4. $A\in\Sigma^{[1]}_{n\times n\times n}(P)\cap^{-1}\Sigma_{n\times n\times n}(P)$.

**Замечание 3.1**. Теорема 3.1 даёт способ конструирования всех кубических матриц из $\Sigma_{n\times n\times n}(P)$ для любого $n$.

Вначале фиксируем множество $\Sigma_{2\times 2\times 2}(P)$, которое согласно лемме 2.1, совпадает с множеством всех кубических матриц второго порядка вида на рис. 1.2.

Затем для любой кубической матрицы из $\Sigma_{2\times 2\times 2}(P)$ и любой симметрической матрицы третьего порядка строится кубическая матрица третьего порядка, у которой первые сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ совпадают с выбранной симметрической матрицей третьего порядка, а кубическая подматрица, получающаяся удалением этих первых сечений, совпадает с выбранной кубической матрицей из $\Sigma_{2\times 2\times 2}(P)$. Согласно теореме 3.1, множество всех таких кубических матриц совпадает с множеством $\Sigma_{3\times 3\times 3}(P)$.

Далее с помощью кубических матриц из $\Sigma_{3\times 3\times 3}(P)$ и симметрических матриц четвёртого порядка аналогично конструируется множество $\Sigma_{4\times 4\times 4}(P)$.

После того, как построено множество $\Sigma_{(n-1)\times(n-1)\times(n-1)}(P)$, с помощью кубических матриц из этого множества и симметрических матриц $n$-го порядка строится множество $\Sigma_{n\times n\times n}(P)$.

Возможны и другие способы “сборки” кубических матриц из множества $\Sigma_{n\times n\times n}(P)$.

**Замечание 3.2**. “Сборку” кубических матриц из множества $\Sigma_{n\times n\times n}(P)$ можно начинать не с множества $\Sigma_{2\times 2\times 2}(P)$, а с множества $\Sigma_{1\times 1\times 1}(P)=P$. Схема при этом та же, что и описанная выше. Для любого элемента $d$ из $\Sigma_{1\times1\times1}(P)=P$ и любой симметрической матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ второго порядка строится кубическая матрица второго порядка, у которой первые сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ совпадают с выбранной симметрической матрицей второго порядка, а кубическая подматрица, получающаяся удалением этих первых сечений, совпадает с выбранным элемента $d$ из $\Sigma_{1\times1\times1}(P)=P$. В результате получается кубическая матрица изображенная на рис. 1.2. Множество всех таких кубических матриц совпадает с множеством $\Sigma_{2\times2\times2}(P)$.

Заметим, что описанная выше процедура “сборки” симметрических кубических матриц удобна для написания компъютерной программы, реализующей их получение для больших $n$.

Обозначим через $\sigma_{n\times n}$ максимальное число различных элементов, которые может иметь симметрическая матрица $n$-го порядка. У такой матрицы среди всех элементов на главной диагонали и под ней нет одинаковых или, что равносильно, среди всех элементов на главной диагонали и над ней нет одинаковых. Например,

$$\sigma_{1\times1}=1,\quad \sigma_{2\times2}=3,\quad \sigma_{3\times3}=6.$$

В общем случае $\sigma_{n\times n}$ совпадает с суммой $n$ первых членов арифметической прогрессии $1,2,\ldots,n$: $\sigma_{n\times n}=\dfrac{(1+n)n}{2}$.

Обозначим через $\sigma_{n\times n\times n}$ максимальное число различных элементов, которые может иметь симметрическая кубическая матрица $n$-го порядка. Например, $\sigma_{1\times1\times1}=1$, кроме того, как показывают пример 1.1 и пример 4.1 из раздела 4.1,

$$\sigma_{2\times2\times2}=4,\quad \sigma_{3\times3\times3}=10.$$

Согласно теореме 3.1, у любой симметрической кубической матрицы $n$-го порядка первые сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ совпадают с некоторой симметрической матрицей $n$-го порядка, а кубическая подматрица, получающаяся из неё удалением всех первых сечений, является симметрической кубической матрицей $(n-1)$-го порядка. Поэтому верно равенство

$$\sigma_{n\times n\times n}=\sigma_{(n-1)\times(n-1)\times(n-1)}+\sigma_{n\times n},$$

откуда следует

$$\sigma_{n\times n\times n}=\sigma_{1\times1}+\sigma_{2\times2}+\cdots+\sigma_{(n-2)\times(n-2)}+\sigma_{(n-1)\times(n-1)}+\sigma_{n\times n}.$$

Последнюю формулу можно переписать следующим образом

$$\sigma_{n\times n\times n}=1+3+6+\cdots+\frac{(1+n)n}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Таким образом, имеет место

**Предложение 3.3**. *Для любого целого $n\geqslant 2$ верны равенства*

$$\sigma_{n\times n\times n}=\sigma_{(n-1)\times(n-1)\times(n-1)}+\sigma_{n\times n},$$

$$\sigma_{n\times n\times n}=\sigma_{1\times1}+\sigma_{2\times2}+\cdots+\sigma_{(n-2)\times(n-2)}+\sigma_{(n-1)\times(n-1)}+\sigma_{n\times n},$$

$$\sigma_{n\times n\times n}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

# 4 Примеры

**Пример 4.1.**

На рисунке 4.1 показан общий вид кубической матрицы из $\Sigma_{3\times 3\times 3}(P)$. На рисунках 4.2 – 4.4 показаны сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ этой кубической матрицы.

На рисунке 4.5 указаны два способа "сборки" кубической матрицы (4.1), из которых первый соответствует теореме 3.1. Кубическая матрица второго порядка, с которой начинается "сборка" окрашена красным цветом; пристраиваемые грани – матрицы третьего порядка окрашены зелёным цветом.

Следующий пример показывает, что множество всех кубических матриц $A$ порядка $n$ над $P$, обладающих свойством

$$\det{}^{(i)}A = \det{}^{(j)}A = \det{}^{(k)}A$$

шире множества $\Sigma_{n\times n\times n}(P)$.

**Пример 4.2.**

Для кубической матрицы, изображенной на рисунке 4.6, выпишем все её сечения

$$(a_{1jk}) = (a_{i1k}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (a_{ij1}),$$

$$(a_{2jk}) = (a_{i2k}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (a_{ij2}).$$

Следовательно,

$$A \notin \Sigma_{2\times 2\times 2}(P).$$

С другой стороны,

$$\det(a_{1jk}) = \det(a_{i1k}) = \det(a_{ij1}) = 1,$$

$$\det(a_{2jk}) = \det(a_{i2k}) = \det(a_{ij2}) = -1,$$

откуда следует

$$\det{}^{(i)}A = \det(a_{1jk})\det(a_{2jk}) = 1(-1) = -1,$$

$$\det{}^{(j)}A = \det(a_{i1k})\det(a_{i2k}) = 1(-1) = -1,$$

$$\det{}^{(k)}A = \det(a_{ij1})\det(a_{ij2})) = 1(-1) = -1.$$

Таким образом, кубическая матрица $A$ обладает свойством

$$\det{}^{(i)}A = \det{}^{(j)}A = \det{}^{(k)}A,$$

но не принадлежит множеству $\Sigma_{2\times 2\times 2}(P)$.

Представляет интерес следующий естественный

**Вопрос 4.1**. *Существуют ли вне математики, в частности в природе, объекты, которые можно рассматривать как аналоги кубических матриц из* $\Sigma_{n\times n\times n}(P)$?

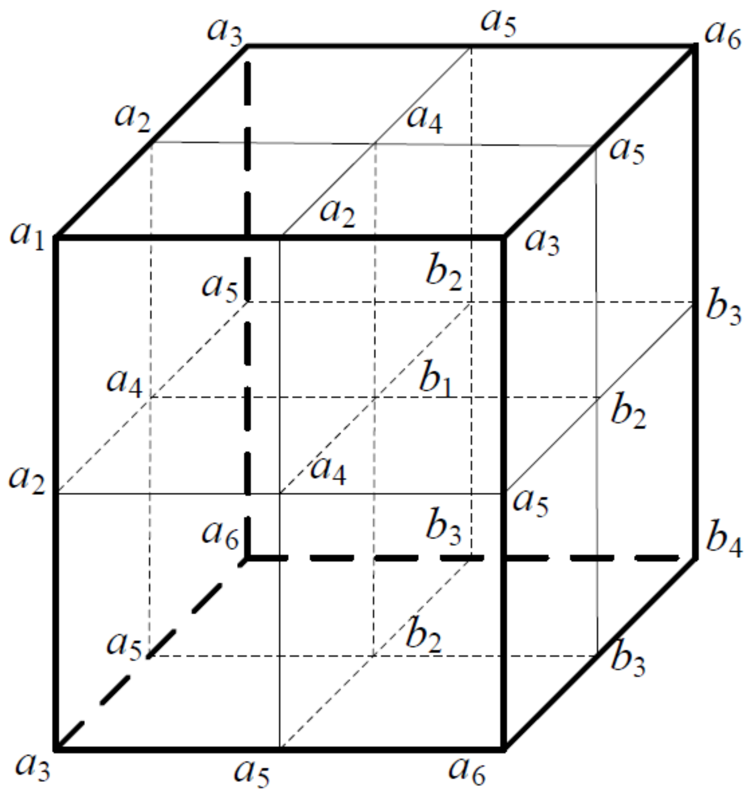
$a_3$
$a_5$
$a_6$
$a_2$
$a_4$
$a_5$
$a_2$
$a_1$
$a_3$
$a_5$
$b_2$
$b_3$
$a_4$
$b_1$
$b_2$
$a_2$
$a_4$
$a_5$
$a_6$
$b_3$
$b_4$
$a_5$
$b_2$
$b_3$
$a_3$
$a_5$
$a_6$

Рис. 4.1:

