УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕГОЛОНОМНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С МЕТРИКОЙ БЕРВАЛЬДА-МООРА

С.В. Галаев

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

sgalaev@mail.ru

Вводится понятие продолженной связности оснащенного субфинслерова пространства коразмерности 1. На распределении субфинслерова пространства с метрикой Бервальда-Моора нулевой кривизны определяется структура почти контактного кэлерова пространства.

Ключевые слова: внутренняя связность, продолженная связность, почти контактное кэлерово пространство, субфинслерово пространство с метрикой Бервальда-Моора нулевой кривизны.

1 Введение

Изучение оснащенных субфинслеровых пространств коразмерности 1 с метрикой Бервальда-Моора мотивировано, главным образом, работами [1, 2, 3]. В работе [1] в качестве модели четырехмерного пространства-времени общей теории относительности предлагается подходящее подмногообразие Коши-Римана многообразия с почти контактной метрической структурой. Авторы работы [2] получают уравнение движения заряженной частицы в общей теории относительности как уравнение Эйлера-Лагранжа функционала длины для некоторого четырехмерного неголономного распределения, задаваемого 4-потенциалом электромагнитного поля. Уравнения допустимых (горизонтальных) геодезических для этого распределения совпадают с уравнениями движения заряженной частицы общей теории относительности. На распределении определен метрический тензор лоренцевой сигнатуры $(+,-,-,-)$, что позволяет определять причинность, как в общей теории относительности. Авторы вводят ковариантное дифференцирование (линейную связность) и тензор кривизны для распределения. И, наконец, в работе [3] профессор Мирон в качестве модельного пространства в ОТО рассматривает касательное расслоение финслерова многообразия. В настоящей работе развивается диффереციально-геометрический аппарат, использование которого позволит, с одной стороны, взглянуть на работы [1, 2, 3] с несколько более общих позиций, а с другой - продолжить полученные там результаты на случай распределения с финслеровой метрикой. Мы определяем 9-мерное многообразие с почти контактной метрической структурой как модельное пространство общей теории относительности.

Помимо введения работа содержит два раздела.

Во втором разделе вводится понятие почти контактной кэлеровой структуры. Приводятся основные результаты внутренней геометрии почти контактных кэлеровых пространств. Обсуждаются понятия связности над распределением и продолженной связности. По сути, продолженная связность в несколько ином контексте и в других терминах впервые, по-видимому, была определена профессором Вагнером в [4] с целью построения тензора кривизны неголономного многообразия. Раздел завершает важный для дальнейшего пример одного класса почти контактных кэлеровых пространств. В третьем разделе строится модель девятимерного пространства-времени общей теории относительности.

2 Почти контактная кэлерова структура

Пусть X – гладкое многообразие нечетной размерности n, $\Xi(X)$ – $C^\infty(X)$-модуль гладких векторных полей на X. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞. *Почти контактной метрической структурой на X* называется совокупность $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ тензорных полей на X, где φ – тензор типа $(1, 1)$, называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η – вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой, g – (псевдо) риманова метрика. При этом

$$\eta(\vec{\xi}) = 1, \;\; \varphi(\vec{\xi}) = 0, \;\; \eta\circ\varphi = 0, \;\; \varphi^2\vec{x} = -\vec{x} + \eta(\vec{x})\vec{\xi}, \;\; g(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y}),$$

$\vec{x}, \vec{y} \in \Xi(X)$. Кососимметрический тензор $\Omega(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \varphi\vec{y})$ называется фундаментальной формой структуры. Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется *почти контактным метрическим многообразием.* В случае, когда $\Omega = d\eta$, почти контактная метрическая структура называется *контактной метрической структурой.*

Почти контактная метрическая структура называется нормальной, если $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где N_φ – кручение Нейенхейса, образованное тензором φ. Нормальная контактная метрическая структура называется сасакиевой структурой. Многообразие, с заданной на нем сасакиевой структурой, называется сасакиевым многообразием.

