ГРАВИТАЦИОННОЕ КРАСНОЕ СМЕЩЕНИЕ ДЛЯ СЛАБОГО ПОЛЯ ТЯГОТЕНИЯ В ФИНСЛЕРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБЫТИЙ БЕРВАЛЬДА-МООРА

Р.Г. Зарипов

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт механики и машиностроения Казанского научного центра Российской академии наук, Казань, Россия

zaripov@mail.knc.ru

Рассматривается слабое поле тяготения в искривленном финслеровом пространстве событий Бервальда-Моора. Из уравнения геодезической линии определяются классические уравнения движения частицы в предельном случае для неньютонового трёхмерного пространства в гравитационном поле. Приводятся линейные уравнения для метрического тензора и их решения. Обсуждается вопрос о красном смещении.

Ключевые слова: слабое поле тяготения, геометрический объект, уравнения геодезической линии, красное смещение.

1 Введение

В настоящее время происходит становление теории тяготения в финслеровом пространстве событий Бервальда-Моора. Рассматриваются различные подходы (см. например, [1–3]). Вне поля тяготения метрическая функция локального четырёхмерного пространства-времени Бервальда-Моора имеет форм-инвариантное выражение [4]

$$F = ds = \left(g_{ijkl}dx^i dx^j dx^k dx^l\right)^{1/4} = \left[\prod_m^4 \left(cdt + \varepsilon^m d\mathbf{x}\right)\right]^{1/4} \tag{1.1}$$

для инерциальных систем. Элемент физического времени

$$\begin{gathered} dT = \left[dt^4 - 2dt^2 d\mathbf{x}^2/c^2 + 4dt\,\left(d\mathbf{x}\left\{d\mathbf{x}d\mathbf{x}\right\}\right)/3c^3\right]^{1/4} = \\ = \left[dt^4 - 2\left(dt^2dx^2 + dt^2dy^2 + dt^2dz^2\right) + 8dtdxdydz\right]^{1/4} \end{gathered} \tag{1.2}$$

определяется слагаемыми с координатным временем.

Известные значения компонентов векторов $\varepsilon^1 = (1,\,1,\,1)$, $\varepsilon^2 = (-1,\,1,-1)$, $\varepsilon^3 = (1,\,-1,\,-1)$, $\varepsilon^4 = (-1,-1,\,1)$ выделенных направлений в трехмерном пространстве удовлетворяют равенствам [5]

$$\begin{gathered} \sum_m^4 \varepsilon_\alpha^m = 0, \quad \tfrac{1}{4}\sum_m^4 \varepsilon_\alpha^m \varepsilon_\beta^m = \delta_{\alpha\beta}, \quad \tfrac{1}{4}\sum_m^4 \varepsilon_\alpha^m \varepsilon_\beta^m \varepsilon_\gamma^m = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}, \\ 1 + \left(\varepsilon^m\right)^2 = 4, \quad 1 + \left(\varepsilon^m \varepsilon^r\right) = 0 \quad (m \neq r)\,, \end{gathered} \tag{1.3}$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера, $(d\mathbf{x}d\mathbf{x}) = d\mathbf{x}^2 = \delta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ – скалярное произведение для $d\mathbf{x} = \{dx, dy, dz\}$, $\{d\mathbf{x}d\mathbf{x}\}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}dx^\beta dx^\gamma$ являются компонентами нового векторного произведения [5] и $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ есть трехмерный абсолютно симметричный символ со свойством $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 1$ при $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, а остальные значения являются нулевыми, m – номер вектора, а α, β и γ пробегают значения 1, 2, 3. Важно отметить, что, согласно (1.3), имеет место только три независимых выделенных направлений и их число равняется четырем.

