ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НА МНОЖЕСТВАХ МАТРИЧНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

А.М. Гальмак

Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев, Белоруссия

halm54@mail.ru

Основными объектами изучения в данной статье являются полиадические операции на множестве $\mathbf{M}^J(P)$, элементами которого являются функции, определённые на непустом множестве J, у которых все значения принадлежат множеству $\mathbf{M}(P)$ всех матриц с элементами из некоторого кольца P. Такие полиадические операции впервые появились у Э. Поста, который рассматривал случай $J = \{1, \ldots, m-1\}$, C — поле комплексных чисел.

Ключевые слова: полиадическая операция, матрица, функция, полугруппа, группа.

1 Введение

Впервые полиадическая операция на множестве матричнозначных функций появилась в работе Э. Поста [1]. Эта операция возникла естественным образом на пути изучении m-арных матриц, которые Э. Пост определил [1, с. 331] как упорядоченные наборы $(M_1, \ldots, M_{m-1})$, все компоненты которых являются невырожденными квадратными матрицами n-го порядка над полем C комплексных чисел. Понятно, что множество всех таких m-арных матриц совпадает с $(m-1)$-ой декартовой степенью $\mathbf{GL}_n^{m-1}(\mathrm{C})$ полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(C)$. Именно на множестве $\mathbf{GL}_n^{m-1}(\mathrm{C})$ Э. Пост и определил свою m-арную операцию, относительно которой, как он установил [1, с. 332], это множество является m-арной группой. При $m = 2$ m-арные матрицы Э. Поста — это обычные матрицы, а m-арная группа $\mathbf{GL}_n^{m-1}(\mathrm{C})$ совпадает с группой $\mathbf{GL}_n(\mathrm{C})$. Так как любой элемент $(a_1, \ldots, a_{m-1})$ конечной декартовой степени A^{m-1} произвольного множества A можно отождествить с некоторой функцией $f\colon j \to a_j$ с областью определения $J = \{1, \ldots, m-1\}$ и со значениями во множестве A, то можно считать, что операция Э. Поста, о которой идёт речь, определена на множестве $\mathbf{GL}_n^J(\mathrm{C})$ всех функций с областью определения $J = \{1, \ldots, m-1\}$ и со значениями в полной линейной группе $\mathbf{GL}_n(\mathrm{C})$.

Конструкция, которую использовал Э. Пост при построении своей mарной операции, допускает различные обобщения. Реализации некоторых из этих обобщений посвящены работы А.К. Слипенко [2,3], а также ряд работ автора, ссылки на которые будут появляться далее в тексте по мере необходимости. Здесь же отметим только книгу [4], в которой, в частности, изучались свойства l-арного группоида $< A^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$, где J — произвольное множество, σ – любая его подстановка, A – произвольный группоид. При этом l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,J}$ определяется по следующей схеме: вначале на множестве A^J всех функций с областью определения J и со значениями в группоиде A равенством

$$(\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(\sigma(j)), \quad j \in J \tag{1.1}$$

определяется бинарная операция $\overset{\sigma}{\circ}$, а затем с её помощью – l-арная операция

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,J} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\ldots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)) \ldots)). \tag{1.2}$$

Понятно, что операция $[\ ]_{2,\sigma,J}$ совпадает с операцией $\overset{\sigma}{\circ}$.

Замечание 1.1. Если $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, то операции $\overset{\sigma}{\circ}$ и $[\ ]_{l,\sigma,J} = [\ ]_{l,\sigma,k}$ определены на k-ой декартовой степени A^k [5–7]. При этом равенство (1.1) может быть записано в виде

$$\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y} = (x_1 y_{\sigma(1)}, x_2 y_{\sigma(2)}, \ldots, x_k y_{\sigma(k)}),$$

где

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k), \qquad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k).$$

Легко заметить, что если σ — подстановка множества $\{1, 2, \ldots, k\}$, то операция $\overset{\sigma}{\circ}$ совпадает с операцией

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \circ (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1 y_2, x_2 y_3, \ldots, x_{k-1} y_k, x_k y_1)$$

из [7, определение 2.2.3], а операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ – с операцией $[\ ]_{l,k}$ из того же определения.

Если в описанной схеме в качестве группоида A взять группу $\mathbf{GL}_n(\mathrm{C})$ и положить $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, $\quad l = k+1$, $\quad \sigma = (12 \ldots k)$, то получится конструкция Э. Поста.

В [4, следствие 2.2.4] установлено, что замена в определении операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$ группоида полугруппой позволяет переписать равенство (1.2) в виде

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,J}(j) = \mathbf{x}_1(j)\mathbf{x}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{x}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma^{l-1}(j)), \quad j \in J. \tag{1.3}$$

Основными объектами изучения в данной статье являются полиадические операции на множестве $\mathbf{M}^J(P)$, элементами которого являются функции, определённые на множестве J, у которых все значения принадлежат множеству $\mathbf{M}(P)$ всех матриц с элементами из некоторого кольца P. Так как для одноэлементного множества J, в частности для множества $J = \{1\}$, множество $\mathbf{M}^J(P)$ совпадает с множеством $\mathbf{M}(P)$, то, возвращаясь к произвольному множеству J, можно сказать, что матричнозначные функции из $\mathbf{M}^J(P)$ вполне уместно рассматривать как обобщённые матрицы. Имея в виду это обстоятельство, матричнозначные функции из $\mathbf{M}^J(P)$ мы будем называть также J-матрицами. Если $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, то J-матрицы называют k-компонентными вектор-матрицами [8].

Определения некоторых понятий из теории полиадических групп будут приводиться в тексте статьи. Желающим более подробно ознакомиться с данной тематикой, можно порекомендовать статью Э. Поста [1], а также книги [9–11] и статью [12]. Необходимую информацию о подстановках множеств произвольной мощности можно почерпнуть из книг [13, 14].

Для обозначения множества всех квадратных матриц порядка n с элементами из P будем использовать стандартный символ $\mathbf{M}_n(P)$, символом $\mathbf{M}_{m\times n}(P)$ обозначается множество всех матриц размера $m \times n$ над P. Множество всех подстановок множества J обозначается символом $\mathbf{S}_J$, в частности, $\mathbf{S}_k$ — множество всех подстановок множества $J = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Как уже отмечалось, A^J — это множество всех функций с областью определения J и со значениями во множестве A, в частности,

$$A^{\{1,2,\ldots,k\}} = A^k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid x_1, x_2, \ldots, x_k \in A\},$$
$$A^{\mathrm{N}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots) \mid x_i \in A\},$$
$$A^{\mathrm{Z}} = \{(\ldots, x_{-k}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \mid x_i \in A\}.$$

Если $< A, * >$ — группоид, то $< A^J, * >$ — группоид с операцией $*$, которая определяется поточечно:

$$(\mathbf{x} * \mathbf{y})(j) = \mathbf{x}(j) * \mathbf{y}(j), \quad j \in J.$$

Если 0 — нуль группоида $< A, * >$, то нулем группоида $< A^J, * >$ является постоянная функция $\mathbf{0}$, ставящая в соответствие каждому $j \in J$ нуль группоида A: $\mathbf{0}(j) = 0$. Если же группоид $< A, * >$ содержит единицу 1, то единицей группоида $< A^J, * >$ является постоянная функция $\mathbf{e}$, ставящая в соответствие каждому $j \in J$ единицу группоида $A : \mathbf{e}(j) = 1$.

Если A – кольцо (линейное пространство над полем P, линейная алгебра над полем P), то декартову степень A^J можно превратить в кольцо (линейное пространство над P, линейную алгебру над P), определив операции сложения и умножения элементов из A^J, а также умножение скаляров из P на элементы из A^J поточечно:

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})(j)=\mathbf{x}(j)+\mathbf{y}(j), \quad (\mathbf{x}\mathbf{y})(j)=\mathbf{x}(j)\mathbf{y}(j), \quad (\lambda\mathbf{x})(j)=\lambda\mathbf{x}(j).$$

Замечание 1.2. Если A – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей 1, то A^J – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей $\mathbf{e}$. Противоположный элемент $-\,\mathbf{x}\in A^J$ элемента $\mathbf{x}\in A^J$ ставит в соответствие каждому $j\in J$ противоположный элемент $-\,\mathbf{x}(j)\in A$ элемента $\mathbf{x}(j)\in A:\ (-\mathbf{x})(j)=-\,\mathbf{x}(j)$.

2 J-Матрицы

Следующее определение обобщает понятие вектор-матрицы из [8], в том числе понятие m-арной матрицы из работы Э. Поста [1].

Определение 2.1. Пусть P — ассоциативное кольцо, J — произвольное множество. Матричнозначная функция $\mathbf{A}$, определенная на множестве J, такая, что

$$\mathbf{A}(j)\in\mathbf{M}_{m_j\times n_j}(P), \quad j\in J, \tag{2.1}$$

называется *J-матрицей размера $(m_j\times n_j,\ j\in J)$ над P.*

Понятно, что если J — одноэлементное множество, то J-матрицы — это обычные матрицы. Если $J=\{1,2,\ldots,k\}$, то J-матрицы — это k-компонентные вектор-матрицы размера $(m_1\times n_1,\ \ldots, m_k\times n_k)$, которые, как уже отмечалось, были определены в [1].

J-Матрица $\mathbf{A}$, у которой все значения (2.1) — матрицы одного и того же размера $m\times n$, называется *J-матрицей размера $m\times n$.*

J-Матрица $\mathbf{A}$, у которой все значения (2.1) — квадратные матрицы порядков n_j, называется *квадратной J-матрицей порядка* $(n_j,\ j\in J)$.