Пусть D – гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η, $D^\perp = Span(\vec{\xi})$ – его оснащение. Если ограничение формы $\omega = d\eta$ на распределении D дает невырожденную форму, то в этом случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $\ker\omega = Span(\vec{\xi})$ и называется вектором Риба.

Будем говорить, что почти контактная метрическая структура *почти нормальная*, если выполняется условие $N_\varphi + 2(d\eta\circ\varphi)\otimes\vec{\xi} = 0$.

Почти нормальные почти контактные метрические пространства в дальнейшем будем называть *почти контактными эрмитовыми пространствами.* Почти контактное эрмитово пространство назовем *почти контактным кэлеровым пространством*, если его фундаментальная форма замкнута. Почти контактное метрическое пространство назовем *почти K-контактным метрическим пространством*, если $L_{\vec{\xi}}g = 0$ и $L_{\vec{\xi}}\varphi = 0$. Различие в понятиях нормальной почти контактной метрической структуры и почти контактной эрмитовой структуры раскрывается следующей очевидной теоремой.

Теорема 1. *Почти контактная эрмитова структура является нормальной тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:* $\omega(\varphi\,\vec{u},\, \varphi\,\vec{v}) = \omega(\vec{u},\, \vec{v})$, $\vec{u}, \vec{v} \in \Gamma D$.

Почти нормальная контактная метрическая структура очевидным образом является сасакиевой структурой. Сасакиевы пространства пользуются большой популярностью у исследователей почти контактных метрических пространств по двум основным причинам. С одной стороны, существует большое количество интересных и содержательных примеров сасакиевых структур (см., например, [5]), с другой стороны - многообразия Сасаки обладают очень важными и естественными свойствами.

Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n)$ $(a, b, c, e = 1, \dots, n-1)$ на многообразии X будем называть адаптированной к неголономному многообразию D, если $D^\perp = Span(\dfrac{\partial}{\partial x^n})$ [6].

Пусть $P : TX \to D$ – проектор, определяемый разложением $TX = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ – адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему D: $D = Span(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии X неголономное поле базисов $\vec{e}_\alpha = (\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a\vec{e}_b]=M^n_{ab}\partial_n$, где компоненты M^n_{ab} образуют так называемый тензор неголономности [4]. Если потребовать, чтобы во всех используемых адаптированных картах выполнялось равенство $\vec{\xi}=\partial_n$, то, в частности, окажется справедливым равенство $[\vec{e}_a\vec{e}_b]=2\omega_{ba}\partial_n$, где $\omega=d\eta$. Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a=\partial_a-\Gamma^n_a\partial_n$ как базис, определяемый адаптированной картой. Заметим, что имеет место равенство $\partial_n\Gamma^n_a=0$.

Тензорное поле типа (p,q), заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D), если его координатное представление в адаптированной карте имеет вид:

$$t=t^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q}\vec{e}_{a_1}\otimes\dots\otimes\vec{e}_{a_p}\otimes dx^{b_1}\otimes\dots\otimes dx^{b_q}.$$

По-видимому, в теории почти контактных метрических пространств адаптированные координаты по существу использовались только в работах [6-8].

Назовем *допустимое тензорное поле интегрируемым*, если в окрестности каждой точки многообразия X найдется адаптированная карта, относительно которой компоненты поля постоянны. Форма $\omega=d\eta$ является одним из примеров интегрируемой допустимой тензорной структуры. Следующие две теоремы раскрывают значение понятия интегрируемой допустимой тензорной структуры в контексте наших исследований.