Метрическая функция (1.1) в известных формах запишется так

$$
\begin{gathered}
F = ds = \left[c^4dt^4 + dx^4 + dy^4 + dz^4 - \right. \\
\left. -2\left(c^2dt^2dx^2 + c^2dt^2dy^2 + c^2dt^2dz^2 + dx^2dy^2 + dy^2dz^2 + dz^2dx^2\right) + 8cdtdxdydz\right]^{1/4} = \\
= \left\{\left[(cdt+dx)^2 - (dy+dz)^2\right]\left[(cdt-dx)^2 - (dy-dz)^2\right]\right\}^{1/4} = \\
= \left[(cdt+dx+dy+dz)(cdt-dx+dy-dz)\cdot\right. \\
\left.\cdot(cdt+dx-dy-dz)(cdt-dx-dy+dz)\right]^{1/4} = \\
= \begin{vmatrix} cdt & dx & dy & dz \\ dx & cdt & dz & dy \\ dy & dz & cdt & dx \\ dz & dy & dx & cdt \end{vmatrix}^{1/4} = \\
= \left(\varepsilon_{1234}H_i^1H_j^2H_k^3H_l^4dx^idx^jdx^kdx^l\right)^{1/4} = \left(\tfrac{1}{4!}\varepsilon_{abcd}H_i^aH_j^bH_k^cH_l^ddx^idx^jdx^kdx^l\right)^{1/4},
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

где символ ε_{abcd} есть абсолютно симметричный символ со свойством $\varepsilon_{abcd}=1$ если $a \neq b \neq c \neq d$, остальные значения нулевые, $dx^i = (cdt, d\mathbf{x})$, H_i^a есть нормализованная матрица Адамара порядка четыре

$$
\begin{gathered}
\mathbf{H}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2 & -\mathbf{H}_2 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_1 & -\mathbf{H}_1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{H}_1 = 1, \ \mathbf{H}\mathbf{H}^T = 4\mathbf{I},
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

со свойством $H_i^aH_a^j = 4\delta_i^j$ и четырехмерным символом Кронекера δ_i^j, $\mathbf{I}$ – единичная четырехмерная матрица, также определитель есть определитель характеристической матрицы алгебры квадрачисел. Интервал ds интерпретируется как полунорма четырехмерного вектора dx^i.

Таким образом, из (1.4) вытекает выражение для метрического тензора

$$
g_{ijkl} = \frac{1}{4!}\varepsilon_{abcd}H_i^aH_j^bH_k^cH_l^d. \tag{1.6}
$$

Перепишем дифференциальную форму (1.1) в виде

$$
\begin{gathered}
(ds)^4 = g_{ijkl}dx^idx^jdx^kdx^l = g_{0000}\left(dx_0\right)^4 + g_{00\alpha\beta}\left(dx_0\right)^2dx^\alpha dx^\beta + \\
+ g_{0\alpha\beta\gamma}dx_0dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma + g_{\alpha\beta\gamma r}dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma dx^r
\end{gathered}
\tag{1.7}
$$

с $g_{0000} = 1$, $g_{00\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$, $g_{0\alpha\beta\gamma} = 4\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}/3$, $g_{\alpha\beta\gamma r} = \frac{1}{2!}\left[\delta_{\alpha(\beta}\delta_{\gamma)r} - \varepsilon_{m\alpha(\beta}\varepsilon^m_{\gamma)r}\right]$.

При наличии поля тяготения компоненты метрического тензора зависят от времени и координат. Поэтому сначала следует рассмотреть уравнение геодезической. Оно должно быть такими, чтобы для слабого поля, когда компоненты метрического тензора мало отличались от значений в (1.7), соответствовало в пределе $c \to \infty$ классической механике с уравнением движения в неньютоновом трехмерном пространстве. Далее перейдем к самим уравнениям гравитационного поля в линейном приближении.

2 Уравнения движения частицы в классической неньютоновой механике для собственного пространства

В релятивисткой механике действие связано с метрической функцией

$$S = -\alpha \int\limits_a^b ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} L dt = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \alpha c \sqrt[4]{g_{ijkl} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^l}{dt}} dt. \tag{2.1}$$

Рассмотрим переход от релятивисткой механики, в которой действие имеет вид

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L dt = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \alpha c \sqrt[4]{\left(\frac{dT}{dt}\right)^4 + \frac{(\mathbf{vv})^2 - \{\mathbf{vv}\}^2}{c^4}} dt \tag{2.2}$$

к классической механике. В предельном переходе $c \to \infty$ координатное время, согласно (1.2), приблизительно равняется физическому, то есть имеем $dT \approx dt$. Тогда лагранжиан L при разложении по степеням $\mathbf{v}/c = d\mathbf{x}/cdt$ запишется так

$$L \approx -\alpha c \sqrt[4]{1 + \left[\frac{(\mathbf{vv})^2 - \{\mathbf{vv}\}^2}{c^4}\right]} \approx -\alpha c + \frac{\alpha}{4c^3} \left[(\mathbf{vv})^2 - \{\mathbf{vv}\}^2\right], \tag{2.3}$$