J-Матрица $\mathbf{A}$, у которой все значения (2.1) — квадратные матрицы одного и того же порядка n, называется *квадратной J-матрицей порядка n.*

Ясно, что множество всех J-матриц над P совпадает с множеством $\mathbf{M}^J(P)$, для обозначения которого мы будем использовать также безиндексный символ $\mathbf{M}(J,\ P)$, то есть полагаем $\mathbf{M}^J(P)=\mathbf{M}(J,P)$.

Определение 2.2. Если $l\geq 2$, σ — подстановка из $\mathbf{S}_J$,

$$\mathbf{A}_i\in\mathbf{M}(J,P), i=1,\ldots,l$$

– такие J-матрицы над P, что для любого $j\in J$ определено произведение

$$\mathbf{Y}(j)=\mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j))\ldots\mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)), \tag{2.2}$$

то положим

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}=\mathbf{Y}, \tag{2.3}$$

где J-матрица $\mathbf{Y}$ определяется с помощью (2.2).

Таким образом, (2.2) и (2.3) определяют на множестве $\mathbf{M}(J,P)$ частичную l-арную операцию $[\ ]_{l,\sigma,J}$, которую иногда для краткости будем называть l-арным произведением.

Замечание 2.1. Если в определении 2.2 все значения J-матриц $\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_l$ являются матрицами 1-го порядка, то операция $[\ ]_{l,\sigma,J}$ определена на декартовой степени P^J. Таким образом, операцию $[\ ]_{l,\sigma,J}$ из определения 2.2 можно считать обобщением операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$ из [4].

Аналогично бинарному случаю, l-арное произведение (2.3) определено не всегда, а только в тех случаях, когда для любых соседних сомножителей в правой части (2.2), число столбцов предшествующего сомножителя совпадает с числом строк последующего сомножителя.

Пример 2.1. Пусть $l=3$, $J=\mathrm{N}$, σ – подстановка множества N, переводящее нечетное число в следующее за ним число, а четное число — в предшествующее ему число, то есть $\sigma(j)=j+(-1)^{j+1}$ для любого $j\in\mathrm{N}$. Пусть также

$$\mathbf{A}=(A_1=U_1,\ A_2=U_1^{-1},\ A_3=U_2,\ A_4=U_2^{-1},\ \dots,\ A_{2k-1}=U_k,\ A_{2k}=U_k^{-1},\ \dots)$$

– квадратная N-матрица над P, у которой компоненты

$$A_{2k-1}=U_k,\quad A_{2k}=U_k^{-1},\quad k=1,2,\dots$$

являются обратимыми матрицами порядка n_k;

$$\mathbf{B}=(B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ \dots,B_{2k-1},\ B_{2k},\ \dots)$$

— квадратная N-матрица над P, у которой для любого $k=1,2,\dots$ компоненты B_{2k-1}, B_{2k}, являются матрицами порядка n_k, например, $n_k=k$.

Так как для любого $k=1,2,\dots$ верно

$$\begin{gathered}\mathbf{A}(2k-1)\mathbf{A}(\sigma(2k-1))\mathbf{B}(\sigma^2(2k-1))=A_{2k-1}A_{\sigma(2k-1)}B_{\sigma^2(2k-1)}=\\=A_{2k-1}A_{2k}B_{2k-1}=U_kU_k^{-1}B_{2k-1}=B_{2k-1},\\ \mathbf{A}(2k)\mathbf{A}(\sigma(2k))\mathbf{B}(\sigma^2(2k))=A_{2k}A_{\sigma(2k)}B_{\sigma^2(2k)}=A_{2k}A_{2k-1}B_{2k}=U_k^{-1}U_kB_{2k}=B_{2k},\end{gathered}$$

то для любого $j\in\mathrm{N}$ определено произведение

$$\mathbf{A}(j)\mathbf{A}(\sigma(j))\mathbf{B}(\sigma^2(j))=\mathbf{B}(j).$$

Поэтому, согласно определению 2.2

$$[\mathbf{AAB}]_{3,\sigma,\mathrm{N}}=\mathbf{B}.$$

В частности, если $\mathbf{B}=\mathbf{A}$, то

$$[\mathbf{AAA}]_{3,\sigma,\mathrm{N}}=\mathbf{A}.$$

Пример 2.2. Пусть $l=3$, $J=\mathrm{Z}$, $\sigma(j)=-j$ для любого $j\in\mathrm{Z}$. Пусть также

$$\mathbf{A}=(\dots,\ A_{-j}=U_j^{-1}\ ,\ \dots,\ A_{-1}=U_1^{-1},\ A_0=E,\ A_1=U_1,\ \dots,\ A_j=U_j,\ \dots)$$

— квадратная Z-матрица над P, у которой компонента $A_0=E$ — единичная матрица порядка n_0, и для любого $j=1,2,\dots$ компоненты A_j и A_{-j} являются взаимообратными матрицами порядка n_j;

$$\mathbf{B}=(\dots,B_{-j},\ \dots,B_{-1},B_0,B_1,\ \dots,B_j,\ \dots)$$

— квадратная Z-матрица над P, у которой для любого $j\in\mathrm{Z}$ компоненты B_j и B_{-j} являются матрицами порядка n_j.

Так как для $j\in\mathrm{Z}$ определено произведение

$$\mathbf{A}(j)\mathbf{A}(\sigma(j))\mathbf{B}(\sigma^2(j))=A_jA_{\sigma(j)}B_{\sigma^2(j)}=A_jA_{-j}B_j=U_jU_j^{-1}B_j=B_j=\mathbf{B}(j),$$

то, согласно определению 2.2
$$[\mathbf{AAB}]_{3,\sigma,\mathrm{Z}} = \mathbf{B}.$$
В частности, если $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, то
$$[\mathbf{AAA}]_{3,\sigma,\mathrm{Z}} = \mathbf{A}.$$

Пример 2.3. Пусть $l = 3$, $J = \mathrm{N}$, σ – та же подстановка множества N, что и в примере 2.1. Пусть также

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_{2k-1}, A_{2k}, \ldots), \mathbf{B} = (B_1, B_2, , \ldots, B_{2k-1}, B_{2k}, \ldots),$$
$$\mathbf{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_{2k-1}, C_{2k}, \ldots)$$

— такие N-матрицы над P, что для любого $k = 1, 2, \ldots$: у N-матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ нечетные компоненты A_{2k-1} и B_{2k-1} имеют размер $m_k \times n_k$, а четные компоненты A_{2k} и B_{2k} имеют размер $n_k \times m_k$; у N-матрицы $\mathbf{C}$ нечетные компоненты C_{2k-1} имеют размер $m_k \times m_k$, а четные компоненты C_{2k} имеют размер $n_k \times n_k$.

Так как для любого $j \in \mathrm{N}$ определено произведение

$$\mathbf{A}(j)\mathbf{B}(\sigma(j))\mathbf{C}(\sigma^2(j)) = A_j B_{\sigma(j)} C_{\sigma^2(j)} = D_j = \mathbf{D}(j),$$

которое при нечётном j является матрицей размера $m_k \ldots m_k$, а при чётном j является матрицей размера $n_k \times n_k$, то определена N-матрица

$$[\mathbf{ABC}]_{3,\sigma,\mathrm{N}} = \mathbf{D},$$

которая имеет тот же размер, что и N-матрица $\mathbf{C}$.

Пример 2.4. Пусть $l = 3$, $J = \mathrm{N}$, σ — та же подстановка множества N, что и в примере 2.1. Пусть также

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_{2k-1}, A_{2k}, \ldots), \quad \mathbf{B} = (B_1, B_2, \ldots, B_{2k-1}, B_{2k}, \ldots),$$

$$\mathbf{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_{2k-1}, C_{2k}, \ldots)$$

– такие N-матрицы над P, что для любого $k = 1, 2, \ldots$ нечетные компоненты A_{2k-1}, B_{2k-1} и C_{2k-1} имеют размер $m_k \times n_k$, а четные компоненты A_{2k}, B_{2k} и C_{2k} имеют размер $n_k \times m_k$.

Так как для любого $j \in \mathrm{N}$ определено произведение

$$\mathbf{A}(j)\mathbf{B}(\sigma(j))\mathbf{C}(\sigma^2(j)) = A_j B_{\sigma(j)} C_{\sigma^2(j)} = D_j = \mathbf{D}(j),$$

которое при нечётном j является матрицей размера $m_k \times n_k$, а при чётном j является матрицей размера $n_k \times m_k$, то определена N-матрица

$$[\mathbf{ABC}]_{3,\sigma,\mathrm{N}} = \mathbf{D},$$

которая имеет тот же размер, что и N-матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$.

Приведённые примеры допускают различные обобщения. Прежде, чем привести одно из таких обобщений, напомним [15], что $m \times n$ матрица A^+ называется псевдообратной для $n \times m$ матрицы A, если

$$AA^+A = A, A^+ = UA^* = A^*V,$$

где U и V – некоторые матрицы, A^* – сопряженная матрица для A. Псевдообратные матрицы обладают рядом свойств, из которых нам понадобится следующее $(A^+)^+ = A$.