Теорема 2 [7]. *Допустимая почти комплексная структура интегрируема тогда и только тогда, когда имеет место равенство $P(N_\varphi)=0$.*

Теорема 3 [7]. *Почти контактная метрическая структура является почти контактной эрмитовой структурой тогда и только тогда, когда допустимая почти комплексная структура φ интегрируема.*

Используя адаптированные координаты, введем следующие допустимые тензорные поля: $h^a_b=\frac{1}{2}\partial_n\varphi^a_b$, $C_{ab}=\dfrac{1}{2}\partial_n g_{ab}$, $C^a_b=g^{da}C_{db}$, $\psi^b_a = g^{db}\omega_{da}$. Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивита тензора g: $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$. В результате непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 4 *Коэффициенты связности Леви-Чивита почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид:*

$$\widetilde{\Gamma}^c_{ab}=\Gamma^c_{ab},\quad \widetilde{\Gamma}^n_{ab}=\omega_{ba}-C_{ab},\quad \widetilde{\Gamma}^b_{an}=\widetilde{\Gamma}^b_{na}=C^b_a-\psi^b_a,\quad \widetilde{\Gamma}^n_{na}=\widetilde{\Gamma}^a_{nn}=0,$$

где $\Gamma^a_{bc}=\dfrac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_bg_{cd}+\vec{e}_cg_{bd}-\vec{e}_dg_{bc})$.

В случае контактного метрического пространства выражение для коэффициентов связности Леви-Чивита приведены в [6].

Под внутренней линейной связностью в неголономном многообразии D [4] понимается отображение $\nabla:\Gamma D\times\Gamma D\to\Gamma D$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{aligned}&1)\quad \nabla_{f_1\vec{u}_1+f_2\vec{u}_2}=f_1\nabla_{\vec{u}_1}+f_2\nabla_{\vec{u}_2};\\&2)\quad \nabla_{\vec{u}}f\vec{v}=f\nabla_{\vec{u}}\vec{v}+(\vec{u}f)\vec{v},\end{aligned}$$

где ΓD - модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определятся из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b=\Gamma^c_{ab}\vec{e}_c$. Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным

$$S(\vec{x},\vec{y})=\nabla_{\vec{x}}\vec{y}-\nabla_{\vec{y}}\vec{x}-P[\vec{x},\vec{y}].$$

Таким образом, в адаптированных координатах мы имеем

$$S^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba}.$$

Действие внутренней линейной связности естественным образом продолжается на произвольные допустимые тензорные поля. Важным примером внутренней линейной связности является внутренняя метрическая связность, однозначно определяемая условиями $\nabla g = 0$ и $S = 0$ [4]. В адаптированных координатах мы имеем: $\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc})$. Заметим, что $\Gamma^a_{bc} = \widetilde{\Gamma}^a_{bc}$ (см. теорему 4).

Так же как и связность в объемлющем пространстве, внутренняя линейная связность может быть определена заданием горизонтального распределения над пространством некоторого векторного расслоения. В случае внутренней связности в качестве такого расслоения выступает распределение D. Понятие *связности над распределением* использовалось применительно к неголономному многообразию с допустимой финслеровой метрикой в работе [8]. Говорят, что над распределением D задана связность, если распределение $\widetilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \to X$ разбивается в прямую сумму вида $\widetilde{D} = HD \oplus VD$, где VD - вертикальное распределение на тотальном пространстве D.

Введем на D структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ на многообразии X сверхкарту $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+\alpha})$ на многообразии D, где $x^{n+\alpha}$ – координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$. Построенную сверхкарту также будем называть адаптированной. Задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G^a_b(x^a, x^{n+a})$ такого, что $HD = \mathrm{Span}(\vec{\varepsilon}_a)$, где $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - G^b_a \partial_{n+b}$. В случае, когда $G^a_b(x^a, x^{n+a}) = \Gamma^a_{bc}(x^a) x^{n+c}$, связность над распределением определяется внутренней линейной связностью.

В работе [8] было введено понятие продолженной связности. Продолженная связность всегда рассматривается относительно некоторой связности над распределением и определяется разложением $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, где $HD \subset \widetilde{HD}$. По существу, продолженная связность является связностью в векторном расслоении. Как следует из определения продолженной связности, для ее задания (при условии уже существующей связности над распределением) достаточно задать векторное поле $\vec{u}$ на многообразии D, имеющее следующее координатное представление $\vec{u} = \partial_n + G^a_n \partial_{n+a}$. Компоненты объекта G^a_n преобразуются как компоненты вектора на базе. Полагая, что $G^a_n = 0$, получим продолженную связность, обозначаемую ∇^1.