где координатная скорость приблизительно равняется физической. Действие имеет размерность энергии умноженной на время, что приводит к значению $\alpha = m_0 c$. Опуская в лагранжиане постоянную $(-m_0 c^2)$, получим выражение

$$L = \frac{m_0}{4c^2} \left[(\mathbf{vv})^2 - \{\mathbf{vv}\}^2\right] = \frac{m_0}{4c^2} \prod_m^4 (\varepsilon^m \mathbf{v}), \tag{2.4}$$

отличающееся от $L = m_0 (\mathbf{vv})/2$ в ньютоновой механике. Этого следовало ожидать, так как для ньютоновой механики имеет место изотропная евклидова геометрия. В нашем случае исходным является неизотропная геометрия событий с выделенными направлениями, которые естественно сохраняются и в случае новой классической механики. В этой механике движение пробной частицы в гравитационном поле определяется посредством лагранжиана

$$L = \frac{m_0}{4c^2} \left[(\mathbf{vv})^2 - \{\mathbf{vv}\}^2\right] - \frac{m_0}{c^2} \phi. \tag{2.5}$$

Согласно уравнениям Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}, \tag{2.6}$$

получим импульс частицы, уравнения движения и энергию

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m_0}{c^2} \left[\mathbf{v} (\mathbf{vv}) - \{\mathbf{v} \{\mathbf{vv}\}\}\right], \tag{2.7}$$

$$m_0 \frac{d \left[\mathbf{v} (\mathbf{vv}) - \{\mathbf{v} \{\mathbf{vv}\}\}\right]}{dt} = -m_0 \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}}. \tag{2.8}$$

$$E = (\mathbf{pv}) - L = \frac{3m_0}{4c^2} \left[(\mathbf{vv})^2 - \{\mathbf{vv}\}^2\right] + \frac{m_0}{c^2} \phi. \tag{2.9}$$

В лагранжиане (2.5) перед потенциалом введён множитель $(1/c^2)$ с целью, чтобы в уравнениях движения частицы (2.8) не имелось значения скорости света. В координатном виде уравнения движения (2.8) запишутся так

$$m_0 g_{\alpha\beta\gamma r}\frac{d}{dt}\left(v^\alpha v^\alpha v^\beta\right) = m_0\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}. \tag{2.10}$$

Гравитационный потенциал ϕ, зависящий только от координат, удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$\Delta_4\phi = \beta\rho \tag{2.11}$$

со скалярным оператором [6]

$$\begin{gathered}\Delta_4 = \Delta\Delta - (\{\nabla\nabla\}\{\nabla\nabla\}) = \\ = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} - 2\left(\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^2\partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^2\partial x^2}\right) = \prod_m^4 (\varepsilon^m\nabla).\end{gathered} \tag{2.12}$$

Величина ρ есть плотность массы источника, а β – пока не определенный постоянный коэффициент, Δ – лапласиан, ∇ – оператор градиента.

Уравнение для гравитационного потенциала при наличии источника в классической механике выводится вариационным методом. Для чего рассмотрим действие

$$\begin{gathered}I = \int L dxdydz = \\ = \int\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)^2 - \right.\right. \\ \left.\left. -2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)\right] - \beta\rho\phi\right\}dxdydz\end{gathered} \tag{2.13}$$

с плотностью лагранжиана L. При варьировании действия по потенциалу $\delta\phi$ получим уравнение

$$\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4\phi}{\partial z^4} - 2\left(\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^2\partial z^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial z^2\partial x^2}\right) = \beta\rho, \tag{2.14}$$

совпадающее с уравнением (2.11).

3 Геодезические линии

Рассмотрим задачу геодезических линий в финслеровом пространстве, которые являются кривыми экстремальной длины. Для чего находим экстремум интеграла

$$\delta\int_{P_1}^{P_2} ds = \delta\int_A^B F\left(x^i, \frac{dx^i}{d\tau}\right)d\tau = \delta\int_A^B\left[\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial F}{\partial\left(dx^i/d\tau\right)}\right]\delta x^i d\tau \tag{3.1}$$

и получим уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial F}{\partial\left(dx^i/d\tau\right)} - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0,\ \ F = \left(g_{ijkl}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau}\right)^{1/4}, \tag{3.2}$$