Пример 2.5. Пусть порядок подстановки σ множества J равен двум, а её носитель совпадает с множеством J, то есть множество J является дизъюнктным объединением двухэлементных множеств $\{p_k, q_k\}$, где k пробегает некоторое множество Λ, на каждом из которых подстановка σ индуцирует транспозицию, то есть $\sigma(p_k)=q_k$, $\sigma(q_k)=p_k$. Определим J-матрицу $\mathbf{A}$ над P таким образом, что если $\mathbf{A}(p_k)$ – матрица размера $m_k \times n_k$, то $\mathbf{A}(q_k)$ – псевдообратная для неё матрица размера $n_k \times m_k$, то есть $\mathbf{A}(q_k)=(\mathbf{A}(p_k))^+$.

Так как σ^2 – тождественная подстановка и, кроме того, $((\mathbf{A}(p_k))^+)^+=\mathbf{A}(p_k)$, то для любого $k\in\Lambda$ имеем

$$\mathbf{A}(p_k) = \mathbf{A}(p_k)(\mathbf{A}(p_k))^+\mathbf{A}(p_k) = \mathbf{A}(p_k)\mathbf{A}(q_k)\mathbf{A}(p_k) = \mathbf{A}(p_k)\mathbf{A}(\sigma(p_k))\mathbf{A}(\sigma^2(p_k)),$$

$$\mathbf{A}(q_k) = \mathbf{A}(q_k)(\mathbf{A}(q_k))^+\mathbf{A}(q_k) = \mathbf{A}(q_k)((\mathbf{A}(p_k))^+)^+\mathbf{A}(q_k) =$$
$$= \mathbf{A}(q_k)\mathbf{A}(p_k)\mathbf{A}(q_k) = \mathbf{A}(q_k)\mathbf{A}(\sigma(q_k))\mathbf{A}(\sigma^2(q_k),$$

то для любого $j\in J$ определено произведение

$$\mathbf{A}(j)\mathbf{A}(\sigma(j))\mathbf{A}(\sigma^2(j)) = \mathbf{A}(j).$$

Поэтому, согласно определению 2.2

$$[\mathbf{AAA}]_{3,\sigma,J} = \mathbf{A}.$$

Легко проверяется, что для любого нечетного l справедливо равенство

$$[\underbrace{\mathbf{A}\dots\mathbf{A}}_{l}]_{l,\sigma,J} = \mathbf{A},$$

из которого при $l=3$ получается предыдущее равенство.

Замечание 2.2. Если в примере 2.5 для любого $k\in\Lambda$ положить $m_k=n_k$, то J-матрицы $\mathbf{A}(p_k)$ и $\mathbf{A}(q_k)$ являются взаимообратными.

Замечание 2.3. Если в примере 2.5 положить $l=3$, $J=\mathrm{N}$, $\Lambda=\mathrm{N}$, σ – та же подстановка множества N, что и в примере 2.1, то множество N является дизъюнктным объединением двухэлементных множеств $\{2k-1, 2k\}$, где $k\in\mathrm{N}$, на каждом из которых подстановка σ индуцирует транспозицию. Если далее $\mathbf{A}(p_k)=\mathbf{A}(2k-1)$ – квадратная матрица порядка n_k, то $\mathbf{A}(q_k)=\mathbf{A}(2k)$ – обратная для неё матрица, то есть $\mathbf{A}(2k)=(\mathbf{A}(2k-1))^{-1}$. В результате получаем равенство $[\mathbf{AAA}]_{3,\sigma,\mathrm{N}}=\mathbf{A}$ из примера 2.1.

Предложение 2.1. *Пусть – P – ассоциативное кольцо,*

$$\mathbf{A}_m \in \mathbf{M}(J,P), \quad m = 1,\dots,2l-1,$$

σ – подстановка из $\mathbf{S}_J$, удовлетворяющая условию $\sigma^l=\sigma$. Тогда, если определена J-матрица

$$[[\mathbf{A}_1\dots\mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}\mathbf{A}_{l+1}\dots\mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,J}, \tag{2.4}$$

то для любого $i=1,\dots,l-1$ определена J-матрица

$$[\mathbf{A}_1\dots\ \mathbf{A}_i[\mathbf{A}_{i+1}\dots\ \mathbf{A}_{i+l}]_{l,\sigma,J}\mathbf{A}_{i+l+1}\dots\ \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,J} \tag{2.5}$$

и верно равенство

$$[[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}\mathbf{A}_{l+1} \ldots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,J} = \\ = [\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_i[\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_{i+l}]_{l,\sigma,J}\mathbf{A}_{i+l+1} \ldots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,J}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Пусть определена J-матрица (2.4) и положим

$$[[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}\mathbf{A}_{l+1} \ldots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,J} = \mathbf{R},$$

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J} = \mathbf{Y}.$$

Тогда для любого $j \in J$, используя равенство $\sigma^l = \sigma$, получим

$$\mathbf{R}(j) = \mathbf{Y}(j)\mathbf{A}_{l+1}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)) = \\ = \mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j))\mathbf{A}_{l+1}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)) = \\ = \mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_i(\sigma^{i-1}(j)) \\ \mathbf{A}_{i+1}(\sigma^i(j))\mathbf{A}_{i+2}(\sigma^{i+1}(j)) \ldots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j))\mathbf{A}_{l+1}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_{i+l}(\sigma^i(j)) \\ \mathbf{A}_{i+l+1}(\sigma^{i+1}(j)) \ldots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)) = \\ = \mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_i(\sigma^{i-1}(j)) \\ \mathbf{A}_{i+1}(\sigma^i(j))\mathbf{A}_{i+2}(\sigma^{i+1}(j)) \ldots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j))\mathbf{A}_{l+1}(\sigma^l(j)) \ldots \mathbf{A}_{i+l}(\sigma^{l-1+i}(j)) \\ \mathbf{A}_{i+l+1}(\sigma^{i+1}(j)) \ldots \ \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)) = \\ = \mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_i(\sigma^{i-1}(j)) \\ \mathbf{A}_{i+1}(\sigma^i(j))\mathbf{A}_{i+2}(\sigma(\sigma^i(j))) \ldots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1-i}(\sigma^i(j))) \ldots \mathbf{A}_{i+l}(\sigma^{l-1}(\sigma^i(j))) \\ \mathbf{A}_{i+l+1}(\sigma^{i+1}(j)) \ldots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)),$$

то есть

$$\mathbf{R}(j) = \mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_i(\sigma^{i-1}(j)) \\ \mathbf{A}_{i+1}(\sigma^i(j))\mathbf{A}_{i+2}(\sigma(\sigma^i(j))) \ldots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1-i}(\sigma^i(j))) \ldots \mathbf{A}_{i+l}(\sigma^{l-1}(\sigma^i(j))) \\ \mathbf{A}_{i+l+1}(\sigma^{i+1}(j)) \ldots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)). \tag{2.7}$$

Положим в последнем равенстве

$$\mathbf{Z}(\sigma^i(j)) = \mathbf{A}_{i+1}(\sigma^i(j))\mathbf{A}_{i+2}(\sigma(\sigma^i(j))) \ldots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1+i}(\sigma^i(j))) \ldots \mathbf{A}_{i+l}(\sigma^{l-1}(\sigma^i(j))). \tag{2.8}$$

Если j пробегает всё множество J, то $\sigma^i(j)$ также пробегает всё множество J. Поэтому из (2.8) следует, что определена J-матрица

$$[\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_{i+l}]_{l,\sigma,J} = \mathbf{Z}.$$

Подставив (2.8) в (2.7), получим

$$\mathbf{R}(j) = \mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_i(\sigma^{i-1}(j))\mathbf{Z}(\sigma^i(j))\mathbf{A}_{i+l+1}(\sigma^{i+1}(j)) \ldots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)),$$

а это значит, что существует J-матрица (2.5) и верно равенство (2.6). Предложение доказано.

Предложение 2.2. *Пусть P – ассоциативное кольцо,*

$$\mathbf{A}_m \in \mathbf{M}(J, P), \quad m = 1, \ldots, 2l-1,$$

σ – подстановка из $\mathbf{S}_J$, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда, если для некоторого $i = 1, \ldots, l-1$ определена J-матрица (2.5), то определена J-матрица (2.4) и верно (2.6).

Доказательство. Пусть определена J-матрица (2.5) и положим

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_i[\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_{i+l}]_{l,\sigma,J}\mathbf{A}_{i+l+1} \ldots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,J} = \mathbf{S},$$

пусть так же, как и в доказательстве предложения 2.2,

$$[\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_{i+l}]_{l,\sigma,J} = \mathbf{Z}.$$

Тогда для любого $j \in J$ верно

$$\begin{gathered}
\mathbf{S}(j) = \mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_i(\sigma^{i-1}(j))\mathbf{Z}(\sigma^i(j))\mathbf{A}_{i+l+1}(\sigma^{i+1}(j)) \ldots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)) = \\
= \mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_i(\sigma^{i-1}(j)) \\
\mathbf{A}_{i+1}(\sigma^i(j))\mathbf{A}_{i+2}(\sigma(\sigma^i(j))) \ldots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1-i}(\sigma^i(j))) \ldots \mathbf{A}_{i+l}(\sigma^{l-1}(\sigma^i(j))) \\
\mathbf{A}_{i+l+1}(\sigma^{i+1}(j)) \ldots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)) = \\
= \mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_i(\sigma^{i-1}(j)) \\
\mathbf{A}_{i+1}(\sigma^i(j))\mathbf{A}_{i+2}(\sigma^{i+1}(j)) \ldots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j))\mathbf{A}_{l+1}(\sigma^l(j)) \ldots \mathbf{A}_{i+l}(\sigma^{l-1+i}(j)) \\
\mathbf{A}_{i+l+1}(\sigma^{i+1}(j)) \ldots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)) = \\
= \mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_i(\sigma^{i-1}(j)) \\
\mathbf{A}_{i+1}(\sigma^i(j))\mathbf{A}_{i+2}(\sigma^{i+1}(j)) \ldots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j))\mathbf{A}_{l+1}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_{i+l}(\sigma^i(j)) \\
\mathbf{A}_{i+l+1}(\sigma^{i+1}(j)) \ldots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)) = \\
= \mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j))\mathbf{A}_{l+1}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)),
\end{gathered}$$

то есть

$$\mathbf{S}(j) = \mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j))\mathbf{A}_{l+1}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)). \tag{2.9}$$

Положим в последнем равенстве

$$\mathbf{Y}(j) = \mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)). \tag{2.10}$$

Из (2.10) видно, что существует J-матрица

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J} = \mathbf{Y}$$

со значениями (2.10). Подставив (2.10) в (2.9), получим

$$\mathbf{S}(j) = \mathbf{Y}(j)\mathbf{A}_{l+1}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_{2l-1}(\sigma^{l-1}(j)),$$

а это значит, что существует J-матрица (2.4) и верно равенство (2.6). Предложение доказано.