В работе [4] допустимое тензорное поле, определяемое равенством $R(\vec{u}, \vec{v})\vec{w} = \nabla_{\vec{u}} \nabla_{\vec{v}} \vec{w} - \nabla_{\vec{v}} \nabla_{\vec{u}} \vec{w} - \nabla_{P[\vec{u}, \vec{v}]} \vec{w}$ названо Вагнером первым тензором кривизны Схоутена. Координатное представление тензора Схоутена в адаптированных координатах имеет вид: $R^a_{bcd} = 2\vec{e}_{[a} \Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^d_{[a||e||} \Gamma^e_{b]c}$. В случае, когда распределение D не содержит интегрируемое распределение размерности $n-2$, обращение в нуль тензора кривизны Схоутена равносильно тому, что параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых не зависит от пути переноса [4]. Назовем тензор Схоутена *тензором кривизны распределения* D, а распределение D, в случае обращения в нуль тензора Схоутена, – распределением нулевой кривизны. Нетрудно установить, что частные производные $\partial_n \Gamma^a_{bc} = P^a_{bc}$ являются компонентами допустимого тензорного поля [4].

Пусть $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ – почти контактная метрическая структура. Имеет место следующая теорема [7]:

Теорема 7. *Почти контактное метрическое многообразие допускает внутреннюю связность ∇ без кручения, такую, что $\nabla^1 \varphi = 0$, тогда и только тогда, когда допустимая* *структура φ интегрируема.*

Теорема 8. *Почти контактная метрическая структура является почти контактной кэлеровой структурой тогда и только тогда, когда $\nabla^1\varphi = 0$, где ∇ – внутренняя метрическая связность без кручения.*

Доказательство. Воспользуемся равенством, имеющим место для любого почти контактного метрического пространства [5]:

$$\begin{gathered}2g((\widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\varphi)\vec{y},\vec{z}) = 3d\Omega(\vec{x},\varphi\vec{y},\varphi\vec{z}) - 3d\Omega(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) + g(N^{(1)}(\vec{y},\vec{z})\varphi\vec{x}) + N^{(2)}(\vec{y},\vec{z})\eta(\vec{x})+\\ +2d\eta(\varphi\vec{y},\vec{x})\eta(\vec{z}) - 2d\eta(\varphi\vec{z},\vec{x})\eta(\vec{y}),\end{gathered} \tag{1}$$

где $N^{(1)} = N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi}$, $N^{(2)} = (L_{\varphi\vec{x}}\eta)\vec{y} - (L_{\varphi\vec{y}}\eta)\vec{x}$.

С учетом теоремы 2 и определения почти контактной кэлеровой структуры далее полагаем, что почти контактная метрическая структур $(\varphi,\vec{\xi},\eta,g)$ является почти нормальной. В этом случае $P(N_\varphi) = N_\varphi + 2(d\eta\circ\varphi)\otimes\vec{\xi} = 0$ и, таким образом, $N^{(1)} = 2(d\eta\otimes\vec{\xi} - (d\eta\circ\varphi)\otimes\vec{\xi})$, и равенство (1) принимает более простой вид:

$$\begin{gathered}2g((\widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\varphi)\vec{y},\vec{z}) = 3d\Omega\,(\vec{x},\varphi\vec{y},\varphi\vec{z}) - 3d\Omega\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) + N^{(2)}\,(\vec{y},\vec{z})\,\eta\,(\vec{x}) +\\ +2d\eta\,(\varphi\vec{y},\vec{x})\,\eta\,(\vec{z}) - 2d\eta\,(\varphi\vec{z},\vec{x})\,\eta(\vec{y}).\end{gathered} \tag{2}$$

Достаточность. Подставив в (2) $\vec{x} = \vec{e}_a$, $\vec{y} = \partial_n$, $\vec{z} = \vec{e}_c$, а затем $\vec{x} = \vec{e}_a$, $\vec{y} = \vec{e}_b$, $\vec{z} = \vec{e}_c$, получаем $d\Omega_{abn} = 0$ и $d\Omega_{abc} = 0$ соответственно, что и означает, что $d\Omega = 0$.