где τ – произвольный параметр. Для производных имеем выражения

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = \frac{1}{4}\frac{\partial g_{jklm}}{\partial x^i}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau}\frac{dx^m}{d\tau}, \tag{3.3}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial F}{\partial\left(dx^i/d\tau\right)} = \frac{d}{d\tau}\left[g_{ijkl}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^{-3/4}\right] =$$

$$\frac{\partial g_{ijkl}}{\partial x^m}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau}\frac{dx^m}{d\tau}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^{-3/4} + \tag{3.4}$$

$$+3g_{ijkl}\frac{d^2x^j}{d\tau^2}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^{-3/4} - \frac{3}{4}g_{ijkl}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau}\frac{d^2s}{d\tau^2}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^{-7/4}$$

и, соответственно, уравнения (3.2) в виде

$$3g_{ijkl}\frac{d^2x^j}{d\tau^2}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau} + \left[\frac{\partial g_{ijkl}}{\partial x^m} - \frac{1}{4}\frac{\partial g_{jklm}}{\partial x^i}\right]\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau}\frac{dx^m}{d\tau} -$$
$$-\frac{3}{4}g_{ijkl}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau}\frac{d^2s}{d\tau^2}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^{-1} = 0, \tag{3.5}$$

которые после симметризации по индексам j и m, k и m, j и l в квадратной скобке окончательно запишутся так

$$g_{ijkl}\frac{d^2x^j}{d\tau^2}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau} + \Gamma_{i,jklm}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau}\frac{dx^m}{d\tau} - \frac{3}{4}g_{ijkl}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau}\frac{d^2s}{d\tau^2}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^{-1} = 0. \tag{3.6}$$

Система функций в уравнении геодезической (3.6)

$$\Gamma_{i,jklm} = \frac{1}{12}\left(\frac{\partial g_{klmi}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lmij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mijk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ijkl}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{jklm}}{\partial x^i}\right) \tag{3.7}$$

образуют геометрический объект, являющийся аналогом символа Кристоффеля. Уравнения геодезической и 5-и индексовый объект рассматриваются в [7-9]. Пусть параметр является каноническим и имеет значение $\tau = s$. Тогда уравнение (3.6) с $dx^i/ds = u^i$ преобразуется к виду

$$g_{ijkl}\frac{du^j}{ds}u^ku^l + \Gamma_{i,jklm}u^ju^ku^lu^m = 0 \tag{3.8}$$

и совпадает с уравнением геодезической из работы [8, 9], что и следовало ожидать. Запишем уравнение геодезической (3.8) в следующем виде

$$g_{ijkl}\frac{du^ju^ku^l}{ds} + \Gamma_{i,jklm}u^ju^ku^lu^m = 0 \tag{3.9}$$

при обобщении нерелятивистского аналога (2.8). Здесь в объекте (3.7) стоит множитель (1/4). Приведем некоторые известные и неизвестные свойства:

а) свойство симметрии по индексам j, k, l и m;

б) свойство суммы объектов

$$\Gamma_{i,jklm} + \Gamma_{j,klmi} + \Gamma_{k,lmij} + \Gamma_{l,mijk} + \Gamma_{m,ijkl} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial g_{iklm}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ijlm}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ijkm}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ijkl}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{jklm}}{\partial x^i}\right); \tag{3.10}$$

в) решение системы (3.7), с учетом (3.10), относительно производной

$$\frac{\partial g_{jklm}}{\partial x^i} = 2\left(\Gamma_{j,klmi} + \Gamma_{k,lmij} + \Gamma_{l,mijk} + \Gamma_{m,ijkl}\right) - 4\Gamma_{i,jklm}; \tag{3.11}$$

г) тождество

$$\begin{gathered}\frac{\partial \Gamma_{j,klmi}}{\partial x^r} + \frac{\partial \Gamma_{k,lmij}}{\partial x^r} + \frac{\partial \Gamma_{l,mijk}}{\partial x^r} + \frac{\partial \Gamma_{m,ijkl}}{\partial x^r} - 2\frac{\partial \Gamma_{i,jklm}}{\partial x^r} = \\ = \frac{\partial \Gamma_{j,klmr}}{\partial x^i} + \frac{\partial \Gamma_{k,lmrj}}{\partial x^i} + \frac{\partial \Gamma_{l,mrjk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \Gamma_{m,rjkl}}{\partial x^i} - 2\frac{\partial \Gamma_{r,jklm}}{\partial x^i};\end{gathered} \tag{3.12}$$