Предложения 2.1 и 2.2 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть P – ассоциативное кольцо,*

$$\mathbf{A}_m \in \mathbf{M}(J, P), \quad m = 1, \ldots, 2l-1,$$

σ – подстановка из $\mathbf{S}_J$, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда, если для некоторого $i = 0, 1, \ldots, l-1$ определена J-матрица

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_i[\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_{i+l}]_{l,\sigma,J}\mathbf{A}_{i+l+1} \ldots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,J},$$

то для любого $j = 0, 1, \ldots, l-1$ *определена* J*-матрица*

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_j[\mathbf{A}_{j+1} \ldots \mathbf{A}_{j+l}]_{l,\sigma,J}\mathbf{A}_{j+l+1} \ldots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,J},$$

и верно равенство

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_i[\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_{i+l}]_{l,\sigma,J}\mathbf{A}_{i+l+1} \ldots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,J} =$$
$$= [\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_j[\mathbf{A}_{j+1} \ldots \mathbf{A}_{j+l}]_{l,\sigma,J}\mathbf{A}_{j+l+1} \ldots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,J}.$$

Полагая в теореме 3.1 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 2.1 [8]. *Пусть*

$$\mathbf{A}_m = (A_{m1}, \ldots, A_{mk}), \quad m = 1, \ldots, 2l-1$$

– k*-компонентные вектор-матрицы над ассоциативным кольцом* P, σ *– подстановка из* S_k*, удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$*. Тогда, если для некоторого* $i = 0, 1, \ldots, l-1$ *определена* k*-компонентная вектор-матрица*

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_i[\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_{i+l}]_{l,\sigma,k}\mathbf{A}_{i+l+1} \ldots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,k},$$

то для любого $j = 0, 1, \ldots, l-1$ *определена* k*-компонентная вектор-матрица*

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_j[\mathbf{A}_{j+1} \ldots \mathbf{A}_{j+l}]_{l,\sigma,k}\mathbf{A}_{j+l+1} \ldots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,k},$$

и верно равенство

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_i[\mathbf{A}_{i+1} \ldots \mathbf{A}_{i+l}]_{l,\sigma,k}\mathbf{A}_{i+l+1} \ldots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,k} =$$
$$= [\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_j[\mathbf{A}_{j+1} \ldots \mathbf{A}_{j+l}]_{l,\sigma,k}\mathbf{A}_{j+l+1} \ldots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l,\sigma,k}.$$

Так как любая подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$, порядок которой не превосходит 2 (каждый независимый цикл подстановки σ является либо тождественной подстановкой, либо транспозицией), удовлетворяет условию $\sigma^3 = \sigma$, то, полагая в теореме 2.1 $l = 3$, получим

Следствие 2.2. *Пусть*$\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ *–* J*-матрицы над ассоциативным кольцом,* P, σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_J$*, порядок которой не превосходит* 2*. Тогда, если определена одна из* J*-матриц*

$$[[\mathbf{ABC}]_{3,\sigma,J}\mathbf{DE}]_{3,\sigma,J}, [\mathbf{A}[\mathbf{BCD}]_{3,\sigma,J}\mathbf{E}]_{3,\sigma,J}, [\mathbf{AB}[\mathbf{CDE}]_{3,\sigma,J}]_{3,\sigma,J},$$

то определены и две другие J*-матрицы и верны равенства*

$$[[\mathbf{ABC}]_{3,\sigma,J}\mathbf{DE}]_{3,\sigma,J} = [\mathbf{A}[\mathbf{BCD}]_{3,\sigma,J}\mathbf{E}]_{3,\sigma,J} = [\mathbf{AB}[\mathbf{CDE}]_{3,\sigma,J}]_{3,\sigma,J}.$$

3 l-Арная полугруппа $\mathbf{M}_n(J, P)$

Обозначим через $\mathbf{M}_n(J, P)$ – множество всех квадратных J-матриц порядка n над ассоциативным кольцом P. Ясно, что множество $\mathbf{M}_n(J, P)$ совпадает с декартовой степенью множества $\mathbf{M}_n(P)$ всех квадратных матриц n-го порядка над P:

$$\mathbf{M}_n(J, P) = \prod_{j \in J} \mathrm{M}_n(P) = \mathrm{M}_n^J(P).$$

Напомним, что l-арный группоид $< A, [\ ] >$, в котором для любого $i = 1, 2, \ldots, l-1$ выполняется тождество

$$[[a_1 \ldots a_l]a_{l+1} \ldots a_{2-1}] = [a_1 \ldots a_i[a_{i+1} \ldots a_{i+l}]a_{i+l+1} \ldots a_{2l-1}],$$

называется *l-арной полугруппой*, а l-арная операция [ ] в этом случае называется *ассоциативной.*

Согласно теореме 2.1, если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< \mathbf{M}_n(J,P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ – l-арная полугруппа. Строение этой l-арной полугруппы конкретизирует следующая

Теорема 3.1[4]. *Пусть $l \geq 2$, подстановка σ из $\mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда*:

1. $< \mathbf{M}_n(J,P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ – *l-арная полугруппа*;

2. *если $n \geq 2$, то эта l-арная полугруппа неполуабелева*;

3. *если σ – нетождественная подстановка, то в этой l-арной полугруппе нет единиц.*

Полагая в теореме 3.1 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 3.1. *Пусть $l \geqslant 2$, подстановка σ* из $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$*. Тогда:

1. $< \mathbf{M}_n(k,P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – *l-арная полугруппа*;

2. *если $n \geqslant 2$, то эта l-арная полугруппа неполуабелева*;

3. если σ – *нетождественная подстановка, то в этой l-арной полугруппе нет единиц.*

Полагая в теореме 3.1 $J\ = \mathrm{N}$, получим

Следствие 3.2. *Пусть $l \geq 2$, подстановка σ* из $\mathbf{S}_{\mathrm{N}}$ *удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда*:

1. $< \mathbf{M}_n(\mathrm{N},P), [\ ]_{\mathrm{l},\sigma,\mathrm{N}} >$ – *l-арная полугруппа*;

2. *если $n \geq 2$, то эта l-арная полугруппа неполуабелева*;

3. если σ – *нетождественная подстановка, то в этой l-арной полугруппе нет единиц.*

Полагая в теореме 3.1 $J = \mathrm{Z}$, получим

Следствие 3.3. *Пусть $l \geq 2$, подстановка σ* из $\mathbf{S}_{\mathrm{Z}}$ *удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда*:

1. $< \mathbf{M}_n(\mathrm{Z},P), [\ ]_{\mathrm{l},\sigma,\mathrm{Z}} >$ – *l-арная полугруппа*;

2. *если $n \geq 2$, то эта l-арная полугруппа неполуабелева*;

3. *если σ – нетождественная подстановка, то в этой l-арной полугруппе нет единиц.*

В любой полугруппе матриц все элементы являются квадратными матрицами одного и того же порядка. В то же время, как показывает следующая теорема, при $l \geqslant 3$ существуют l-арные полугруппы J-матриц такие, что все их элементы не только не являются квадратными J-матрицами, но и все компоненты этих элементов не являются квадратными матрицами.