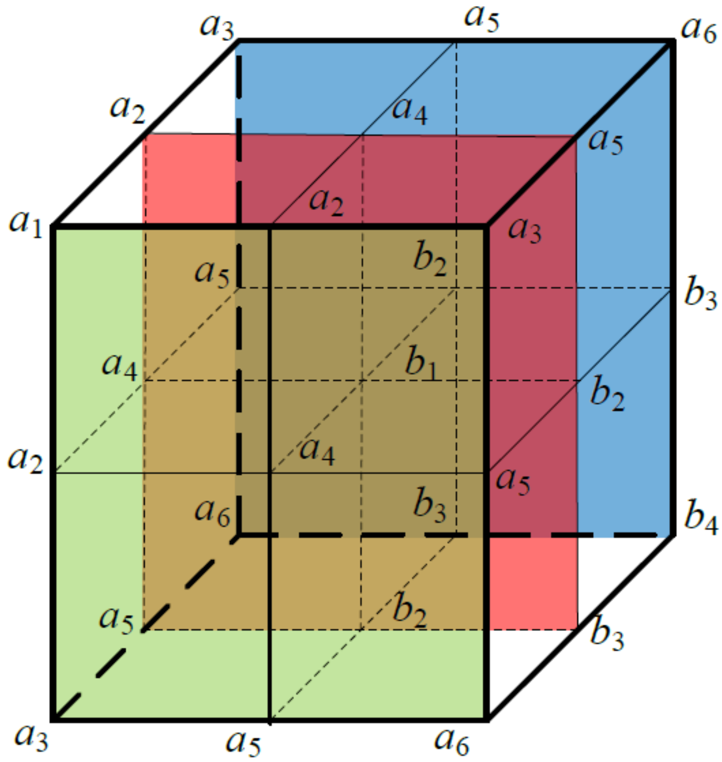
$a_3$
$a_5$
$a_6$
$a_2$
$a_4$
$a_5$
$a_2$
$a_1$
$a_3$
$b_2$
$a_5$
$b_3$
$a_4$
$b_1$
$b_2$
$a_2$
$a_4$
$a_5$
$a_6$
$b_3$
$b_4$
$a_5$
$b_2$
$b_3$
$a_3$
$a_5$
$a_6$

Рис. 4.2:

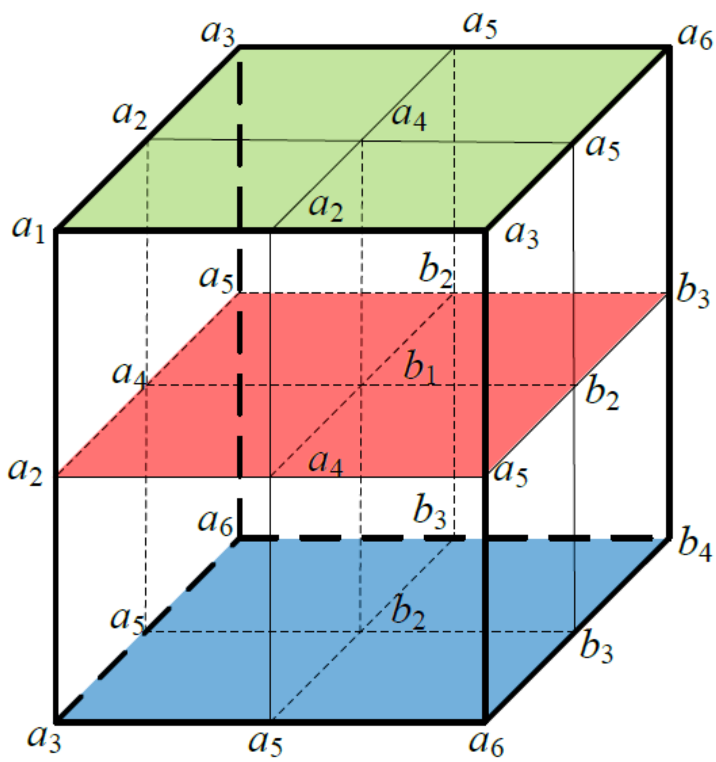
$a_3$
$a_5$
$a_6$
$a_2$
$a_4$
$a_5$
$a_1$
$a_2$
$a_3$
$a_5$
$b_2$
$b_3$
$a_4$
$b_1$
$b_2$
$a_2$
$a_4$
$a_5$
$a_6$
$b_3$
$b_4$
$a_5$
$b_2$
$b_3$
$a_3$
$a_5$
$a_6$

Рис. 4.3:

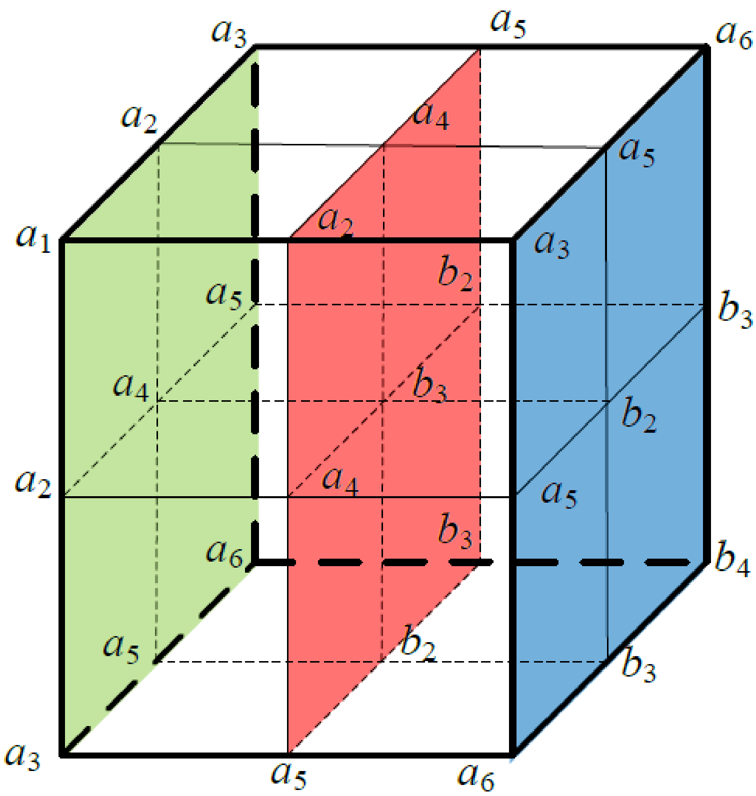
$a_3$
$a_5$
$a_6$
$a_2$
$a_4$
$a_5$
$a_1$
$a_2$
$a_3$
$b_2$
$a_5$
$b_3$
$a_4$
$b_3$
$b_2$
$a_2$
$a_4$
$a_5$
$a_6$
$b_3$
$b_4$
$a_5$
$b_2$
$b_3$
$a_3$
$a_5$
$a_6$

Рис. 4.4:

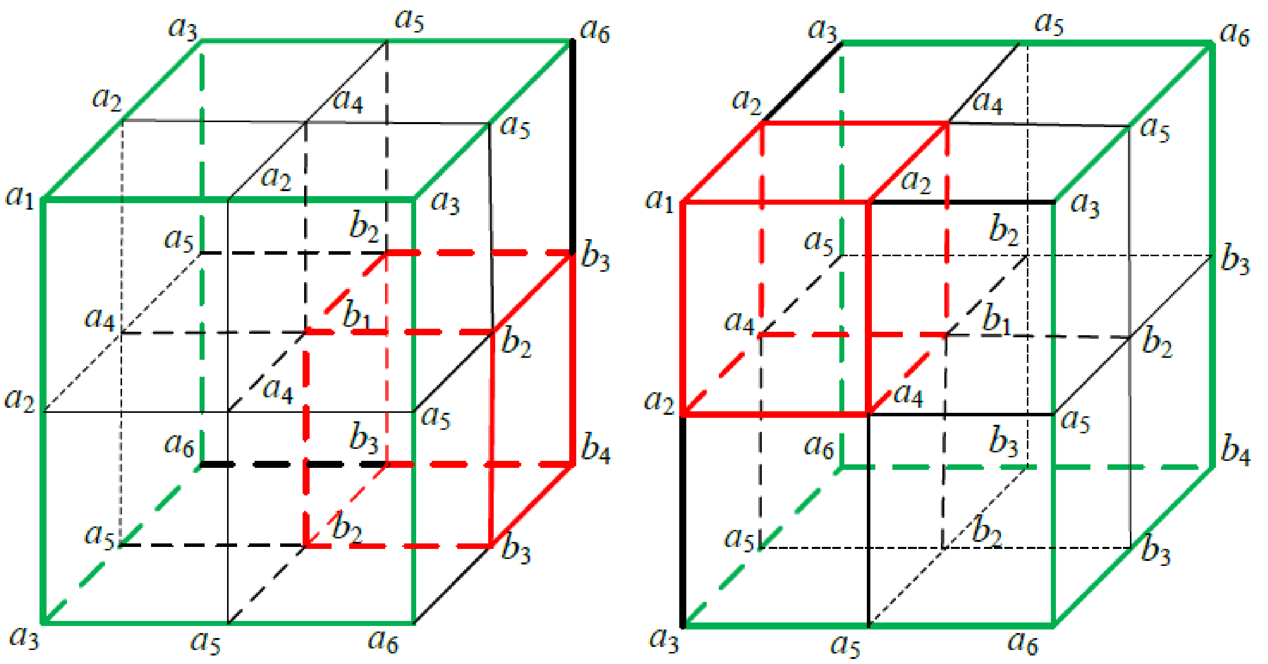
$a_3$ $a_5$ $a_6$
$a_2$ $a_4$ $a_5$
$a_1$ $a_2$ $a_3$
$a_5$ $b_2$ $b_3$
$a_4$ $b_1$ $b_2$
$a_2$ $a_4$ $a_5$
$a_6$ $b_3$ $b_4$
$a_5$ $b_2$ $b_3$
$a_3$ $a_5$ $a_6$
$a_3$ $a_5$ $a_6$
$a_2$ $a_4$ $a_5$
$a_1$ $a_2$ $a_3$
$a_5$ $b_2$ $b_3$
$a_4$ $b_1$ $b_2$
$a_2$ $a_4$ $a_5$
$a_6$ $b_3$ $b_4$
$a_5$ $b_2$ $b_3$
$a_3$ $a_5$ $a_6$

Рис. 4.5:

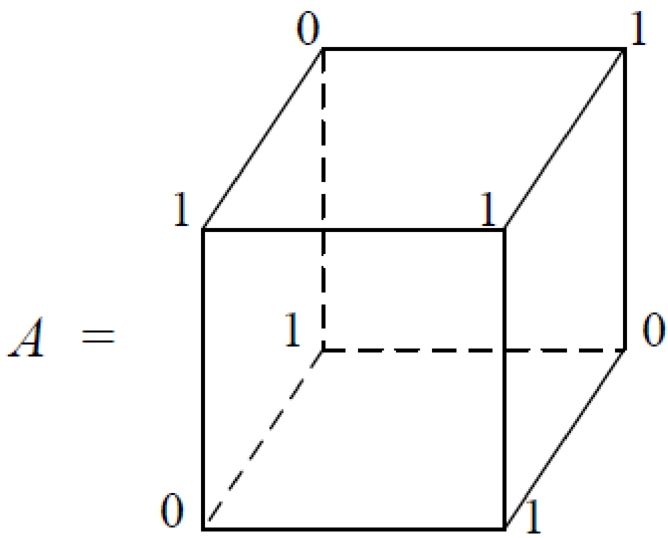
$A =$
0 1
1 1
1 0
0 1

Рис. 4.6:

## 5 Множество $\mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)$

Прежде, чем ответить положительно на вопрос 4.1, выделим во множестве $\mathbf{M}_{n\times n\times n}(P)$ подмножество $\mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)$ всех кубических матриц порядка $n$ над $P$, у которых в каждом сечении любой ориентации все элементы симметричны как относительно главной диагонали, так и относительно побочной диагонали.