д) свойство с антисимметризацией индексов i и j

$$\Gamma_{i,jklm} - \Gamma_{j,iklm} = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial g_{klmi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jklm}}{\partial x^i}\right); \tag{3.13}$$

е) свойство свёртки

$$\Gamma_{i,jklm} u^i u^j u^k u^l u^m = \frac{1}{4}\frac{\partial g_{jklm}}{\partial x^i} u^i u^j u^k u^l u^m = \frac{1}{4}\frac{dg_{jklm}}{ds} u^j u^k u^l u^m; \tag{3.14}$$

ж) полунорма вектора dx^i/ds сохраняется на геодезической линии, что приводит к равенству

$$\frac{d}{ds} g_{ijkl} u^i u^j u^k u^l = 0. \tag{3.15}$$

Дифференцирование левой части в (3.15) дает выражение

$$\begin{gathered}\frac{d}{ds} g_{ijkl} u^i u^j u^k u^l = \frac{1}{4}\frac{dg_{ijkl}}{ds} u^i u^j u^k u^l + g_{ijkl}\frac{du^j}{ds} u^i u^k u^l = \\ = g_{ijkl}\frac{du^j}{ds} u^i u^k u^l + \frac{1}{12}\left(4\frac{\partial g_{ijkl}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{ijkl}}{\partial x^m}\right) u^i u^j u^k u^l u^m.\end{gathered}, \tag{3.16}$$

После симметризации по индексам в круглой скобке имеем

$$\frac{d}{ds} g_{ijkl} u^i u^j u^k u^l = \left(g_{ijkl}\frac{du^j}{ds} u^k u^l + \Gamma_{i,jklm} u^j u^k u^l u^m\right) u^i. \tag{3.17}$$

В скобках имеем уравнение геодезической и в силу произвольности dx^i/ds окончательно получим равенство нулю выражения (3.17),что дает равенство (3.15).

з) закон преобразования

Из инвариантности $ds = ds'$ получим равенство

$$g_{ijkl} dx^i dx^j dx^k dx^l = g_{i'j'k'l'} dx^{i'} dx^{j'} dx^{k'} dx^{l'}, \tag{3.18}$$

которое при преобразовании координат

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m} dx^m, \quad \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}} = \delta^{i'}_{j'}, \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^{m'}}\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^j} = \delta^i_j \tag{3.19}$$

приводит к преобразованию метрического тензора

$$g_{i'j'k'l'} = g_{ijkl}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}. \tag{3.20}$$

Дифференцируя (3.20), находим производную

$$\frac{\partial g_{i'j'k'l'}}{\partial x^{m'}} = \frac{\partial g_{ijkl}}{\partial x^m}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}} + 4g_{ijkl}\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'}\partial x^{m'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\right) \tag{3.21}$$

и с учетом (3.7) получим закон преобразования объекта

$$\begin{aligned}\Gamma_{i',j'k'l'm'} = \Gamma_{i,jklm}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}} + \frac{1}{3}\Bigg(g_{iklm}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{m'}\partial x^{j'}} + \\ +g_{ijlm}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{m'}\partial x^{k'}} + g_{ijkl}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{m'}\partial x^{l'}} + \\ +g_{ijkl}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{l'}\partial x^{m'}} - g_{ijlm}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{m'}\partial x^{i'}}\Bigg),\end{aligned} \tag{3.22}$$

из которого следует, что функции (3.7) не являются компонентами 5-и индексового тензора.

4 Поле тяготения в линейном приближении

Рассмотрим метрическую функцию в финслеровом пространстве Бервальда-Моора

$$\begin{aligned}ds = \Big[g_{0000}\left(dx^0\right)^4 - 2\left(dx^0\right)^2\left(dx^2+dy^2+dz^2\right) + dx^4 + dy^4 + dz^4 - \\ - 2\left(dx^2dy^2 + dy^2dx^2 + dz^2dx^2\right) + 8dx^0dx^1dx^3dx^4\Big]^{1/4},\end{aligned} \tag{4.1}$$

в которой лишь одна величина g_{0000} слабо отличается от единицы. В приближении к классической механике остается слагаемое с $\left(dx^0\right)^4$, что приводит функцию (4.1) к виду

$$ds = g_{0000}\left(dx^0\right)^4 + dx^4 + dy^4 + dz^4 - 2\left(dx^2dy^2 + dy^2dx^2 + dz^2dx^2\right). \tag{4.2}$$