Теорема 3.2. *Пусть множество J является дизъюнктным объединением двухэлементных множеств $\{p_k, q_k\}$, где k пробегает некоторое множество Λ, на каждом из которых подстановка σ индуцирует транспозицию, то есть $\sigma(p_k) = q_k$, $\sigma(q_k) = p_k$. Обозначим через $\mathbf{L}$ множество всех J-матриц $\mathbf{A}$ над ассоциативным кольцом P таких, что для любого $k \in \Lambda$ значение $\mathbf{A}(p_k)$ является матрицей размера $m_k \times n_k$, а значение $\mathbf{A}(q_k)$ является матрицей размера $n_k \times m_k$. Тогда для любого нечётного l множество $\mathbf{L}$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$, а универсальная алгебра $< \mathbf{L}, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ является l-арной полугруппой. При этом J*-матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{L}$, *у которых для любого $k \in \Lambda$ значение $\mathbf{A}(q_k)$ – псевдообратная матрица для матрицы $\mathbf{A}(p_k)$, являются идемпотентами этой l-арной полугруппы.*

Доказательство. Пусть

$$\mathbf{A}_m \in \mathbf{L}, \quad m = 1, \ldots, l = 2s+1, \quad s \geq 1.$$

Тогда для любого $j \in J$ имеем

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}(j) =$$
$$= \mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j))\mathbf{A}_3(\sigma^2(j))\mathbf{A}_4(\sigma^3(j)) \ldots \mathbf{A}_{l-2}(\sigma^{l-3}(j))\mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)) =$$
$$= \mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j))\mathbf{A}_3(j)\mathbf{A}_4(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_{2-1}(j)\mathbf{A}_{2s}(\sigma(j))\mathbf{A}_{2s+1}(j),$$

то есть

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}(j) = \mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j))\mathbf{A}_3(j)\mathbf{A}_4(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_{2s-1}(j)\mathbf{A}_{2s}(\sigma(j))\mathbf{A}_{2s+1}(j).$$

Пусть для определённости $j \in \{p_k, q_k\}$ для некоторого $k \in \Lambda$. Если $j = p_k$, то

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}(p_k) = \mathbf{A}_1(p_k)\mathbf{A}_2(q_k)\mathbf{A}_3(p_k)\mathbf{A}_4(q_k) \ldots \mathbf{A}_{2s-1}(p_k)\mathbf{A}_{2s}(q_k)\mathbf{A}_{2s+1}(p_k).$$

Так как матрицы

$$\mathbf{A}_1(p_k)\mathbf{A}_2(q_k), \mathbf{A}_3(p_k)\mathbf{A}_4(q_k), \ldots, \mathbf{A}_{2s-1}(p_k)\mathbf{A}_{2s}(q_k)$$

являются квадратными и имеют размер $m_k \times m_k$, а матрица $\mathbf{A}_{2s+1}(p_k)$ имеет размер $m_k \times n_k$, то матрица $[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}(p_k)$ также имеет размер $m_k \times n_k$.

Аналогично, если $j = q_k$, то

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}(q_k) = \mathbf{A}_1(q_k)\mathbf{A}_2(p_k)\mathbf{A}_3(q_k)\mathbf{A}_4(p_k) \ldots \mathbf{A}_{2s-1}(q_k)\mathbf{A}_{2s}(p_k)\mathbf{A}_{2s+1}(q_k).$$

Так как матрицы

$$\mathbf{A}_1(q_k)\mathbf{A}_2(p_k), \mathbf{A}_3(q_k)\mathbf{A}_4(p_k), \ldots, \mathbf{A}_{2s-1}(q_k)\mathbf{A}_{2s}(p_k)$$

являются квадратными и имеют размер $n_k \times n_k$, а матрица $\mathbf{A}_{2s+1}(q_k)$ имеет размер $n_k \times m_k$, то матрица $[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}(q_k)$ также имеет размер $n_k \times m_k$.

Таким образом,

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J} \in \mathbf{L},$$

то есть множество $\mathbf{L}$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$. Согласно теореме 2.1 универсальная алгебра $< \mathbf{L}, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ является l-арной полугруппой.

Пусть теперь $\mathbf{A}$ – J-матрица из $\mathbf{L}$, у которой для любого $k \in \Lambda$ значение $\mathbf{A}(q_k)$ является псевдообратной матрицей для матрицы $\mathbf{A}(p_k)$, то есть $\mathbf{A}(q_k) = (\mathbf{A}(p_k))^+$. Тогда

$$[\mathbf{A} \ldots \mathbf{A}]_{l,\sigma,J}(j) =$$
$$= \underbrace{(\ldots(}_{s-1}\mathbf{A}(j)\mathbf{A}(\sigma(j))\mathbf{A}(\sigma^2(j)))\mathbf{A}(\sigma^3(j))\mathbf{A}(\sigma^4(j))) \ldots \mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))\mathbf{A}(\sigma^{l-1}(j)) =$$
$$= \underbrace{(\ldots(}_{s-1}\mathbf{A}(j)\mathbf{A}(\sigma(j))\mathbf{A}(j))\mathbf{A}(\sigma(j))\mathbf{A}(j)) \ldots \mathbf{A}(\sigma(j)))\mathbf{A}(j),$$

то есть

$$[\mathbf{A} \ldots \mathbf{A}]_{l,\sigma,J}(j) = \underbrace{(\ldots(}_{s-1}\mathbf{A}(j)\mathbf{A}(\sigma(j))\mathbf{A}(j))\mathbf{A}(\sigma(j))\mathbf{A}(j)) \ldots \mathbf{A}(\sigma(j)))\mathbf{A}(j).$$

Пусть для определённости $j\in\{p_k,q_k\}$ для некоторого $k\in\Lambda$. Если $j=p_k$, то, используя равенство $\mathbf{A}(q_k)=(\mathbf{A}(p_k))^+$, получим

$$[\underbrace{\mathbf{A}\dots\mathbf{A}}_{l}]_{l,\sigma,J}(p_k)=\underbrace{(\dots(}_{s-1}\mathbf{A}(p_k)\mathbf{A}(q_k)\mathbf{A}(p_k))\mathbf{A}(q_k)\mathbf{A}(p_k))\dots\mathbf{A}(q_k))\mathbf{A}(p_k)=$$
$$=\underbrace{(\dots(}_{s-1}\mathbf{A}(p_k)(\mathbf{A}(p_k))^+\mathbf{A}(p_k))(\mathbf{A}(p_k))^+\mathbf{A}(p_k))\dots(\mathbf{A}(p_k))^+)\mathbf{A}(p_k)=$$
$$=\underbrace{(\dots(}_{s-2}\mathbf{A}(p_k)(\mathbf{A}(p_k))^+\mathbf{A}(p_k))\dots(\mathbf{A}(p_k))^+)\mathbf{A}(p_k)=\dots=\mathbf{A}(p_k)(\mathbf{A}(p_k))^+\mathbf{A}(p_k)=\mathbf{A}(p_k),$$

то есть

$$[\underbrace{\mathbf{A}\dots\mathbf{A}}_{l}]_{l,\sigma,J}(p_k)=\mathbf{A}(p_k).$$

Аналогично, Если $j=q_k$, то, используя равенство $\mathbf{A}(p_k)=(\mathbf{A}(q_k))^+$, получим

$$[\mathbf{A}\dots\mathbf{A}]_{l,\sigma,J}(q_k)=\underbrace{(\dots(}_{s-1}\mathbf{A}(q_k)\mathbf{A}(p_k)\mathbf{A}(q_k))\mathbf{A}(p_k)\mathbf{A}(q_k))\dots\mathbf{A}(p_k))\mathbf{A}(q_k)=$$
$$=\underbrace{(\dots(}_{s-1}\mathbf{A}(q_k)(\mathbf{A}(q_k))^+\mathbf{A}(q_k))(\mathbf{A}(q_k))^+\mathbf{A}(q_k))\dots(\mathbf{A}(q_k))^+)\mathbf{A}(q_k)=$$
$$=\underbrace{(\dots(}_{s-2}\mathbf{A}(q_k)(\mathbf{A}(q_k))^+\mathbf{A}(q_k))\dots(\mathbf{A}(q_k))^+)\mathbf{A}(q_k)=\dots=\mathbf{A}(q_k)(\mathbf{A}(q_k))^+\mathbf{A}(q_k)=\mathbf{A}(q_k),$$

то есть

$$[\underbrace{\mathbf{A}\dots\mathbf{A}}_{l}]_{l,\sigma,J}(q_k)=\mathbf{A}(q_k).$$

Таким образом, для любого $j\in J$ верно

$$[\underbrace{\mathbf{A}\dots\mathbf{A}}_{l}]_{l,\sigma,J}(j)=\mathbf{A}(j),$$

то есть

$$[\underbrace{\mathbf{A}\dots\mathbf{A}}_{l}]_{l,\sigma,J}=\mathbf{A}.$$

Следовательно, $\mathbf{A}$ – идемпотент l-арной полугруппы $<\mathbf{L},[\ ]_{l,\sigma,J}>$. Теорема доказана.

Полагая в теореме 3.2 $m_k=m$, $n_k=n$ для любого $k\in\Lambda$, получим

Следствие 3.4. *Пусть множество J является дизъюнктным объединением двухэлементных множеств $\{p_k,q_k\}$, где k пробегает некоторое множество Λ, на каждом из которых подстановка σ индуцирует транспозицию. Обозначим через $\mathbf{L}$ множество всех J-матриц $\mathbf{A}$ над ассоциативным кольцом P таких, что для любого $k\in\Lambda$ значение $\mathbf{A}(p_k)$ является матрицей размера $m\times n$, а значение $\mathbf{A}(q_k)$ является матрицей размера $n\times m$. Тогда для любого нечётного l множество $\mathbf{L}$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$, а универсальная алгебра $<\mathbf{L},[\ ]_{l,\sigma,J}>$ является l-арной полугруппой. При этом J-матрицы $\mathbf{A}\in\mathbf{L}$, у которых для любого $k\in\Lambda$ значение $\mathbf{A}(q_k)$ – псевдообратная матрица для матрицы $\mathbf{A}(p_k)$, являются идемпотентами этой l-арной полугруппы.*

Так как псевдообратная матрица для квадратной невырожденной матрицы совпадает с её обратной матрицей, то полагая в теореме 3.2 $m_k=n_k$ для любого $k\in\Lambda$, получим