**Замечание 5.1**. Так как у любой кубической матрицы из $\mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)$ все сечения любой ориентации являются симметрическими матрицами, то в силу теоремы 3.2, $\mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)$ – подмножество множества $\Sigma_{n\times n\times n}(P)$.

Легко проверить справедливость следующих двух утверждений.

**Лемма 5.1**. *Множество* $\mathbf{K}_{2\times 2\times 2}(P)$ *совпадает с множеством всех кубических матриц второго порядка вида*

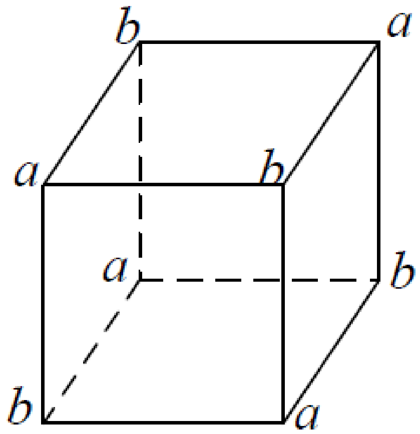


Рис. 5.1:

**Лемма 5.2**. *Множество* $\mathbf{K}_{3\times 3\times 3}(P)$ *совпадает с множеством всех кубических матриц третьего порядка вида*

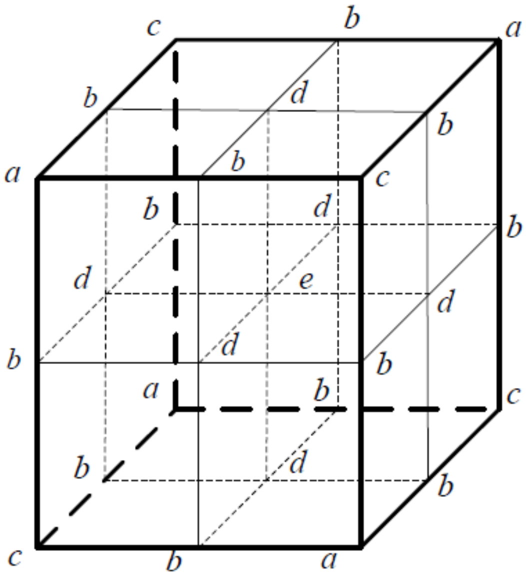


Рис. 5.2:

Две строки (два столбца, строку и столбец) назовём *инверсными* по отношению друг к другу или *взаимно инверсными*, если они составлены из одних и тех же элементов, записанных в обратном порядке.

Таким образом, взаимно инверсные строки имеют следующий вид

$$(a_1a_2\dots a_{n-1}a_n), (a_na_{n-1}\dots a_2a_1).$$

Строки $(a_1a_2\dots a_{n-1}a_n)$ и $(b_1b_2\dots b_{n-1}b_n)$ взаимно инверсны тогда и только тогда, когда $b_r = a_{n-r+1}$ для любого $r = 1,\dots,n$.

Обозначим через $\mathbf{K}_{n\times n}(P)$ множество всех матриц порядка $n$ над $P$, симметричных как относительно главной диагонали, так и относительно побочной диагонали.

Таким образом, множество $\mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)$ совпадает с множеством всех кубических матриц порядка $n$ над $P$, у которых все сечения любой ориентации принадлежат множеству $\mathbf{K}_{n\times n}(P)$.

**Замечание 5.2**. *Для любой матрицы* $A = (a_{ij}) \in \mathbf{K}_{n\times n}(P)$ *верны равенства*

$$a_{ij} = a_{ji} = a_{(n-i+1)(n-j+1)} = a_{(n-j+1)(n-i+1)},$$

*где* $i, j = 1,\dots,n$. *Точнее,* $A = (a_{ij}) \in \mathbf{K}_{n\times n}(P)$ *тогда и только тогда, когда*

$$a_{ij} = a_{ji} = a_{(n-i+1)(n-j+1)}, i, j = 1,\dots,n$$

или

$$a_{ij} = a_{ji} = a_{(n-j+1)(n-i+1)}, i, j = 1,\dots,n.$$

**Замечание 5.3**. *Если* $A \in \mathbf{K}_{n\times n}(P)$, *то у такой матрицы для любого* $r = 1,\dots,n$ *строки (столбцы) с номерами* $r$ и $n-r+1$ *взаимно инверсны. Взаимно инверсны также* $r$*-ая строка и* $(n-r+1)$*-ый столбец.*

Две матрицы назовём *строчно инверсными* (*столбцово инверсными*) по отношению друг к другу или *взаимно инверсными по строкам* (*по столбцам*), если они составлены из одних и тех же строк (столбцов), расположенных в обратном порядке.

Матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ взаимно инверсны по строкам (по столбцам) тогда и только тогда, когда $B^{(r)} = A^{(n-r+1)}$ $(B_{(r)} = A_{(n-r+1)})$ для любого $r = 1,\dots,n$.

В следующем предложении символом ${}_nE$ обозначена матрица $n$-го порядка, у которой все элементы на побочной диагонали равны единице поля $P$, а все остальные элементы равны его нулю.

**Предложение 5.1**. *Если* $A \in \mathbf{K}_{n\times n}(P)$, *матрица* $B$ (матрица $C$) *инверсна по строкам* (*по столбцам*) *к матрице* $A$, *то*:

$$B = C \in \mathbf{K}_{n\times n}(P);$$

$$B = C = {}_nEA = A_nE.$$

**Замечание 5.4**. Предложение 5.1 позволяет для матриц из $\mathbf{K}_{n\times n}(P)$ не различать взаимную инверсность по строкам и по столбцам, а говорить просто о взаимной инверсности.

**Предложение 5.2**. *У любой кубической матрицы* $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)$ *для любого* $r = 1, 2,\dots,n$ *её* $r$*-ое сечение и* $(n-r+1)$*-ое сечение ориентации* $(i)$ (*ориентации* $(j)$, *ориентации* $(k)$) *взаимно инверсны и по строкам и по столбцам.*

***Доказательство***. Пусть $U = (a_{irk})$ и $V = (a_{i(n-r+1)k})$ – соответственно $r$-ое и $(n-r+1)$-ое сечения ориентации $(j)$ кубической матрицы $A$. Выберем произвольно $t, s \in \{1, 2,\dots,n\}$ и пусть $W$ – $t$-ое сечение ориентации $(i)$ этой же кубической матрицы $A$, $U_{(s)}$ – $s$-ый столбец сечения $U$, $V_{(n-s+1)}$ – $(n-s+1)$-ый столбец сечения $V$.

Далее для наглядности будем пользоваться изображением указанных сечений кубической матрицы $A$, показанных на рисунке 5.1.

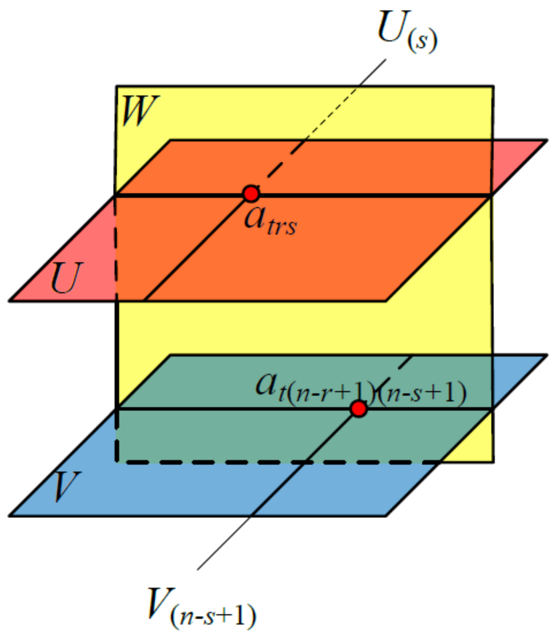


Рис. 5.3:

Так как $W \in \mathbf{K}_{n\times n}(P)$, то показанные на рис. 5.1 элементы $a_{trs}$ и $a_{t(n-r+1)(n-s+1)}$ этого сечения совпадают: $a_{trs} = a_{t(n-r+1)(n-s+1)}$. А так как последнее равенство верно для любого $t \in \{1, 2, \dots, n\}$, то $U_{(s)} = V_{(n-s+1)}$. Следовательно, сечения $U$ и $V$ взаимно инверсны по столбцам.

Аналогично доказывается взаимная инверсность сечений $U$ и $V$ по строкам. Это же следует из доказанной выше взаимной инверсности сечений $U$ и $V$ по столбцам и условия $U, V \in \mathbf{K}_{n\times n}(P)$.

Для направлений $(i)$ и $(k)$ можно провести независимое доказательство, а можно воспользоваться доказанной выше взаимной инверсностью сечений ориентации $(j)$, включением $\mathbf{K}_{n\times n\times n}(P) \subseteq \Sigma_{n\times n\times n}(P)$ и предложением 2.1. Предложение доказано.

Полагая в предложении 5.2 $r = 1$ или $r = n$, получим

**Следствие 5.1**. *У любой кубической матрицы* $A \in \mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)$ *её первые и* $n$*-ые сечения ориентации* $(i)$ (*ориентации* $(j)$, *ориентации* $(k)$) *взаимно инверсны и по строкам и по столбцам.*

**Замечание 5.5**. Для $n = 2$ и $n = 3$ предложение 5.2 и следствие 5.1 иллюстрируются кубическими матрицами на рисунках 5.1 и 5.2.