Необходимость. Предполагая, что имеет место $d\Omega = 0$, переписываем (1) в виде

$$2g((\widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\varphi)\vec{y},\vec{z}) = N^{(2)}\,(\vec{y},\vec{z})\,\eta\,(\vec{x}) + 2d\eta\,(\varphi\vec{y},\vec{x})\,\eta\,(\vec{z}) - 2d\eta\,(\varphi\vec{z},\vec{x})\,\eta(\vec{y}). \tag{3}$$

Подставляя в (3) $\vec{x} = \vec{e}_a$, $\vec{y} = \vec{e}_b$, $\vec{z} = \vec{e}_c$, получаем $\nabla_a\varphi^b_c = 0$. Что и требовалось доказать.

В заключение раздела мы сформулируем и докажем теорему, обобщающую следующий классический результат [5]: почти контактное метрическое пространство является сасакиевым пространством тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$(\widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\varphi)\vec{y} = g(\vec{x},\vec{y})\vec{\xi} - \eta\,(\vec{y})\,\vec{x}.$$

Теорема 9. *Почти контактная эрмитова структура является почти контактной кэлеровой структурой тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$(\widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\varphi)\vec{y} = d\eta\,(\varphi\vec{y},\vec{x})\,\vec{\xi} + \eta\,(\vec{y})\,(\varphi\circ\psi)\,(\vec{x}) - \eta\,(\vec{x})\,(\varphi\circ\psi - \psi\circ\varphi)\,\vec{y}. \tag{4}$$

Доказательство. Равенство (4) эквивалентно выполнению следующих условий: $\nabla\varphi = 0$, $\partial_n\varphi^a_b = 0$, $\partial_n g_{ab} = 0$. Последние два равенства записаны в адаптированных координатах. Первые два равенства можно объединить условием $\nabla^1\varphi = 0$, которое, в свою очередь, влечет равенство $\partial_n g_{ab} = 0$, что и доказывает теорему.

Проводя необходимые вычисления, получаем выражение для ненулевых компонент тензора кривизны почти контактного кэлерова пространства: $\widetilde{R}^d_{abc} = R^d_{abc} + 2\psi^d_{[a}\omega_{b]c} - 2\omega_{ab}\psi^d_c$, $\widetilde{R}^n_{abc} = 2\nabla_{[b}\omega_{a]c}$, $\widetilde{R}^d_{nbc} = \nabla_b\psi^d_c$, $\widetilde{R}^n_{nbc} = \psi^d_c\omega_{db}$, $\widetilde{R}^d_{abn} = 2\nabla_{[b}\psi^d_{a]}$, $\widetilde{R}^c_{nbn} = \psi^c_a\psi^d_b$. В случае сасакиева пространства выражение для ненулевых компонент тензора кривизны примет вид: $\widetilde{R}^d_{abc} = R^d_{abc} + 2\psi^d_{[a}\omega_{b]c} - 2\omega_{ab}\psi^d_c$, $\widetilde{R}^n_{nbc} = g_{bc}$, $\widetilde{R}^c_{nbn} = -\,\delta^c_b$. Компоненты тензора кривизны связности Леви-Чивита, таким образом, выражаются через компоненты тензора кривизны Схоутена и компоненты допустимых тензорных полей ψ, ω и их производные относительно внутренней метрической связности ∇.

Примеры. Первый пример – пример многообразия Сасаки с распределением нулевой кривизны - важен для понимания второго основного примера.