Тогда отличные от нуля значения компонент объекта (3.7) имеют вид

$$\Gamma_{i,0000} = -\frac{1}{12}\frac{\partial g_{0000}}{\partial x^i}. \tag{4.3}$$

Уравнение геодезической (3.9), представленное в виде

$$\frac{d\left[\left(\mathbf{v}\left(\mathbf{vv}\right)\right) - \left\{\mathbf{v}\left\{\mathbf{vv}\right\}\right\}\right]}{dt} = \frac{c^2}{4}\frac{\partial g_{0000}}{\partial \mathbf{r}}, \tag{4.4}$$

позволяет, с учетом (2.8), получить выражение силы

$$\mathbf{F} = \frac{c^2}{4}\frac{\partial g_{0000}}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}}. \tag{4.5}$$

Из (4.5) вытекает значение рассматриваемой компоненты

$$g_{0000} \approx 1 - \frac{4\phi}{c^2}, \quad \left(0 < \frac{4\phi}{c^2} < 1\right) \tag{4.6}$$

и после подстановки её в (4.2) имеем

$$ds = \left(1 - \frac{4\phi}{c^2}\right)c^4dt^4 + dx^4 + dy^4 + dz^4 - 2\left(dx^2dy^2 + dy^2dx^2 + dz^2dx^2\right). \tag{4.7}$$

Таким образом, g_{0000} есть гравитационный потенциал, а $\Gamma_{i,0000}$ – напряженность гравитационного поля. Наконец, запишем уравнение для g_{0000}

$$\Delta_4 g_{0000} = -\frac{4}{c^2}\beta\rho. \tag{4.8}$$

В общем случае, когда компоненты g_{ijkl} зависят от времени, уравнения поля имеют нелинейные члены

$$\Box_4 g_{ijkl} + \text{“нелинейные члены”} = \frac{4}{c^2}\beta T_{ijkl}, \tag{4.9}$$

нахождение которых требует отдельного рассмотрения. Здесь $T_{ijkl} = \rho c^2 u^i u^j u^k u^l$ есть 4-ёх индексовый тензор энергии-импульса и скалярный оператор [7]

$$\begin{gathered}\Box_4 = \tfrac{\partial^4}{c^4\partial t^4} - 2\tfrac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\Delta + \tfrac{4}{3}\tfrac{\partial}{c\partial t}\left(\nabla\left\{\nabla\nabla\right\}\right) + \Delta\Delta - \left(\left\{\nabla\nabla\right\}\left\{\nabla\nabla\right\}\right) = \\ = \tfrac{\partial^4}{c^4\partial t^4} + \tfrac{\partial^4}{\partial x^4} + \tfrac{\partial^4}{\partial y^4} + \tfrac{\partial^4}{\partial z^4} - 2\left(\tfrac{\partial^4}{c^2\partial t^2\partial x^2} + \tfrac{\partial^4}{c^2\partial t^2\partial y^2} + \tfrac{\partial^4}{c^2\partial t^2\partial z^2} + \tfrac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \right. \\ \left. + \tfrac{\partial^4}{\partial y^2\partial z^2} + \tfrac{\partial^4}{\partial z^2\partial x^2}\right) + 8\tfrac{\partial^4}{c\partial t\partial x\partial y\partial z} = \prod_m^4 \left[\tfrac{\partial}{c\partial t} + (\varepsilon^m\nabla)\right].\end{gathered} \tag{4.10}$$

5 Решение уравнений для потенциала

Рассмотрим случай уравнения четвертого порядка с оператором (4.10) для потенциала $\phi = \phi(s)$

$$\Box_4\phi = 0, \tag{5.1}$$

который зависит только от s

$$\begin{aligned} s &= \left[(ct+x+y+z)(ct-x+y-z)(ct+x-y-z)(ct-x-y+z)\right]^{1/4} = \\ &= \left[c^4t^4 + x^4 + y^4 + z^4 - 2\left(c^2t^2x^2 + c^2t^2y^2 + c^2t^2z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2\right) + 8ctxyz\right]^{1/4} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Подставим $\phi(s)$ в (5.1) и получим следующее уравнение

$$\frac{\partial^4\phi}{\partial s^4} + \frac{6}{s}\frac{\partial^3\phi}{\partial s^3} + \frac{7}{s^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial s^2} + \frac{1}{s^3}\frac{\partial\phi}{\partial s} = 0. \tag{5.3}$$

Решая его, находим явный вид функции

$$\phi = A\ln\frac{s}{s_0}, \tag{5.4}$$

где A и s_0 есть постоянные величины. При $s = s_0$ имеет место равенство $\phi(s_0) = 0$.