Обозначим через $\mathbf{K}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P)$ множество всех кубических матриц порядка $n$ над $P$, у которых первые сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ совпадают с некоторой матрицей $A \in \mathbf{K}_{n\times n}(P)$, а последние, то есть $n$-ые сечения, ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$, совпадают с матрицей $B$, инверсной к матрице $A$.

Множество $\mathbf{K}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P)$ – непусто.

Если у кубической матрицы $A$ порядка $n$ над $P$ удалить первые и последние сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$, то получится кубическая подматрица порядка $n-2$ над $P$, которую будем обозначать символом ${}^{\neg 1,n}A$.

Обозначим через ${}^{\neg 1,n}\mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)$ множество всех кубических матриц порядка $n$ над кольцом $P$, у которых кубическая подматрица ${}^{\neg 1,n}A$ принадлежит множеству $\mathbf{K}_{(n-2)\times(n-2)\times(n-2)}(P)$.

Для $n=0$ считаем $\mathbf{K}_{0\times 0\times 0}(P)=\varnothing$, а для $n=1$ полагаем $\mathbf{K}_{1\times 1\times 1}(P)=P$.

**Теорема 5.1**. *Для любого целого $n\geqslant 2$ верно равенство*

$$\mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)=\mathbf{K}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P)\cap{}^{\neg 1,n}\mathbf{K}_{n\times n\times n}(P).$$

***Доказательство***. Так как согласно лемме 5.1, любая кубическая матрица из $\mathrm{K}_{2\times 2\times 2}(P)$ имеет вид показанный на рис. 5.1, то

$$\mathbf{K}^{[1,2]}_{2\times 2\times 2}(P)=\mathbf{K}_{2\times 2\times 2}(P).$$

Кроме того, из условия $\mathrm{K}_{0\times 0\times 0}(P)=\varnothing$ следует

$${}^{\neg 1,2}\mathbf{K}_{2\times 2\times 2}(P)=\mathbf{M}_{2\times 2\times 2}(P).$$

Поэтому при $n=2$ равенство из формулировки теоремы верно.

Так как согласно лемме 5.2, любая кубическая матрица из $\mathbf{K}_{3\times 3\times 3}(P)$ имеет вид показанный на рис. 5.2, то

$$\mathbf{K}^{[1,3]}_{3\times 3\times 3}(P)=\mathbf{K}_{3\times 3\times 3}(P).$$

Кроме того, из условия $\mathbf{K}_{1\times 1\times 1}(P)=P$ следует

$${}^{\neg 1,3}\mathbf{K}_{3\times 3\times 3}(P)=\mathbf{M}_{3\times 3\times 3}(P).$$

Поэтому при $n=3$ равенство из формулировки теоремы также верно.

Далее считаем $n\geqslant 4$.

Пусть

$$A\in\mathbf{K}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P)\cap{}^{\neg 1,n}\mathbf{K}_{n\times n\times n}(P).$$

Выберем произвольно $r,s\in\{1,2,n\}$ и пусть $U$ – $r$-ое сечение ориентации $(i)$ кубической матрицы $A$, отличное от первого и последнего сечений этой ориентации.

Далее для наглядности будем пользоваться рисунком 5.4, на котором изображены: кубическая матрица $A$ (внешний куб); её кубическая подматрица $B={}^{\neg 1,n}A$ (внутренний куб); сечение $U$, окрашенное жёлтым цветом; окрашенная синим цветом подматрица $V$ сечения $U$, являющаяся сечением ориентации $(i)$ кубической подматрицы $B$; элементы

$$a_{r1s}=a_{rs1}=a_{rn(n-s+1)}=a_{r(n-s+1)n}$$

сечения $U$.

Так как $A\in{}^{\neg 1,n}\mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)$, то $B\in\mathbf{K}_{(n-2)\times(n-2)\times(n-2)}(P)$. Поэтому все элементы подматрицы $V$ симметричны как относительно её главной диагонали, так и относительно её побочной диагонали, а значит они симметричны как относительно главной диагонали, так и относительно побочной диагонали сечения $U$.

Так как $A\in\mathbf{K}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P)$, то первое сечение ориентации $(j)$ совпадает с первым сечением ориентаций $(k)$, а значит, совпадают элементы $a_{r1s}$ и $a_{rs1}$. Из условия $A\in\mathbf{K}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P)$ следует также, что первое и последнее сечения ориентации $(j)$ являются взаимно инверсными по столбцам, откуда вытекает совпадение элементов $a_{r1s}$ и $a_{rn(n-s+1)}$. Совпадение элементов $a_{rn(n-s+1)}$ и $a_{r(n-s+1)n}$ является следствием совпадения последнего сечение ориентации $(j)$ с последним сечением ориентации $(k)$. Полученные равенства,

$$a_{r1s}=a_{rs1}=a_{rn(n-s+1)}=a_{r(n-s+1)n},\quad s=1,2,\ldots,n-2$$

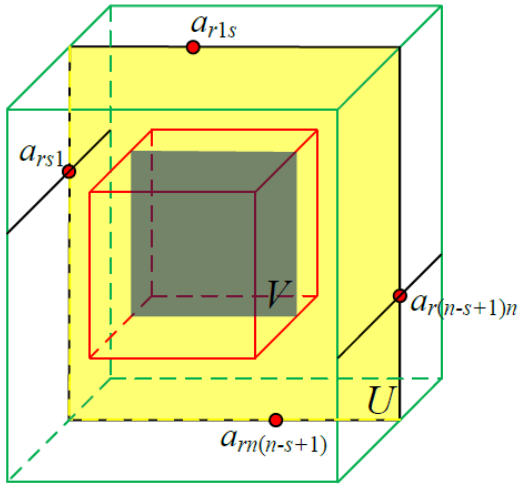


Рис. 5.4:

означают, что все элементы сечения $U$ являются симметричными как относительно главной диагонали, так и относительно побочной диагонали, то есть $U \in \mathbf{K}_{n\times n}(P)$. А так как это верно для любого $r = 1, 2, \ldots, n-2$, и, кроме того, из условия $A \in \mathbf{K}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P)$ следует, что первые и последние сечения ориентации $(i)$ кубической матрицы $A$ также принадлежат множеству $\mathbf{K}_{n\times n}(P)$, то все сечения ориентации $(i)$ кубической матрицы $A$ принадлежат множеству $\mathbf{K}_{n\times n}(P)$.

Аналогично доказывается, что все сечения ориентаций $(j)$ и $(k)$ кубической матрицы $A$ принадлежат множеству $\mathbf{K}_{n\times n}(P)$. Следовательно, $A \in \mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)$, тем самым доказано включение

$$\mathbf{K}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P) \cap^{\neg 1,n} \mathbf{K}_{n\times n\times n}(P) \subseteq \mathbf{K}_{n\times n\times n}(P).$$

Снова обратимся к приведенному выше рисунку, считая, что теперь на нём изображена произвольная кубическая матрица $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)$. Ясно, что

$$A \in^{\neg 1,n} \mathbf{K}_{n\times n\times n}(P).$$

Так как $A \in \Sigma_{n\times n\times n}(P)$, то по теореме 3.2 первые сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ кубической матрицы $A$ совпадают, совпадают и её последние сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$.

Выберем произвольно $r, s \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Так как $A \in \mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)$, то для $r$-го сечения $U$ ориентации $(i)$ кубической матрицы $A$ верно $U \in \mathbf{K}_{n\times n}(P)$, откуда следует равенство $a_{rs1} = a_{r(n-s+1)n}$. Это равенство означает, что первое и последнее сечения ориентации $(k)$ кубической матрицы $A$ взаимно инверсны по столбцам. А в силу отмеченных в предыдущем абзаце совпадений соответствующих сечений, взаимно инверсными будут также первое и последнее сечения ориентации $(i)$ и первое и последнее сечения ориентации $(j)$.

Следовательно, $A \in \mathbf{K}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P)$, и более того,

$$A \in \mathbf{K}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P) \cap^{\neg 1,n} \mathbf{K}_{n\times n\times n}(P).$$

Тем самым доказано включение

$$\mathbf{K}_{n\times n\times n}(P) \subseteq \mathbf{K}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P) \cap^{\neg 1,n} \mathbf{K}_{n\times n\times n}(P),$$

а значит и требуемое равенство. Теорема доказана.

**Замечание 5.6.** Теорема 5.1 даёт способ конструирования всех кубических матриц из $\mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)$ для любого $n$.

Вначале фиксируем множество $\mathbf{K}_{2\times2\times2}(P)$ (множество $\mathbf{K}_{3\times3\times3}(P)$), которое согласно лемме 5.1 (лемме 5.2), совпадает с множеством всех кубических матриц второго порядка изоюраженных на рис. 5.1 (третьего порядка рис. 5.2).

Затем для любой кубической матрицы из $\mathbf{K}_{2\times2\times2}(P)$ (из $\mathrm{K}_{3\times3\times3}(P)$) и любой матрицы четвёртого порядка из $\mathbf{K}_{4\times4}(P)$ (пятого порядка из $\mathbf{K}_{5\times5}(P)$) строится кубическая матрица четвёртого (пятого) порядка, у которой: первые сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ совпадают с выбранной матрицей четвёртого (пятого) порядка; последние сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ взаимно инверсны к выбранной матрице; кубическая подматрица, получающаяся удалением этих первых и последних сечений, совпадает с выбранной кубической матрицей из $\mathbf{K}_{2\times2\times2}(P)$ (из $\mathbf{K}_{3\times3\times3}(P)$). Согласно теореме 5.1, множество всех таких кубических матриц совпадает с множеством $\mathbf{K}_{4\times4\times4}(P)$ (с множеством $\mathbf{K}_{5\times5\times5}(P)$).

Далее с помощью кубических матриц из $\mathbf{K}_{4\times4\times4}(P)$ (из $\mathbf{K}_{5\times5\times5}(P)$) и матриц шестого (седьмого) порядка аналогично конструируется множество $\mathbf{K}_{6\times6\times6}(P)$ (множество $\mathbf{K}_{7\times7\times7}(P)$).

После того, как построено множество $\mathbf{K}_{(n-2)\times(n-2)\times(n-2)}(P)$, с помощью кубических матриц из этого множества и матриц $n$-го порядка из $\mathbf{K}_{n\times n}(P)$ строится множество $\mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)$.

Заметим, что описанная выше процедура "сборки" кубических матриц из множества $\mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)$ удобна для написания компьютерной программы, реализующей их получение для больших $n$.