Следствие 3.5. *Пусть множество J является дизъюнктным объединением двухэлементных множеств $\{p_k,q_k\}$, где k пробегает некоторое множество Λ, на каждом из* *которых подстановка σ индуцирует транспозицию. Обозначим через $\mathbf{L}$ множество всех J-матриц $\mathbf{A}$ над ассоциативным кольцом P таких, что для любого $k \in \Lambda$ значения $\mathbf{A}(p_k)$ и $\mathbf{A}(q_k)$ являются квадратными матрицами размера $n_k \times n_k$. Тогда для любого нечётного l множество $\mathbf{L}$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$, а универсальная алгебра $< \mathbf{L}, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ является l-арной полугруппой. При этом J-матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{L}$, у которых для любого $k \in \Lambda$ значение $\mathbf{A}(q_k)$ – обратная матрица для невырожденной матрицы $\mathbf{A}(p_k)$, являются идемпотентами этой l-арной полугруппы.*

Полагая в следствии 3.5 $n_k = n$ для любого $k \in \Lambda$, получим

Следствие 3.6. *Пусть множество J является дизъюнктным объединением двухэлементных множеств $\{p_k, q_k\}$, где k пробегает некоторое множество Λ, на каждом из которых подстановка σ индуцирует транспозицию. Обозначим через $\mathbf{L}$ множество всех J-матриц $\mathbf{A}$ над ассоциативным кольцом P таких, что для любого $j \in J$ значение $\mathbf{A}(j)$ является квадратной матрицей размера $n \times n$. Тогда для любого нечетного l множество $\mathbf{L}$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$, а универсальная алгебра $< \mathbf{L}, [\ ]_{l,\sigma,J} >$ является l-арной полугруппой. При этом J-матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{L}$, у которых для любого $k \in \Lambda$* значение *$\mathbf{A}(q_k)$ – обратная матрица для невырожденной матрицы $\mathbf{A}(p_k)$, являются идемпотентами этой l-арной полугруппы.*

Считая в теореме 3.2

$$J = \{1, 2, \dots, 2r-1, 2r\}, \quad \{p_k, q_k\} = \{2k-1, 2k\}, \quad \Lambda = \{1, \dots, r\}, \quad r \geq 1,$$

$\sigma(j) = j + (-1)^{j+1}$ для любого $j \in J$, получим

Следствие 3.7. *Пусть на множестве $\{1, 2, \dots, 2r-1, 2r\}$, где $r \geq 1$, действует подстановка σ, переводящая нечетное число в следующее за ним число, а четное число – в предшествующее ему число. Обозначим через $\mathbf{L}$ множество всех вектор-матриц*

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_{2r-1}, A_{2r})$$

над ассоциативным кольцом P таких, что для любого $k = 1, \dots, r$ компонента A_{2k-1} является матрицей размера $m_k \times n_k$, а компонента A_{2k} является матрицей размера $n_k \times m_k$. Тогда для любого нечётного l множество $\mathbf{L}$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,2r}$, а универсальная алгебра $< \mathbf{L}, [\ ]_{l,\sigma,2r} >$ является l-арной полугруппой. При этом вектор-матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{L}$, у которых для для любого $k = 1, \dots, r$ компонента A_{2k} – псевдообратная матрица для компоненты A_{2k-1}, являются идемпотентами этой l-арной полугруппы.

Полагая в следствии 3.7 $m_k = m, \quad n_k = n$ для любого $k = 1, \dots, r$, получим

Следствие 3.8. *Пусть на множестве $\{1, 2, \dots, 2r-1, 2r\}$, где $r \geq 1$, действует подстановка σ, переводящая нечетное число в следующее за ним число, а четное число – в предшествующее ему число. Обозначим через $\mathbf{L}$ множество всех вектор-матриц*

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_{2r-1}, A_{2r})$$

над ассоциативным кольцом P таких что для любого $k = 1, \dots, r$ компонента A_{2k-1} является матрицей размера $m \times n$, а компонента A_{2k} является матрицей размера $n \times m$. Тогда для любого нечётного l множество $\mathbf{L}$ замкнуто относительно l-арной операции$[\ ]_{l,\sigma,2r}$, а универсальная алгебра $< \mathbf{L}, [\ ]_{l,\sigma,2r} >$ является l-арной полугруппой. При *этом вектор-матрицы* $\mathbf{A}\in\mathbf{L}$, *у которых для любого* $k=1,\ldots,r$ *компонента* A_{2k} – *псевдообратная матрица для компоненты* A_{2k-1}, *являются идемпотентами этой* l*-арной полугруппы.*

Полагая в следствии 3.8 $r=1$, получим

Следствие 3.9. *Пусть* $(12)\in\mathbf{S}_2$, $\mathbf{L}$ — *множество всех вектор-матриц* $\mathbf{A}=(A_1,A_2)$ *над ассоциативным кольцом* P *таких что компонента* A_1 *является матрицей размера* $m\times n$, *а компонента* A_2 *является матрицей размера* $n\times m$. *Тогда для любого нечётного* l *множество* $\mathbf{L}$ *замкнуто относительно* l*-арной операции* $[\ ]_{l,(12),2}$, *а универсальная алгебра* $<\mathbf{L},[\ ]_{l,(12),2}>$ *является* l*-арной полугруппой. При этом вектор-матрицы* $\mathbf{A}\in\mathbf{L}$, *у которых компонента* A_2 – *псевдообратная матрица для компоненты* A_1, *являются идемпотентами этой* l*-арной полугруппы.*

Замечание 3.1. Из следствия 3.7 можно извлечь следствия, аналогичные следствиям 3.5 и 3.6.

4 Полная линейная l-арная группа

Напомним [1], что l-арная полугруппа $<A,[\ ]>$, в которой для любых $a_1,\ldots,a_l$, $b\in A$ разрешимы уравнения

$$[xa_2\ldots a_l]=b,[a_1\ldots a_{l-1}y]=b,$$

называется *l-арной группой.*

Обозначим через $\mathbf{GL}_n(J,P)$ множество всех квадратных J-матриц n-го порядка над ассоциативным коммутативным кольцом P с единицей, у которых все значения обратимы в кольце $\mathbf{M}_n(P)$. Понятно, что множество $\mathbf{GL}_n(J,P)$ можно определить, как множество всех квадратных J-матриц n-го порядка над ассоциативным коммутативным кольцом P с единицей, у которых определитель каждый компоненты обратим в кольце P.

Ясно, что $\mathbf{GL}_n(J,P)$ совпадает с декартовой степенью $\mathrm{GL}_n^J(P)$ полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(P)$.

Далее во всех утверждениях этого раздела P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, для обозначения множества всех обратимых элементов которого используется символ P^*.

Имеет место

Теорема 4.1[4]. *Пусть* $l\geq 3$, $n\geq 2$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l=\sigma$. *Тогда*:

1) *универсальная алгебра* $<\mathbf{GL}_n(J,P),[\ ]_{l,\sigma,J}>$ *является* l*-арной подгруппой* l*-арной полугруппы* $<\mathbf{M}_n(J,P),[\ ]_{l,\sigma,J}>$;

2) l*-арная группа* $<\mathbf{GL}_n(J,P),[\ ]_{l,\sigma,J}>$ *имеет пустой полуцентр* $\mathbf{HZ}(\mathbf{GL}_n(J,P),[\ ]_{l,\sigma,J})$ *и является неполуабелевой, в частности, неабелевой*;

3) *если подстановка* σ – *нетождественная, то* l*-арная группа* $<\mathbf{GL}_n(J,P),[\ ]_{l,\sigma,J}>$ *имеет пустой центр и в ней нет единиц*;

4) *если подстановка* σ – *тождественная, то*

$$\mathbf{Z}(\mathbf{GL}_n(J,P),[\ ]_{l,\sigma,J})=\{\mathbf{A}\in\mathbf{GL}_n(J,P)\,|\,\mathbf{A}(j)=u_j\mathbf{E}_n,\quad u_j\in P^*,j\in J\},$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{GL}_n(J,P),[\ ]_{l,\sigma,J})=\{\mathbf{A}\in\mathbf{GL}_n(J,P)\,|\,\mathbf{A}(j)=u_j\mathbf{E}_n,\quad u_j^{l-1}=1,j\in J\},$$

где $\mathbf{E}_n$ – *единичная матрица из* $\mathbf{GL}_n(P)$, 1 – *единица поля* P.

Таким образом, согласно утверждению 4) теоремы 4.1 J-матрица $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(J,P)$ принадлежит центру $\mathbf{Z}(\mathbf{GL}_n(J,P),[\ ]_{l,\sigma,J})$ l-арной группы $<\mathbf{GL}_n(J,P),[\ ]_{l,\sigma,J}>$ тогда и только тогда, когда все ее значения являются скалярными матрицами из $\mathbf{GL}_n(P)$; J-матрица $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(J,P)$ является единицей в $<\mathbf{GL}_n(J,P),[\ ]_{l,\sigma,J}>$ тогда и только тогда, когда все ее значения являются скалярными матрицами из $\mathbf{GL}_n(P)$, порядок которых делит $l-1$.

Полагая в утверждении 1) теоремы 4.1 $J=\{1,2,\ldots,k\}$, получим

Следствие 4.1 [16]. *Если подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l=\sigma$, *то* $<\mathbf{GL}_n(k,P),[\ ]_{l,\sigma,k}>$ – *l-арная группа.*

Пост изучал [1] частный случай l-арной группы $<\mathbf{GL}_n(J,P),[\ ]_{l,\sigma,J}>$ при $J=\{1,2,\ldots,k\}$, $l=k+1$, $\sigma=(12\ldots k)$, $P=\mathrm{C}$ – поле комплексных чисел. При этом $(k+1)$-арную группу $<\mathbf{GL}_n(k,\mathrm{C})[\ ]_{k+1,(12\ldots k),k}>$ он называл полной линейной $(k+1)$-арной группой.