Примеры 1. Рассмотрим арифметическое пространство R^5, $x^2x^4 \neq 0$ со структурой Сасаки, определяемой следующим образом: $\vec{e}_1 = \partial_1 - x^2\partial_5$, $\vec{e}_2 = \partial_2$, $\vec{e}_3 = \partial_3 - x^4\partial_5$, $\vec{e}_4 = \partial_4$, $\eta = 2(dx^5 + x^2dx^1 + x^4dx^3)$, $\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_3$, $\varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}_4$. Очевидно, что $\omega(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}) = \omega(\vec{x}, \vec{y})$. Метрику определим с помощью равенства $g(\vec{x}, \vec{y}) = \omega(\varphi\vec{y}, \vec{x})$. Очевидно, что данное пространство является сасакиевым пространством с распределением нулевой кривизны. В адаптированных координатах мы имеем $\widetilde{R}^d_{abc} = 2\varphi^d_{[a}\omega_{b]c} - 2\omega_{ab}\varphi^d_c$, $\widetilde{R}^n_{nbc} = g_{bc}$, $\widetilde{R}^c_{nbn} = -\,\delta^c_b$. Пример 2. Рассмотрим векторное расслоение (D, π, X), где D – распределение контактной метрической структуры $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$. Если распределение D является распределением нулевой кривизны и не содержит интегрируемое распределение размерности $n-2$, то, как известно [4], выполняется равенство $P^a_{bc} = 0$. До конца работы будем предполагать, что $n > 3$. На тотальном пространстве D рассматриваемого векторного расслоения определим почти контактную метрическую структуру $(\widetilde{D}, \tilde{g}, J, d(\pi^* \circ \eta), D)$ полагая $\tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) = \tilde{g}(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = g(\vec{e}_a, \vec{e}_b)$, $\tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n) = \tilde{g}(\partial_{n+a}, \partial_n) = 0$, $J(\vec{\varepsilon}_a) = \partial_{n+a}$, $J(\partial_{n+a}) = -\,\vec{\varepsilon}_a$, $J(\partial_n) = 0$, где $\widetilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, $\widetilde{D} = HD \oplus VD$, VD – вертикальное распределение на тотальном пространстве D, а HD - горизонтальное распределение, определяемое внутренней линейной связностью. Векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n - \Gamma^b_{ac}x^{n+c}\partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a})$ определяют на D поле неголономных базисов, а формы $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a, \theta^{n+a} = dx^{n+a}\Gamma^a_{bc}x^{n+b}dx^c)$ – соответствующее поле кобазисов. Векторное поле ∂_n является полем Риба для почти контактной метрической структуры $(\widetilde{D}, \tilde{g}, J, d(\pi^* \circ \eta))$. Имеет место

Теорема 10. *Почти контактная метрическая структура $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, d(\pi^* \circ \eta))$ является почти контактной эрмитовой структурой тогда и только тогда, когда распределение D является распределением нулевой кривизны.*

Доказательство. Проводя необходимые вычисления, получаем:

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n + R^e_{abc}x^{n+c}\partial_{n+e}, \tag{5}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_n] = x^{n+c}P^b_{ac}\partial_{n+b}, \tag{6}$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma^c_{ab}\partial_{n+c}.) \tag{7}$$

Непосредственным следствием равенств (5-7) являются следующие равенства:

$$\begin{aligned} N_J\left(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b\right) &= -R^e_{abc}x^{n+c}\partial_{n+e}, \\ N_J\left(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}\right) &= 2\omega_{ba}\partial_n + R^e_{abc}x^{n+c}\partial_{n+e}, \\ N_J\left(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}\right) &= 0, \\ N_J\left(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n\right) &= N_J\left(\partial_{n+a}, \partial_n\right) = -x^{n+c}P^b_{ac}\partial_{n+b}. \end{aligned}$$

Из полученных равенств следует справедливость теоремы.