Обозначим через $k_{n\times n}$ максимальное число различных элементов, которые может иметь матрица из $\mathbf{K}_{n\times n}(P)$. Например,

$$k_{1\times1}=1,\quad k_{2\times2}=2,\quad k_{3\times3}=4.$$

В общем случае для чётных $n=2t$ число $k_{2t\times2t}$ совпадает с суммой $t$ первых членов арифметической прогрессии $2,4,\ldots,2t$:

$$k_{2t\times2t}=(1+t)t,$$

а для нечётных $n=2t-1$ число $k_{(2t-1)\times(2t-1)}$ совпадает с суммой $t$ первых членов арифметической прогрессии $1,3,\ldots,2t-1$:

$$k_{(2t-1)\times(2t-1)}=t^2.$$

Обозначим через $k_{n\times n\times n}$ максимальное число различных элементов, которые может иметь кубическая матрица из $\mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)$. Например, $k_{1\times1\times1}=1$, кроме того, как показывают леммы 5.1 и 5.2,

$$k_{2\times2\times2}=2,\quad k_{3\times3\times3}=5.$$

Согласно теореме 5.1, у любой кубической матрицы из $\mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)$ все первые и последние сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ состоят из одних и тех же элементов (первые сечения совпадают с некоторой матрицей $A$ из $\mathbf{K}_{n\times n}(P)$, последние сечения совпадают с матрицей $B$, инверсной к матрице $A$), а кубическая подматрица, получающаяся из неё удалением всех первых и последних сечений, является кубической матрицей из $\mathbf{K}_{(n-2)\times(n-2)\times(n-2)}(P)$. Поэтому верно равенство

$$k_{n\times n\times n}=k_{(n-2)\times(n-2)\times(n-2)}+k_{n\times n}.$$

Последнее равенство включает случай $n=1$, если второе слагаемое в нём считать равным нулю.

Для чётных $n=2t$ имеем

$$k_{2t\times 2t\times 2t} = k_{2\times 2} + k_{4\times 4} + \ldots + k_{2(t-1)\times 2(t-1)} + k_{2t\times 2t}.$$

Последнюю формулу можно переписать следующим образом

$$k_{2t\times 2t\times 2t} = 2 + 6 + 12 + \cdots + t(t+1) = \frac{t(t+1)(t+2)}{3}.$$

Для нечётных $n=2t-1$ имеем

$$k_{(2t-1)\times(2t-1)\times(2t-1)} = k_{1\times 1} + k_{3\times 3} + \cdots + k_{(2(t-1)-1)\times(2(t-1)-1)} + k_{(2t-1)\times(2t-1)}.$$

Последнюю формулу можно переписать следующим образом

$$k_{(2t-1)\times(2t-1)\times(2t-1)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + t^2 = \frac{t(t+1)(2t+1)}{6}.$$

Таким образом, имеет место

**Предложение 5.3**. *Для любого целого $n \geqslant 2$ верно равенство*

$$k_{n\times n\times n} = k_{(n-2)\times(n-2)\times(n-2)} + k_{n\times n}.$$

*Если* $n=2t$, то

$$k_{2t\times 2t\times 2t} = k_{2\times 2} + k_{4\times 4} + \ldots + k_{2t\times 2t},$$

$$k_{2t\times 2t\times 2t} = \frac{t(t+1)(t+2)}{3}.$$

*Если* $n=2t+1$, то

$$k_{(2t-1)\times(2t-1)\times(2t-1)} = k_{1\times 1} + k_{3\times 3} \ldots + k_{(2t-1)\times(2t-1)},$$

$$k_{(2t-1)\times(2t-1)\times(2t-1)} = \frac{t(t+1)(2t+1)}{6}.$$

## 6 Кристаллохимические аналогии

В этом разделе будут использоваться общеизвестные факты (см., например, книги [4–6]) о кристаллических решетках некоторых металлов и соединений.

На рисунке 6.1 показана элементарная ячейка кристаллической решётки хлористого натрия (поваренной соли). Цветом выделены сечения ориентации $(k)$: первое и третье – красным цветом, второе – голубым цветом. Если ионам хлора и натрия поставить в соответствие два разных элемента $a$ и $b$ – некоторого кольца $P$ (для определённости можно считать, например, $a=0$, $b=1$), то элементарную ячейку кристаллической решётки NaCl можно отождествить с кубической матрицей над $P$, изображенной на рисунке 6.2, которая является частным случаем ($a=c=d$, $b=e$) кубической матрицы на рис. 5.2.

Легко заметить, что кубическая матрица, изображённая на рис. 6.2, принадлежит множеству $\Sigma_{3\times 3\times 3}(P)$, так как для любого $r=1,2,3$ $r$-ые сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ совпадают. Более точно, она принадлежит подмножеству $\mathbf{K}_{3\times 3\times 3}(P)$ множества $\Sigma_{3\times 3\times 3}(P)$, так как все сечения любой ориентаций являются симметричными не только относительно главной диагонали, но и относительно побочной диагонали. Можно также заметить, что первые и третьи сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$, то есть все шесть граней элементарной

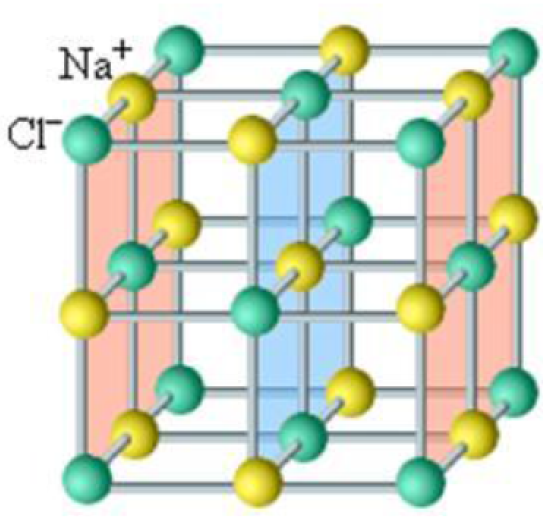


Рис. 6.1:

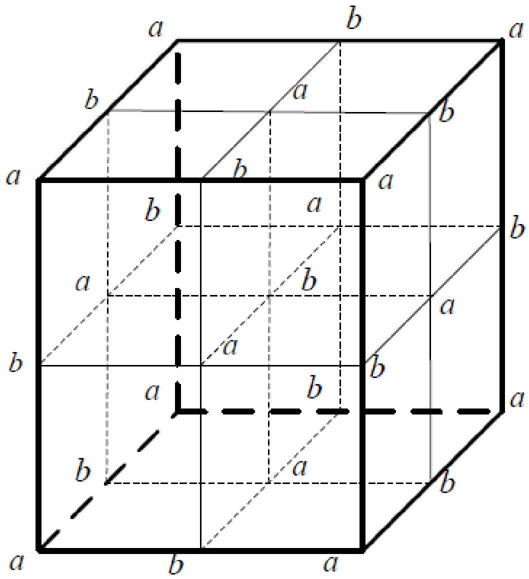


Рис. 6.2:

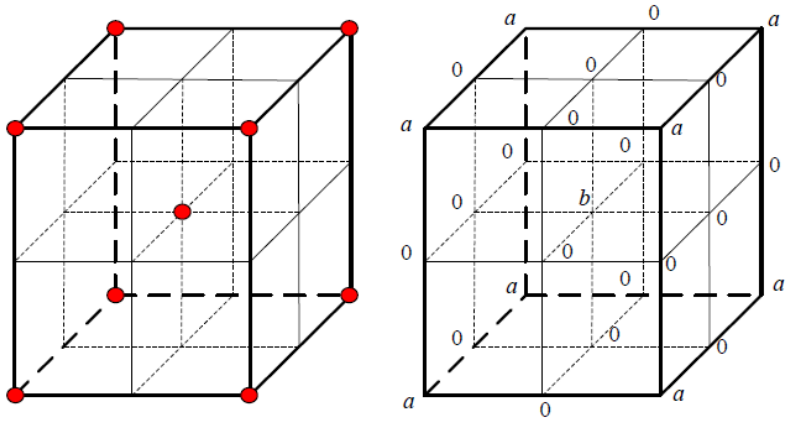


Рис. 6.3:

ячейки, совпадают с одной и той же матрицей $\begin{pmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$ третьего порядка. Такое совпадение гарантирует получение кристаллической решётки NaCl, с помощью трансляций элементарной ячейки в каждом из трёх взаимно перпендикулярных направлений.

**Замечание 6.1**. Так как в узлах элементарных ячеек кристаллической решётки хлористого натрия присутствуют ионы только двух видов, то для кубической матрицы, изображённой на рис. 6.2, можно ограничиться двухэлементным кольцом.

**Замечание 6.2**. Ясно, что элементарные ячейки любой кристаллической решётки, построенной по типу кристаллической решётки хлористого натрия, отождествляются с одной и той же кубической матрицей, а именно с указанной выше кубической матрицей, изображённой на рис. 6.2. В частности, это относится к галогенидам щелочных металлов, у которых кристаллические решётки, имеют тот же вид, что и кристаллическая решётка хлористого натрия. У галогенидов цезия, которые, как известно, кристаллизуются по типу вольфрама, элементарные ячейки являются объёмноцентрированными.

Объёмноцентрированным и гранецентрированным элементарным ячейкам также можно ставить в соответствие кубические матрицы третьего порядка. В таких кубических матрицах, изображённых на рисунках 6.3 и 6.4, элементы, соответствующие узлам элементарной ячейки, равны ненулевым элементам кольца, а все остальные элементы равны нулю кольца.

Заметим, что кубическая матрица, изображённая на рис. 6.4 имеет вид показанный на рис. 5.2 только при $b = c = d$.

Например, объёмноцентрированной элементарной ячейке кристаллической решётки хлористого цезия соответствует кубическая матрица третьего порядка, изображённая на рис. 6.3, в которой ион цезия отождествляется с элементом $b$, а ионы хлора отождествляются с элементами $a$. Эта же кубическая матрица соответствует не только CsCl, но и многим другим соединениям, кристаллизующимся по типу хлористого цезия.

Объёмноцентрированной элементарной ячейке кристаллической решётки вольфрама соответствует кубическая матрица третьего порядка, изображённая на рисунке 6.5.

Эта кубическая матрица является частным случаем кубической матрицы, изображённой на рис. 6.3, если в ней элементы $a$ и $b$ совпадают и отождествляются с атомами вольфрама. Эта же кубическая матрица соответствует не только вольфраму, но и многим другим химическим элементам, кристаллизующимся по типу вольфрама: тугоплавким металлам (ванадий, гафний, молибден, ниобий, тантал, титан, хром, цирконий); щелочным элементам (калий, литий, натрий, рубидий, цезий); щелочноземельным элементам (стронций, барий); актинидам (уран, нептуний, плутоний).