Далее перейдем к случаю исходного уравнения

$$\Delta_4\phi = 0, \tag{5.5}$$

вытекающего из (2.14) с $\rho = 0$. Согласно (5.2), запишем

$$s = \left[(x+y+z)R^3\right]^{1/4}, \tag{5.6}$$

где функция R, согласно (1.3), зависит только от трех независимых векторов $\varepsilon^2 = (-1,\,1,-1)$, $\varepsilon^3 = (1,\,-1,\,-1)$, $\varepsilon^4 = (-1,-1,\,1)$ выделенных направлений и имеет вид

$$\begin{aligned} R &= \left[(-x+y-z)(x-y-z)(-x-y+z)\right]^{1/3} = \\ &= \left[x^3 + y^3 + z^3 - (x^2z + z^2x) - (y^2x + x^2y) - (z^2y + y^2z) + 2xyz\right]^{1/3}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Следовательно, уравнение (5.5) запишется так

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial R^3}+\frac{3}{R}\frac{\partial^2\phi}{\partial R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial\phi}{\partial R}\right)=0 \tag{5.8}$$

и его решением является функция

$$\phi=A\ln\frac{R}{B}+C_1x+C_2y+C_3z\,,\ \ (C_1+C_2+C_3=0)\,, \tag{5.9}$$

где A, C_1, C_2, C_3 и B есть постоянные величины. Равенство $\phi\,(R_0)=0$ имеет место при $C_1=C_2=C_3=0$ и $B=eR_0$. Тогда из (5.9), согласно (4.6), получим следующее выражение для потенциала

$$\frac{4\phi}{c^2}=\ln\frac{eR_0}{R},\ \ (R\geq eR_0)\,. \tag{5.10}$$

Аналогично, имеем выражение

$$s=\left[(-x+y-z)\,\xi^3\right]^{1/4}=\left[(x-y-z)\,\eta^3\right]^{1/4}=\left[(-x-y+z)\,\nu^3\right]^{1/4}, \tag{5.11}$$

где функции ξ, η, ν также зависят только от трех независимых векторов выделенных направлений и имеют вид

$$\begin{aligned}\xi&=\left[(x+y+z)\,(x-y-z)\,(-x-y+z)\right]^{1/3},\\ \eta&=\left[(x+y+z)\,(-x+y-z)\,(-x-y+z)\right]^{1/3},\\ \nu&=\left[(x+y+z)\,(-x+y-z)\,(x-y-z)\right]^{1/3}.\end{aligned} \tag{5.12}$$

Таким образом, наряду с (5.8) имеем следующие уравнения

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial\xi^3}+\frac{3}{\xi}\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)=0,\\ &\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial\eta^3}+\frac{3}{\eta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2}+\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right)=0,\\ &\left(-\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^3\phi}{\partial\nu^3}+\frac{3}{\nu}\frac{\partial^2\phi}{\partial\nu^2}+\frac{1}{\nu^2}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)=0\end{aligned} \tag{5.13}$$

и их решениями являются функции

$$\begin{aligned}\phi_1&=A_1\ln\frac{\xi}{B_1}+C_1x+C_2y+C_3z\,,\ \ (-C_1+C_2-C_3=0)\,,\\ \phi_2&=A_2\ln\frac{\eta}{B_2}+C_1x+C_2y+C_3z\,,\ \ (C_1-C_2-C_3=0)\ ,\\ \phi_3&=A_3\ln\frac{\nu}{B_3}+C_1x+C_2y+C_3z\,,\ \ (-C_1-C_2+C_3=0)\,.\end{aligned} \tag{5.14}$$

6 Гравитационное красное смещение

Рассмотрим, согласно (4.7) и решения (5.10), промежуток координатного времени между последовательными импульсами некоторого источника сигналов в некоторой фиксированной точке $\mathbf{r}_1=(x_1,y_1,z_1)$ для R_1

$$\Delta t_1=\frac{\Delta s}{\left[1-\frac{4\phi(R_1)}{c^2}\right]^{1/4}} \tag{6.1}$$

Аналогично в другой точки $\mathbf{r}_2$ для R_2 имеем

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta s}{\left[1 - \frac{4\phi(R_2)}{c^2}\right]^{1/4}} \tag{6.2}$$