Следствие 4.2 [1]. *Если* $k\geq 2$, $n\geq 2$, *то* $<\mathbf{GL}_n(k,C),[\ ]_{k+1,(12\ldots k),k}>$ – *l-арная группа.*

Обозначим через $\mathbf{SL}_n(J,P)$ множество всех J-матриц из $\mathbf{GL}_n(J,P)$, у которых определители всех значений равны единице ассоциативного коммутативного кольца P с единицей. Ясно, что множество $\mathbf{SL}_n(J,P)$ совпадает с декартовой степенью $\mathbf{SL}_n^J(P)$ специальной линейной группы $\mathbf{SL}_n(P)$. Справедлива

Теорема 4.2 [4]. *Пусть* $l\geq 3$, $n\geq 2$, *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l=\sigma$. *Тогда*:

1) *универсальная алгебра* $<\mathbf{SL}_n(J,P),[\ ]_{l,\sigma,J}>$ *является l-арной подгруппой l-арной группы* $<\mathbf{GL}_n(J,P),[\ ]_{l,\sigma,J}>$;
2) *l-арная группа* $<\mathbf{SL}_n(J,P),[\ ]_{l,\sigma,J}>$ *имеет пустой полуцентр* $\mathbf{HZ}(\mathbf{SL}_n(J,P),[\ ]_{l,\sigma J})$ *и является неполуабелевой, в частности, неабелевой*;
3) *если подстановка σ – нетождественная, то l-арная группа* $<\mathbf{SL}_n(J,P),[\ ]_{l,\sigma,J}>$ *имеет пустой центр и в ней нет единиц*;
4) *если подстановка σ – тождественная, то*

$$\mathbf{Z}(\mathbf{SL}_n(J,P),[\ ]_{l,\sigma,J})=\{\mathbf{A}\in\mathbf{SL}_n(J,P)\,|\,\mathbf{A}(j)=u_j\mathbf{E}_n,\quad u_j\in P^*,\quad j\in J\},$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{SL}_n(J,P),[\ ]_{l,\sigma,J})=\{\mathbf{A}\in\mathbf{SL}_n(J,P)\,|\,\mathbf{A}(j)=u_j\mathbf{E}_n,\quad u_j^{l-1}=1,\quad j\in J\},$$

где $\mathbf{E}_n$ – *единичная матрица из* $\mathbf{GL}_n(P)$, 1 – *единица поля* P.

Замечание 4.1. Ясно, что

$$\mathbf{Z}(\mathbf{SL}_n(J,P))=\mathbf{Z}(\mathbf{GL}_n(J,P))\bigcap\mathbf{SL}_n(J,P),$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{SL}_n(J,P))=\mathbf{E}(\mathbf{GL}_n(J,))\bigcap\mathbf{SL}_n(J,P).$$

l-Арную группу $<\mathbf{GL}_n(J,P),[\ ]_{l,\sigma,J}>$ по аналогии с бинарным случаем естественно называть полной линейной l-арной группой, соответствующей данным J и σ, а l-арную группу $<\mathbf{SL}_n(J,P),[\ ]_{l,\sigma,J}>$ – специальной линейной l-арной группой, соответствующей тем же J и σ.

Полагая в утверждении 1) теоремы 4.2 $J=\{1,2,\ldots,k\}$, получим

Следствие 4.3 [17]. *Если подстановка* $\sigma\in\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l=\sigma$, *то*

$< \mathbf{SL}_n(k,P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – *l-арная группа.*

Полагая в теоремах 4.1 и 4.2, $J=\{1,2,\ldots,k\}$, $J=\mathrm{N}$ или $J=\mathrm{Z}$, можно получить соответствующие следствия.

5 Косые элементы в $< \mathbf{GL}_n(J,P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$

Для любого элемента a l-арной группы $< A, [\ ] >$ решение уравнения $[x\underbrace{a\ldots a}_{l-1}]=a$ обозначают символом $\bar{a}$ и называют *косым элементом* для a.

Вообще говоря, в обозначении косого элемента должен присутствовать символ l-арной групповой операции, который, как правило, не указывают, чтобы не загромождать записи. Однако, в некоторых случаях, присутствие символа l-арной групповой операции в обозначении косого элемента желательно. В таких случаях для обозначения косого элемента a l-арной группы $< A, [\ ] >$ мы используем символ $\mathbf{A}^{\overline{[\ ]}}$. В частности, $\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}}$ – косой элемент для J-матрицы $\mathbf{A}$ l-арной группы $< \mathbf{GL}_n(J,P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$. Таким образом, любая J-матрица $\mathbf{A}$ l-арной группы $< \mathbf{GL}_n(J,P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ обладает косым элементом $\mathrm{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}}$, который естественно называть *косой J-матрицей.*

Подчеркнем, что косые J-матрицы определяются для J-матриц l-арной группы $< \mathbf{GL}_n(J,P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$, у которых, согласно определению все значения являются обратимыми квадратными матрицами одного и того же порядка n, а подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l=\sigma$.

Предложение 5.1. *Пусть подстановка σ из $\mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l=\sigma$. Тогда для любой J-матрицы $\mathbf{A}\in\mathbf{GL}_n(J,P)$ существует косая J-матрица $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}}$, значения которой имеют следующий вид*

$$\mathbf{B}(j) = (\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1}\ldots(\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1}, \quad j\in J. \tag{5.1}$$

Доказательство. Так как J-матрица $\mathbf{A}$ является элементом l-арной группы $< \mathbf{GL}_n(J,P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$, то существует косой элемент $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}}$, для которого

$$[\mathbf{B}\underbrace{\mathbf{A}\ldots\mathbf{A}}_{l-1}]_{l,\sigma,J}=\mathbf{A},$$

то есть

$$[\mathbf{B}\underbrace{\mathbf{A}\ldots\mathbf{A}}_{l-1}]_{l,\sigma,J}(j)=\mathbf{A}(j), \quad j\in J,$$

откуда, используя определение операции $[\ ]_{l,\sigma,J}$ и тождественность подстановки σ^{l-1}, получаем

$$\mathbf{B}(j)\mathbf{A}(\sigma(j))\ldots\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{A}(j) = \mathbf{A}(j).$$

Из последнего равенства вытекает (5.1). Предложение доказано.

Замечание 5.1. Доказанное предложение может быть получена из предложения 2.7.2 [4], если в нем считать группу A полной линейной группой $\mathbf{GL}_n(J,P)$.

Полагая в предложении 5.1 $J=\{1,2,\ldots,k\}$, получим

Следствие 5.1[16]. *Пусть подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l=\sigma$. Тогда для любой вектор-матрицы $\mathbf{A}=(A_1,\ldots,A_k)\in\mathbf{GL}_n(k,P)$ существует косая вектор-матрица $\mathrm{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,k}}}=(B_1,\ldots,B_k)$, компоненты которой имеют следующий вид*

$$B_j=A^{-1}_{\sigma^{l-2}(j)}\ldots A^{-1}_{\sigma(j)}, \quad j=1,\ldots,k.$$

Полагая в предложении 5.1 $J=\mathrm{N}$, получим

Следствие 5.2. *Пусть подстановка* σ из S_{N} *удовлетворяет условию* $\sigma^l=\sigma$. *Тогда для любой* N-*матрицы* $\mathbf{A}=(A_1,A_2,\dots)\in\mathbf{GL}_n(\mathrm{N},P)$ *существует косая* N-*матрица* $\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,\mathrm{N}}}}=(B_1,B_2,\dots)$, *компоненты которой имеют следующий вид*

$$B_j=A^{-1}_{\sigma^{l-2}(j)}\dots A^{-1}_{\sigma(j)},\quad J\in\mathrm{N}.$$

Полагая в предложении 5.1 $J=\mathrm{Z}$, получим

Следствие 5.3. *Пусть подстановка* σ из S_{Z} *удовлетворяет условию* $\sigma^l=\sigma$. *Тогда для любой* Z-*матрицы* $\mathbf{A}=(\dots,A_{-2},A_{-1},A_0,A_1,A_2,\dots)\in\mathbf{GL}_n(\mathrm{Z},P)$ *существует косая* Z-матрица $\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,\mathrm{Z}}}}=(\dots,B_{-2},B_{-1},B_0,B_1,B_2,\dots)$, *компоненты которой имеют следующий вид*

$$B_j=A^{-1}_{\sigma^{l-2}(j)}\dots A^{-1}_{\sigma(j)},\quad J\in\mathrm{Z}.$$

6 Транспонированные J-матрицы

Определение 6.1. Для всякой J-матрицы $\mathbf{A}$ над ассоциативным кольцом с единицей *транспонированной* называется J-матрица $\mathbf{A}'$, у которой для любого $j\in J$ значение $\mathbf{A}'(j)$ является транспонированной матрицей для соответствующего значения $\mathbf{A}(j)$ J-матрицы $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}'(j)=(\mathbf{A}(j))'$.

Подчеркнем, что в определении 6.1 для различных i и j значения $\mathbf{A}(i)$ и $\mathbf{A}(j)$ могут быть матрицами разных размеров.