Гранецентрированной элементарной ячейке кристаллической решётки меди соответствуют кубическая матрица третьего порядка, изображённая на рисунке 6.6.

Эта кубическая матрица является частным случаем кубической матрицы, изображённой на рис. 6.4, если в ней элементы $a$, $b$, $c$ и $d$ совпадают и отождествляются с атомами меди. Эта же кубическая матрица соответствует не только меди, но и многим другим химическим элементам, кристаллизующимся по типу меди (алюминий, никель, свинец, торий, платина, золото, серебро и др.).

Гранецентрированным элементарным ячейкам кристаллических решёток твёрдых растворов Au и Cu в разных фазах могут соответствовать разные кубические матрицы третьего порядка. Например, $Cu_3Au$ соответствует кубическая матрица, изображённая на рисунке 6.7 (элементы $a$ соответствуют атомам золота, а элементы $b$ соответствуют атомам меди).

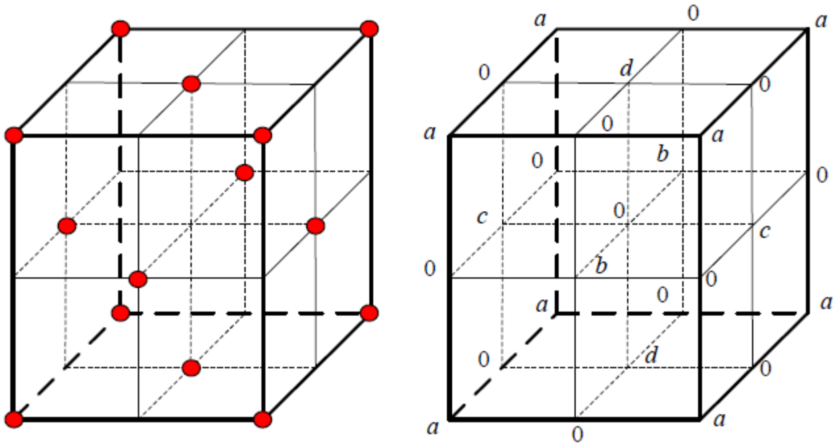


Рис. 6.4:

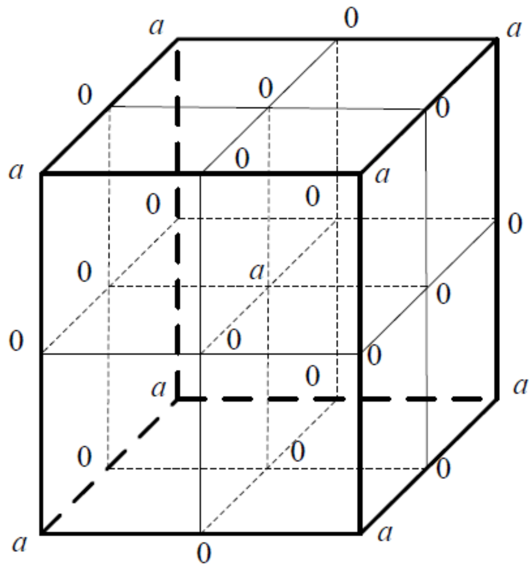


Рис. 6.5:

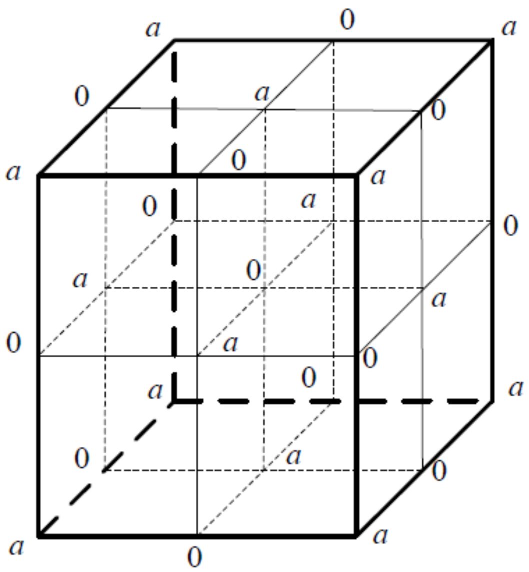


Рис. 6.6:

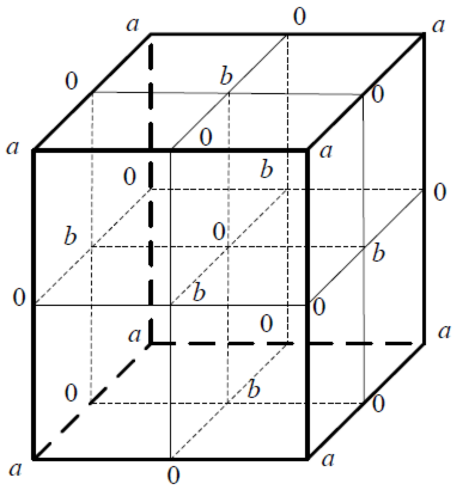


Рис. 6.7:

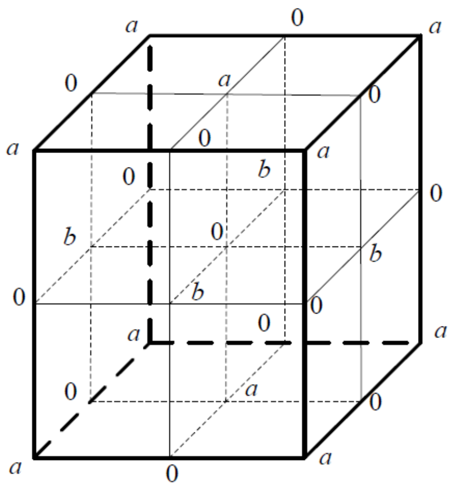


Рис. 6.8:

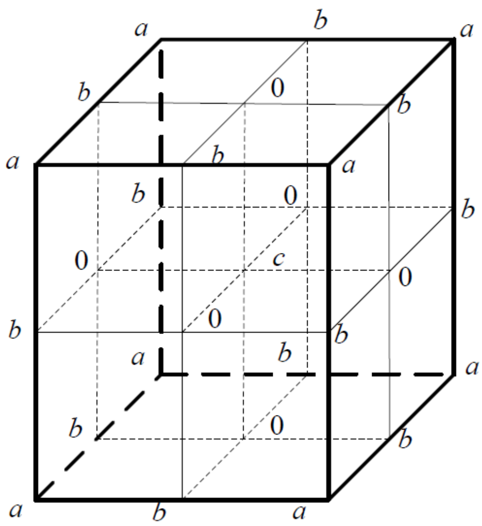


Рис. 6.9:

Эта кубическая матрица является частным случаем кубической матрицы, изображённой на рис. 6.4, если в ней элементы $b$, $c$ и $d$ совпадают и отождествляются с атомами меди. Кроме того, она принадлежит множеству $\mathbf{K}_{3\times3\times3}(P)$.

Твёрдому раствору CuAu соответствует кубическая матрица третьего порядка, изображённая на рисунке 6.8.

Эта кубическая матрица также является частным случаем кубической матрицы, изображённой на рис. 6.4, если в ней: элементы $a$ и $d$ совпадают и отождествляются с атомами золота; элементы $b$ и $c$ совпадают и отождествляются с атомами меди. При этом она не принадлежит множеству $\mathbf{K}_{3\times3\times3}(P)$ и даже не является симметрической.

Элементарным ячейкам кристаллических решёток перовскита $CaTiO_3$ и кристаллизующимся по его типу соединений также может быть поставлена в соответствие кубическая матрица из $\mathbf{K}_{3\times3\times3}(P)$ на рис. 5.2. Это сделано на рисунке 6.9, где ионы титана, кислорода и кальция отождествляются соответственно с элементами $a$, $b$ и $c$ кольца $P$.

**Замечание 6.3**. Если не ограничиваться кубическими элементарными ячейками и кубическими матрицами, то можно пойти дальше и определить соответствие между тетрагональными элементарными ячейками и пространственными матрицами, у которых два размера совпадают, а третий размер отличен от них. Аналогично, устанавливается соответствие между ромбическими элементарными ячейками и пространственными матрицами, у которых все три размера различны.

## 7 Инверсные кубические матрицы

Во множестве $\mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)$ имеются кубические матрицы, у которых первые и последние сечения одной и той же ориентации не совпадают. Уже только по этой причине такие кубические матрицы при $n=3$ не могут иметь прототипов среди элементарных ячеек кристаллических решеток. Сказанное наводит на мысль о выделении во множестве $\mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)$ подмножества, каждый элемент которого при $n=3$ можно, по крайней мере теоретически, отождествить с элементарной ячейкой кристаллической решётки некоторого конкретного химического элемента или соединения.

Вначале выделим во множестве $\mathbf{K}_{n\times n}(P)$ подмножество $\mathbf{C}_{n\times n}(P)$ всех матриц, у которых каждая строка и каждый столбец являются взаимно инверсными по отношению к себе.

Так как каждая матрица из $\mathbf{K}_{n\times n}(P)$ является симметрической, то в определении множества $\mathbf{C}_{n\times n}(P)$ достаточно потребовать взаимную инверсность по отношению к себе только для строк или только для столбцов.

**Замечание 7.1**. *Если $A\in\mathbf{C}_{n\times n}(P)$, то у такой матрицы для любого $r=1,\dots,n$ строки и столбцы с номерами $r$ и $n-r+1$ совпадают. В частности, совпадают первые и последние строки и столбцы.*

Поэтому можно сформулировать ещё одно

**Замечание 7.2**. *Любая матрица $A\in\mathbf{C}_{n\times n}(P)$ является взаимно инверсной к самой себе и по строкам и по столбцам.*

Квадратную матрицу, которая является взаимно инверсной к самой себе и по строкам и по столбцам, естественно, называть *инверсной* квадратной матрицей.

Таким образом, все матрицы из $\mathbf{C}_{n\times n}(P)$ являются инверсными.

Матрица $n$-го порядка над $P$, взаимно инверсная к самой себе и по строкам и по столбцам, может не принадлежат множеству $\mathbf{C}_{n\times n}(P)$, и даже не быть симметрической, то есть множество всех инверсных квадратных матриц $n$-го порядка над $P$ шире множества $\mathbf{C}_{n\times n}(P)$.