Координатная частота сигналов $\nu_2 = (\Delta t_2)^{-1}$ в точке $\mathbf{r}_2$ связана с частотой $\nu_1 = (\Delta t_1)^{-1}$ в точке $\mathbf{r}_1$ приближенным равенством

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt[4]{\frac{1 - \frac{4\phi(R_1)}{c^2}}{1 - \frac{4\phi(R_2)}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{c^2}\left[\phi\left(R_2\right) - \phi\left(R_1\right)\right] \tag{6.3}$$

с точностью до $(1/c^2)$. Из (6.3) получим сдвиг частоты сигналов соответствующих значениям R_2 и R_1

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = \frac{\nu_1}{c^2}\left[\phi\left(R_2\right) - \phi\left(R_1\right)\right] = \frac{\nu_1}{c^2}\ln\frac{R_1}{R_2}. \tag{6.4}$$

Если R_2 есть функция с координатой какого-либо тела вне тяготеющего тела, а R_1 – на теле, то формула (6.4) показывает сдвиг частоты в красную сторону при $R_2 > R_1$ поскольку $\phi\left(R_2\right) < \phi\left(R_1\right)$. Согласно (5.7), данное гравитационное красное смещение спектральных линий зависит от трех независимых векторов выделенных направлений в собственном трехмерном пространстве.

Аналогично, учитывая (5.14), рассматриваемое смещение также будет зависеть от других трех независимых векторов выделенных направлений. Здесь же выбрано только одно решение, зависящее от функции R. Общее решение уравнения (5.5) есть линейная комбинация четырех решений (5.9) и (5.14).

Заключение

Приближение слабого поля тяготения в финслеровом пространстве событий Бервальда-Моора позволило определить гравитационное красное смещение. Решение уравнения (2.8) представляет собой отдельную задачу, как и вообще рассмотрение движений и траекторий пробных частиц в приближении неньютоновской классической физики. Представляется необходимым найти тензоры, которые в линейном приближении относительно метрического тензора, независящего от времени, приводят к уравнению (4.8) четвёртого порядка. Построение такой теории требует специального рассмотрения. Поэтому здесь ограничились лишь вопросом геодезических линий и слабого поля тяготения.

Литература

[1] Гарасько Г.И. Теория поля и финслеровы пространства // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2006, № 2 (6), т. 3. с. 6 – 20.

[2] Гарасько Г.И. Слабые поля // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2007, № 2 (8), т. 4, с. 3 – 12.

[3] Павлов Д.Г., Гарасько Г.И. Об аналоге решения Фридмана в финслеровом пространстве-времени с анизотропной метрикой Бервальда-Моора // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2007, № 1 (7), т. 4, с. 52 – 62.

[4] Зарипов Р.Г. Физическое время и расстояние в пространстве-времени Бервальда-Моора // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2007, № 2 (8), т. 4, с. 24 – 40.

[5] Зарипов Р.Г. Отношение одновременности в финслеровом пространстве-времени // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2006, № 1 (5), т. 3, с. 27 – 46.

[6] Зарипов Р.Г. Модель физического поля в собственном трехмерном пространстве для геометрии событий Бервальда-Моора // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2008, № 2 (10), т. 5, с. 124 – 130.

[7] Лебедев С.В. Обобщение метрического тензора финслерова пространства // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2005, № 2 (4), с. 44 – 50.

[8] Balan V., Brînzei N., Lebedev S. Geodetics, connections and Jacobi fields for Berwald-Moor quartic metrics // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2006, № 2 (6), т. 3, с. 113 – 122.

[9] Catoni F., Cannata R., Zampetti P. An introduction to constant curvature spaces in the commutative (Segre) quaternion geometry // *Advances in Applied Clifford Algebras*, 2006, vol. 16, № 2, pp. 85 – 101.

REDSHIFT FOR A WEAK GRAVITATIONAL FIELD IN FINSLER SPACE OF EVENTS BERWALD-MOOR

R.G. Zaripov

Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Science Center, Russian Academy of Sciences, Kazan, Russia

zaripov@mail.knc.ru

The weak gravitational field in curved Finsler space of events Berwald-Moor is considered. From the equations of a geodesic line classical equations of motion of a particle in a limiting case for non-Newtonian three-dimensional space in a gravitational field are given. Linear equations for a metric tensor and their solutions are reduced. The problem on redshift is considered.

Key Words: weak gravitational field, geometrical plant, the equation of a geodesic line.