Покажем, что структура $(\widetilde{D}, \tilde{g}, J, d(\pi^* \circ \eta))$ не является нормальной.

Имеем: $N_J\left(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}\right) + 2d\widetilde{\eta}\left(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}\right)\partial_n = 2\omega_{ba}\partial_n + R^e_{abc}x^{n+c}\partial_{n+e}$.

Понятно, что независимо от кривизны распределения D последнее выражение не может быть нулем.

Теорема 11. *Почти контактная метрическая структура $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, d(\pi^* \circ \eta))$ является почти контактной кэлеровой структурой тогда и только тогда, когда структура $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ – сасакиева структура с распределением нулевой кривизны.*

Доказательство. Непосредственными вычислениями подтверждается справедливость следующего утверждения: $d\Omega = 0 \Leftrightarrow d\tilde{\Omega} = 0$, где $\tilde{\Omega}(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, J\vec{y})$, что и доказывает теорему.

Источником почти контактных метрических пространств внутренней нулевой кривизны является классическая механика и физика.

3 Оснащенные субфинслеровы пространства коразмерности 1

Рассмотрим оснащенное субфинслерово пространство коразмерности 1 $(X, D, F, D^{\perp})$ [8]. По аналогии с тем, как это сделано во втором разделе, определим на D, как на тотальном пространстве векторного расслоения, структуру почти контактного метрического пространства. Далее будем полагать, что размерность многообразия X равна 5, а D является распределением с метрикой Бервальда-Моора нулевой кривизны [9]. Как показано в [9], можно добиться обращения в нуль кривизны распределения D полагая, например, $g_{1234} = e^{\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4}$. При данных предположениях оказывается справедливой теорема 12, аналогичная теореме 11.

Теорема 12. *Почти контактная метрическая структура* $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, d(\pi^* \circ \eta))$, *порождаемая метрикой Бервальда-Моора нулевой кривизны, является почти контактной кэлеровой структурой.*

Далее, для получения уравнений Эйнштейна, достаточно воспользоваться рассуждениями, проведенными в [3] и результатом следующей теоремы.

Теорема 13. *Тензор Риччи многообразия с почти контактной кэлеровой структуры совпадает с тензором Риччи соответствующего распределения.*

Литература

[1] Duggal K.L. Space time manifolds and contact structures // *Internat. J. Math. Math. Sci.*, Vol. 13, №3, 1990, p. 545–554.

[2] Krym V.R., Petrov N.N The curvature tensor and the Einstein equations for a four-dimensional nonholonomic distribution // *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics*, Vol. 41, №3, 2008, p. 256–265.

[3] Miron R. On the Finslerian theory of relativity // *Tensor (N.S.)*, Vol. 44, 1987, p. 63–84.

[4] агнер В.В. Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // *Тр. семинара по векторному и тензорному анализу.* Вып. 5, 1941, с. 173-255 .

[5] Blair D.E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1976.

[6] Bejancu A. Kahler contact distributions // *Journal of Geometry and Physics* 60, 2010, p. 1958–1967.

[7] Галаев С.В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика* 12 (1), 2012, p. 16–22.

[8] Букушева А.В., Галаев С.В. Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер.* 2012. Т. 12. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 3. с. 17–22.

[9] Букушева А.В. Неголономные геодезические пространств с метрикой Бервальда-Моора // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(20), том 10, 2013, с. 345–350.

THE EINSTEIN EQUATIONS FOR CASE OF NONHOLONOMIC DISTRIBUTIONS WITH BERWALD-MOOR METRIC

S.V. Galaev

Saratov State University, Saratov, Russia

sgalaev@mail.ru

The notion of an extended connection closing sub-Finslerian space codimension 1 is introduced. On the zero-curvature distribution of sub-Finslerian space with the Finsler metric an almost contact Kählerian space is obtained.

Key Words: interior connection, extended connection, almost contact Kählerian space, zero-curvature sub-Finslerian space with Berwald-Moor metric.