Обозначим через $\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P)$ множество всех кубических матриц порядка $n$ над $P$, у которых все сечении любой ориентации принадлежат множеству $\mathbf{C}_{n\times n}(P)$.

Так как $\mathbf{C}_{n\times n}(P)$ – подмножество множества $\mathbf{K}_{n\times n}(P)$, то

$$\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P) \subseteq \mathbf{K}_{n\times n\times n}(P).$$

Таким образом,

$$\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P) = \{A \in \mathbf{K}_{n\times n\times n}(P) | (a_{rjk}), (a_{irk}), (a_{ijr}) \in \mathbf{C}_{n\times n}(P), \quad r = 1, \dots, n\}.$$

В силу замечания 7.2, каждое сечение любой ориентации кубической матрицы из $\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P)$ является инверсной матрицей.

**Замечание 7.3**. Ясно, что множество $\mathbf{C}_{2\times 2\times 2}(P)$ совпадает с множеством всех кубических матриц второго порядка, у которых все восемь элементов совпадают с одним и тем же элементом поля $P$:

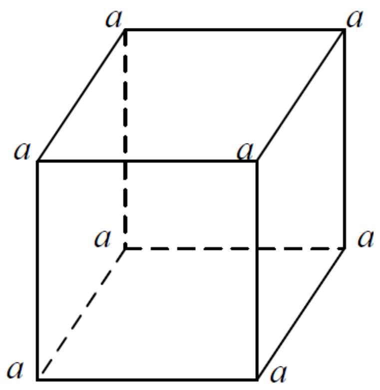


Рис. 7.1:

Легко проверить справедливость следующего утверждения.

**Лемма 7.1**. *Множество* $\mathbf{C}_{3\times 3\times 3}(P)$ *совпадает с множеством всех кубических матриц третьего порядка вида*

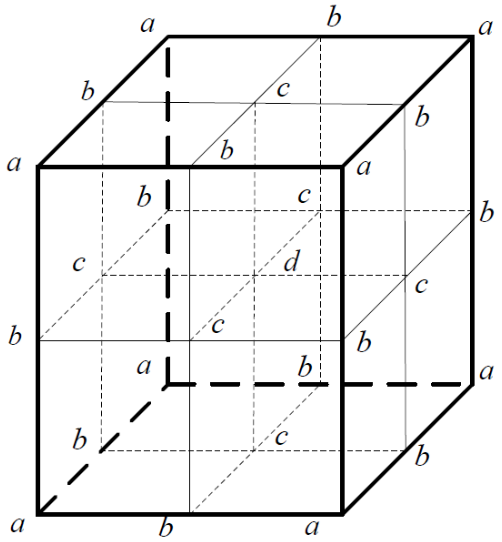


Рис. 7.2:

С помощью предложения 5.2 и замечания 7.2 легко устанавливается справедливость следующего предложения.

**Предложение 7.1**. *У любой кубической матрицы* $A=(a_{ijk})\in \mathbf{C}_{n\times n\times n}(P)$ *для любого* $r=1,2,\ldots,n$ *её* $r$*-ые сечения и* $(n-r+1)$*-ые сечения ориентаций* $(i)$, $(j)$ *и* $(k)$ *совпадают*:

$$(a_{rjk})=(a_{(n-r+1)jk})=(a_{irk})=(a_{i(n-r+1)k})=(a_{ijr})=(a_{ij(n-r+1)}).$$

Полагая в предложении 7.1 $r=1$ или $r=n$, получим

**Следствие 7.1**. *У любой кубической матрицы* $A\in \mathbf{C}_{n\times n\times n}(P)$ *её первые и* $n$*-ые сечения ориентаций* $(i)$, $(j)$ *и* $(k)$ *совпадают*:

$$(a_{1jk})=(a_{njk})=(a_{i1k})=(a_{ink})=(a_{ij1})=(a_{ijn}).$$

**Замечание 7.4**. Для $n=3$ предложение 7.1 и следствие 7.1 иллюстрируются кубической матрицей (7.2).

Две кубические матрицы назовём *взаимно инверсными в направлении* $(i)$ (*в направлении* $(j)$, *в направлении* $(k)$), если они составлены из одних и тех же сечений ориентации $(i)$ (ориентации $(j)$, ориентации $(k)$), расположенных в обратном порядке.

Кубические матрицы $A=(a_{ijk})$ и $B=(b_{ijk})$ взаимно инверсны в направлении $(i)$ (в направлении $(j)$, в направлении $(k)$) тогда и только тогда, когда $(b_{rjk})=(a_{(n-r+1)jk})$

$$((b_{irk})=(a_{i(n-r+1)k}),\ (b_{ijr}=(a_{ij(n-r+1)}))$$

для любого $r=1,\ldots,n$.

Кубическую матрицу, которая является взаимно инверсной к самой себе по каждому из трёх направлений, естественно, называть *инверсной* кубической матрицей.

В силу предложения 7.1, все кубические матрицы из $\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P)$ являются инверсными.

Кубическая матрица, соответствующая CuAu (рис. 6.8), показывает, что кубическая матрица $n$-го порядка над $P$, взаимно инверсная к самой себе по каждому из трёх направлений, может не принадлежать множеству $\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P)$, и даже не быть симметрической, то есть множество всех инверсных кубических матриц $n$-го порядка над $P$ шире множества $\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P)$. У матрицы, изображённой на рис. 6.8, вторые сечения ориентаций $(i)$ и $(k)$ не принадлежат множеству $\mathbf{C}_{n\times n}(P)$, и даже не являются симметрическими. Заметим, что эти сечения являются инверсными матрицами.

Обозначим через $\mathbf{C}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P)$ множество всех кубических матриц порядка $n$ над $P$, у которых первые и последние, то есть $n$-ые сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ совпадают с некоторой матрицей $A\in \mathbf{C}_{n\times n}(P)$.

Множество $\mathbf{C}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P)$ – непусто.

Если у кубической матрицы $A$ порядка $n$ над $P$ удалить первые и последние сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$, то получится кубическая подматрица порядка $n-2$ над $P$, которую, по-прежнему, будем обозначать символом ${}^{\neg 1,n}A$.

Обозначим через ${}^{\neg 1,n}\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P)$ множество всех кубических матриц порядка $n$ над кольцом $P$, у которых кубическая подматрица ${}^{\neg 1,n}A$ принадлежит множеству $\mathbf{C}_{(n-2)\times(n-2)\times(n-2)}(P)$.

Для $n=0$ считаем $\mathbf{C}_{0\times 0\times 0}(P)=\emptyset$, а для $n=1$ полагаем $\mathbf{C}_{1\times 1\times 1}(P)=P$.

**Замечание 7.5**. Ясно ,что

$$\mathbf{C}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P)\subseteq \mathbf{K}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P),^{\neg 1,n}\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P)\subseteq {}^{\neg 1,n}\mathbf{K}_{n\times n\times n}(P).$$

**Замечание 7.6**. *Если матрицы $A$ и $B$ взаимно инверсны по строкам (по столбцам), причём $A \in \mathbf{C}_{n\times n}(P)$, то $A = B$.*

**Теорема 7.1**. *Для любого целого $n \geqslant 2$ верно равенство*

$$\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P) = \mathbf{C}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P) \cap {}^{\neg 1,n}\, \mathbf{C}_{n\times n\times n}(P).$$

***Доказательство***. Так как согласно замечанию 7.3, любая кубическая матрица из $\mathbf{C}_{2\times 2\times 2}(P)$ имеет вид показанный на рис. 7.1, то

$$\mathbf{C}^{[1,2]}_{2\times 2\times 2}(P) = \mathbf{C}_{2\times 2\times 2}(P).$$

Кроме того, из условия $\mathbf{K}_{0\times 0\times 0}(P) = \emptyset$ следует

$${}^{\neg 1,2}\mathbf{C}_{2\times 2\times 2}(P) = \mathbf{M}_{2\times 2\times 2}(P).$$

Поэтому при $n = 2$ равенство из формулировки теоремы верно.

Так как согласно лемме 7.1, любая кубическая матрица из $\mathbf{C}_{3\times 3\times 3}(P)$ имеет вид показанный на рис. 7.2, то

$$\mathbf{C}^{[1,3]}_{3\times 3\times 3}(P) = \mathbf{C}_{3\times 3\times 3}(P).$$

Кроме того, из условия $\mathbf{C}_{1\times 1\times 1}(P) = P$ следует

$${}^{\neg 1,3}\mathbf{C}_{3\times 3\times 3}(P) = \mathbf{M}_{3\times 3\times 3}(P).$$

Поэтому при $n = 3$ равенство из формулировки теоремы также верно.

Далее считаем $n \geq 4$.

Пусть

$$A \in \mathbf{C}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P) \cap {}^{\neg 1,n}\, \mathbf{C}_{n\times n\times n}(P),$$

откуда в силу замечания 7.5 и теоремы 5.1, следует $A \in \mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)$.

Выберем произвольно $r, s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и пусть $U-$ $r$-ое сечение ориентации $(i)$ кубической матрицы $A$, отличное от первого и последнего сечений этой ориентации. Из условия $A \in \mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)$ следует $U \in \mathbf{K}_{n\times n}(P)$.

Далее для наглядности будем пользоваться рисунком 7.3, на котором изображены: кубическая матрица $A$ (внешний куб); её кубическая подматрица $B = {}^{\neg 1,n}A$ (внутренний куб); сечение $U$, окрашенное жёлтым цветом; окрашенная синим цветом подматрица $V$ сечения $U$, являющаяся сечением ориентации $(i)$ кубической подматрицы $B$; элементы $a_{rs1}, a_{rs2}, \ldots, a_{rs(n-1)}, a_{rsn}$ сечения $U$.

Так как $A \in {}^{\neg 1,n}\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P)$, то $B \in \mathbf{C}_{(n-2)\times(n-2)\times(n-2)}(P)$. Поэтому каждая строка подматрицы $V$, в том числе её $s$-ая строка $(a_{rs2} \ldots a_{rs(n-1)})$, взаимно инверсна к самой себе.

Так как $A \in \mathbf{C}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P)$, то первое и последнее сечения ориентации $(k)$ кубической матрицы $A$ совпадают, а значит, совпадают элементы $a_{rs1}$ и $a_{rsn}$. Следовательно, $s$-ая строка $(a_{rs1}a_{rs2} \ldots a_{rs(n-1)}a_{rsn})$ матрицы $U$ взаимно инверсна к самой себе. А так как это верно для любого $s = 1, 2, \ldots, n$, и, кроме того, $U \in \mathbf{K}_{n\times n}(P)$, то $U \in \mathbf{C}_{n\times n}(P)$.

Из условия $A \in \mathbf{C}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P)$ следует также, что первое и последнее сечения ориентации $(i)$ кубической матрицы $A$ принадлежат множеству $\mathbf{C}_{n\times n}(P)$.

Таким образом, все сечения ориентации $(i)$ кубической матрицы $A$ принадлежат множеству $\mathbf{C}_{n\times n}(P)$.

Аналогично доказывается, что все сечения ориентации $(j)$ (ориентации $(k)$) кубической матрицы $A$ принадлежат множеству $\mathbf{C}_{n\times n}(P)$. Следовательно, $A \in \mathbf{C}_{n\times n\times n}(P)$, тем самым доказано включение

$$\mathrm{C}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P) \cap {}^{\neg 1,n}\, \mathbf{C}_{n\times n\times n}(P) \subseteq \mathbf{C}_{n\times n\times n}(P).$$

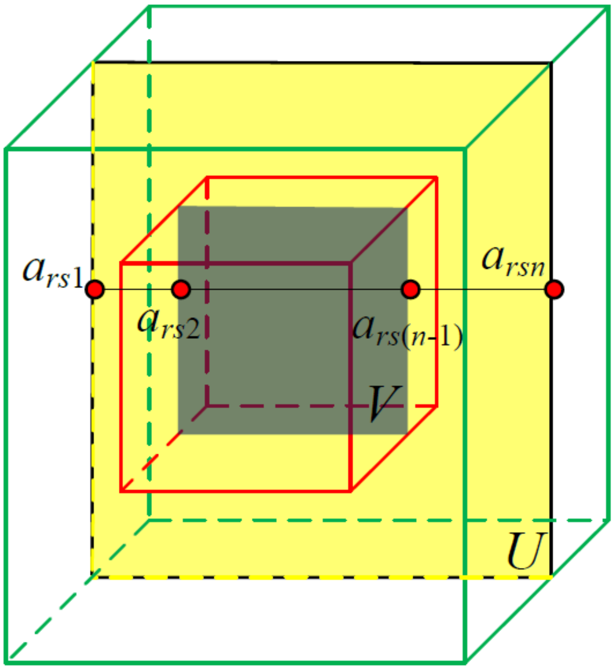


Рис. 7.3:

Пусть теперь $A=(a_{ijk})\in\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P)$. Ясно, что $A\in{}^{\neg 1,n}\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P)$, при этом все сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ кубической матрицы $A$ принадлежат множеству $\mathbf{C}_{n\times n}(P)$. Кроме того, включения

$$\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P)\subseteq\mathbf{K}_{n\times n\times n}(P)\subseteq\Sigma_{n\times n\times n}(P)$$

и теорема 3.2 позволяют утверждать, что первые сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ кубической матрицы $A$ совпадают, совпадают и её последние сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$.

По следствию 5.1 первые и последние сечения ориентации $(i)$ (ориентации $(j)$, ориентации $(k)$) кубической матрицы $A$ взаимно инверсны и по строкам и по столбцам, откуда, в силу замечания 7.6, следует совпадение всех первых и последних сечений ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$, принадлежащих, как отмечалось выше, множеству $\mathbf{C}_{n\times n}(P)$. Следовательно, $A\in\mathbf{C}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P)$, и более того,

$$A\in\mathbf{C}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P)\cap^{\neg 1,n}\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P).$$

Тем самым доказано включение

$$\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P)\subseteq\mathbf{C}^{[1,n]}_{n\times n\times n}(P)\cap^{\neg 1,n}\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P),$$

а значит и требуемое равенство. Теорема доказана.

**Замечание 7.7**. Теорема 7.1 даёт способ конструирования всех кубических матриц из $\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P)$ для любого $n$.

Вначале фиксируем множество $\mathbf{C}_{2\times 2\times 2}(P)$ (множество $\mathbf{C}_{3\times 3\times 3}(P)$), которое согласно замечанию 7.3 (лемме 7.1), совпадает с множеством всех кубических матриц второго порядка вида (7.1) (третьего порядка на рис. 7.2).

Затем для любой кубической матрицы из $\mathbf{C}_{2\times 2\times 2}(P)$ (из $\mathbf{C}_{3\times 3\times 3}(P)$) и любой матрицы четвёртого порядка из $\mathbf{C}_{4\times 4}(P)$ (пятого порядка из $\mathbf{C}_{5\times 5}(P)$) строится кубическая матрица четвёртого (пятого) порядка, у которой первые и последние сечения ориентаций $(i)$,

$(j)$ и $(k)$ совпадают с выбранной матрицей четвёртого (пятого) порядка. Согласно теореме 7.1, множество всех таких кубических матриц совпадает с множеством $\mathbf{C}_{4\times4\times4}(P)$ (с множеством $\mathbf{C}_{5\times5\times5}(P)$).

Далее с помощью кубических матриц из $\mathbf{C}_{4\times4\times4}(P)$ (из $\mathbf{C}_{5\times5\times5}(P)$) и матриц шестого (седьмого) порядка аналогично конструируется множество $\mathbf{C}_{6\times6\times6}(P)$ (множество $\mathbf{C}_{7\times7\times7}(P)$).

После того, как построено множество $\mathbf{C}_{(n-2)\times(n-2)\times(n-2)}(P)$, с помощью кубических матриц из этого множества и матриц $n$-го порядка из $\mathbf{C}_{n\times n}(P)$ строится множество $\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P)$. Заметим, что описанная выше процедура "сборки" кубических матриц из множества $\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P)$ удобна для написания компьютерной программы, реализующей их получение для больших $n$.

Обозначим через $c_{n\times n}$ максимальное число различных элементов, которые может иметь матрица из $\mathbf{C}_{n\times n}(P)$. Например,

$$c_{1\times1}=c_{2\times2}=1,\quad c_{3\times3}=c_{4\times4}=3.$$

В общем случае числа $c_{(2t-1)\times(2t-1)}$ и $c_{2t\times2t}$ совпадают с суммой $t$ первых членов арифметической прогрессии $1,\ 2,\ \ldots,t$:

$$c_{(2t-1)\times(2t-1)}=c_{2t\times2t}=\frac{(1+t)t}{2}.$$

Обозначим через $c_{n\times n\times n}$ максимальное число различных элементов, которые может иметь кубическая матрица из $\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P)$. Например, $c_{1\times1\times1}=1$, кроме того, как показывают замечание 7.3 и лемма 7.1,

$$c_{2\times2\times2}=1,\quad c_{3\times3\times3}=4.$$

Согласно теореме 7.1, у любой кубической матрицы из множества $\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P)$ все первые и последние сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ состоят из одних и тех же элементов поля $P$, а кубическая подматрица, получающаяся из неё удалением всех первых и последних сечений, является кубической матрицей из $\mathbf{C}_{(n-2)\times(n-2)\times(n-2)}(P)$. Поэтому верно равенство

$$c_{n\times n\times n}=c_{(n-2)\times(n-2)\times(n-2)}+c_{n\times n}.$$

Последнее равенство включает случай $n=1$, если второе слагаемое в нём считать равным нулю.

Для чётных $n=2t$ имеем

$$c_{2t\times2t\times2t}=c_{2\times2}+c_{4\times4}+\ldots+c_{2(t-1)\times2(t-1)}+c_{2t\times2t}.$$

Последнюю формулу можно переписать следующим образом

$$c_{2t\times2t\times2t}=1+3+6+\ldots+\frac{(1+t)t}{2}=\frac{t(t+1)(t+2)}{6}.$$

Для нечётных $n=2t-1$ имеем

$$c_{(2t-1)\times(2t-1)\times(2t-1)}=c_{1\times1}+c_{3\times3}+\ldots+c_{(2(t-1)-1)\times(2(t-1)-1)}+c_{(2t-1)\times(2t-1)}.$$

Последнюю формулу можно переписать следующим образом

$$c_{(2t-1)\times(2t-1)\times(2t-1)}=1+3+6+\ldots+\frac{(1+t)t}{2}=\frac{t(t+1)(t+2)}{6}.$$

Таким образом, имеет место

**Предложение 7.2**. *Для любого целого* $n \geqslant 2$ *верны равенства*

$$c_{n\times n\times n} = c_{(n-2)\times(n-2)\times(n-2)} + c_{n\times n},$$

$$c_{2t\times 2t\times 2t} = c_{2\times 2} + c_{4\times 4} + \ldots + c_{2t\times 2t},$$

$$c_{(2t-1)\times(2t-1)\times(2t-1)} = c_{1\times 1} + c_{3\times 3} + \ldots + c_{(2t-1)\times(2t-1)},$$

$$c_{(2t-1)\times(2t-1)\times(2t-1)} = c_{2t\times 2t\times 2t} = \frac{t(t+1)(t+2)}{6}.$$

## Литература

[1] Гальмак А.М. О вектор-матрицах и пространственных матрицах // *Проблемы физики, математики и техники.* 2012, №1(10), с. 75−86.

[2] Соколов Н.П. Пространственные матрицы и их приложения М., Наука, 1960.

[3] Соколов Н.П. Введение в теорию пространственных матриц. Киев, Наукова думка, 1972.

[4] Кребс Г. Основы кристаллохимии неорганических соединений Москва, Мир, 1971.

[5] Келли А., Гровс, Г. Кристаллография и дефекты в кристаллах. Москва, Мир, 1974.

[6] Вайнштейн Б.К., Фридкин, В.М. и др. Современная кристаллография. Том второй. Москва, Наука, 1979.

# ON CUBIC MATRICES

**A.M. Gal'mak**

*Mogilev State University of Food Technology, Mogilev, Belarus*

halm54@mail.ru

The article deals with cubic matrices of tree types: cubic matrices of order $n$, whose $r$-th sections of orientations $(i)$, $(j)$, $(k)$ for any $r = 1, 2, \ldots, n$ are the same; cubic matrices all elements of which are symmetric both as for the main diagonal and as for the secondary one in each section of any orientation; cubic matrices of a set $\mathbf{C}_{n\times n\times n}(P)$, that was determined by the author. All cubic matrices involved are similar to each other because of being symmetric.

**Key Words:** cubic matrices, orientation, section, crystal.