Если определить произведение элемента $\lambda\in P$ на J-матрицу $\mathbf{A}$ и сумму J-матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ одинаковых размеров поточечно:

$$(\lambda\mathbf{A})(j)=\lambda\mathbf{A}(j),\quad \lambda\in P;\quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})(j)=\mathbf{A}(j)+\mathbf{B}(j),\quad j\in J,$$

то, используя верные для обычных матриц равенства

$$(\lambda A)'=\lambda A',\quad \lambda\in P;\quad (A+B)'=A'+B',$$

можно убедиться в справедливости аналогичных равенств

$$(\lambda\mathbf{A})'=\lambda\mathbf{A}',\quad \lambda\in P;\quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})'=\mathbf{A}'+\mathbf{B}'$$

для J-матриц.

Нам понадобится следующий бинарный результат.

Лемма 6.1. *Если для матриц* $B_1,\dots,B_l$ *над ассоциативным кольцом с единицей определено произведение* $B_1B_2\dots B_l$, *то определено произведение* $B'_l\dots B'_2B'_1$ *и верно равенство*

$$(B_1B_2\dots B_l)'=B'_l\dots B'_2B'_1.$$

Теорема 6.1. *Пусть подстановка* σ из $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l=\sigma$, $\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_l$ – *такие* J-*матрицы над ассоциативным кольцом с единицей, что определена* J-*матрица*

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\dots\mathbf{A}_{l-1}\mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}. \tag{6.1}$$

Тогда определена J-*матрица*

$$[\mathbf{A}'_l\mathbf{A}'_{l-1}\dots\mathbf{A}'_2\mathbf{A}'_1]_{l,\sigma^{-1},J} \tag{6.2}$$

и верно равенство

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_{l-1}\mathbf{A}_l]'_{l,\sigma,J} = [\mathbf{A}'_l\mathbf{A}'_{l-1}\ldots\mathbf{A}'_2\mathbf{A}'_1]_{l,\sigma^{-1},J}. \tag{6.3}$$

Доказательство. Если положить $\tau = \sigma^{-1}$, то из условия $\sigma^l = \sigma$ получаем

$$\tau = \sigma^{l-2}, \quad \tau^2 = \sigma^{l-3}, \quad \ldots, \quad \tau^{l-2} = \sigma, \quad \tau^{l-1} = \varepsilon, \quad \tau^l = \tau. \tag{6.4}$$

Используя эти равенства, а также лемму 6.1, тождественность подстановки σ^{l-1} и равенства

$$(\mathbf{A}_i(r))' = \mathbf{A}'_i(r), \quad i = 1, \ldots, l, \quad r \in J,$$

получим

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_{l-1}\mathbf{A}_l]'_{l,\sigma,J}(j) &= (\mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j))\ldots\mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)))' = \\
&= (\mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j))'(\mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)))'\ldots(\mathbf{A}_2(\sigma(j)))'(\mathbf{A}_1(j))' = \\
&= (\mathbf{A}_l(j))'(\mathbf{A}_{l-1}(\tau(j)))'\ldots(\mathbf{A}_2(\tau^{l-2}(j)))'(\mathbf{A}_1(j))' = \\
&= \mathbf{A}'_l(j)\mathbf{A}'_{l-1}(\tau(j))\ldots\mathbf{A}'_2(\tau^{l-2}(j))\mathbf{A}'_1(\tau^{l-1}(j)) = \\
&= [\mathbf{A}'_l\mathbf{A}'_{l-1}\ldots\mathbf{A}'_2\mathbf{A}'_1]_{l,\tau,J}(j) = [\mathbf{A}'_l\mathbf{A}'_{l-1}\ldots\mathbf{A}'_2\mathbf{A}'_1]_{l,\sigma^{-1},J}(j).
\end{aligned}$$

Таким образом, доказаны как существование J-матрица (6.2), так и само равенство (6.3). Теорема доказана.

Замечание 6.1. Равенство (6.3) является аналогом соответствующего бинарного равенства из леммы 6.1. Отличие состоит в том, что в правой части равенства (6.3) присутствует обратная подстановка. В бинарном равенстве это присутствие явно не проявляется, так как в этом случае подстановка σ – тождественная.

Если квадратные J-матрицы $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_l$ таковы, что для любого $j \in J$ матрицы

$$\mathbf{A}_1(j), \mathbf{A}_2(\sigma(j)), \ldots, \mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)), \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)) \tag{6.5}$$

имеют одинаковый порядок, то определена J-матрица (6.1). Поэтому из теоремы 6.1 вытекает.

Следствие 6.1. *Пусть подстановка* σ из $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, J*-матрицы* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_l$ *являются квадратными, и для любого* $j \in J$ *матрицы* (6.5) *имеют одинаковый порядок. Тогда верно* (6.3).

Следствие 6.2. *Пусть подстановка* σ из $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_l$ – *квадратные* J*-матрицы одного и того же порядка. Тогда верно* (6.3).

Если подстановка σ из $\mathbf{S}_J$ является тождественной или имеет порядок, равный двум, то $\sigma = \sigma^{-1}$, $\sigma^l = \sigma$ для любого нечетного l. Поэтому из теоремы 6.1 и следствий 6.1 и 6.2 получаются соответственно еще три следствия.

Следствие 6.3. *Пусть подстановка* σ из $\mathbf{S}_J$ *является тождественной или имеет порядок, равный двум;* l *– нечётное,* $l \geq 3$; J*-матрицы* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_l$ *таковы, что определена* J*-матрица* (6.1). *Тогда определена* J*-матрица* $[\mathbf{A}'_l\mathbf{A}'_{l-1}\ldots\mathbf{A}'_2\mathbf{A}'_1]_{l,\sigma,J}$ *и верно равенство*

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\ \mathbf{A}_{l-1}\mathbf{A}_l]'_{l,\sigma,J} = [\mathbf{A}'_l\mathbf{A}'_{l-1}\ldots\mathbf{A}'_2\mathbf{A}'_1]_{l,\sigma,J} \tag{6.6}$$

В частности, если $l = 3$, *то*

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3]'_{3,\sigma,J} = [\mathbf{A}'_3\mathbf{A}'_2\mathbf{A}'_1\ ]_{3,\sigma,J}. \tag{6.7}$$

Следствие 6.4. *Пусть подстановка σ* из $\mathbf{S}_J$ *является тождественной или имеет порядок, равный двум*; l *– нечётное*, $l \geq 3$; *квадратные J-матрицы* $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_l$ *таковы, что для любого $j \in J$ матрицы* (6.5) *имеют одинаковый порядок. Тогда верно* (6.6). *В частности, если $l = 3$, то верно* (6.7).

Следствие 6.5. *Пусть подстановка σ из $\mathbf{S}_J$ является тождественной или имеет порядок, равный двум*; l *– нечётное*, $l \geq 3$; $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_l$ *– квадратные J-матрицы одного и того же порядка. Тогда верно* (6.6). *В частности, если $l = 3$, то верно* (6.7).

Замечание 6.2. В следствиях 6.3 – 6.5 можно, например, в качестве множества J взять множество N, а в качестве подстановки σ – подстановку из примера 2.1, действующую по правилу $\sigma(j) = j + (-1)^{j+1}$ для любого $j \in$ N. Можно также в качестве множества J взять множество Z, а в качестве подстановки σ – подстановку из примера 2.2, действующую по правилу $\sigma(j) = -j$ для любого $j \in$ Z.

В [16] приведено большое количество утверждений о транспонированных J-матрицах для случая $J = \{1, 2, \ldots, k\}$. Сформулируем только одно из них.

Полагая в теореме 6.1 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 6.6 [16]. *Пусть подстановка σ* из $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \ldots, A_{ik}), \quad i = 1, \ldots, l$$

– такие вектор-матрицы над ассоциативным кольцом с единицей, что определена вектор-матрица

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_{l-1}\mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k}.$$

Тогда определена вектор-матрица

$$[\mathbf{A}'_1\mathbf{A}'_{1-1} \ldots \mathbf{A}'_2\mathbf{A}'_1]_{l,\sigma^{-1},k}$$

и верно равенство

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_{l-1}\mathbf{A}_l]'_{l,\sigma,k} = [\mathbf{A}'_1\mathbf{A}'_{1-1} \ldots \mathbf{A}'_2\mathbf{A}'_1]_{l,\sigma^{-1},k}.$$

7 Связь между транспонированными и косыми J -матрицами

В l-арной группе $< \mathbf{GL}_n(J, P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ между операциями транспонирования и взятия косого элемента существует связь, аналогичная связи в группе $\mathbf{GL}_n(P)$ между операциями транспонирования и взятия обратного элемента. Эта связь выражается приводимой ниже теоремой, из формулировки которой видно, что в отличие от бинарного случая, где операции транспонирования и взятия обратного элемента перестановочны, в полиадическом случае операции транспонирования и взятия косого элемента перестановочны с точностью до обратной подстановки. В бинарном случае это отличие не проявляется, так как в этом случае подстановка σ – тождественная.

Теорема 7.1. *Если подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A}$ *– J-матрица из* $< \mathbf{GL}_n(J, P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$, *то*

$$(\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\,\sigma,\,J}}})' = (\mathbf{A}')^{\overline{[\ ]_{l,\,\sigma^{-1},\,J}}}. \tag{7.1}$$

Доказательство. Так как по предложению 5.1

$$\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}}(j) = (\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1}, \quad j \in J,$$

и, кроме того, согласно определению 6.1

$$(\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}})'(j) = (\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}}(j))', \quad j \in J,$$

то, используя лемму 6.1, получим

$$(\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}})'(j) = (\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}}(j))' = ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1})' =$$
$$= ((\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1})' \dots ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1})',$$

то есть

$$(\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}})'(j) = ((\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1})' \dots ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1})', \quad j \in J. \tag{7.2}$$

С другой стороны, так как, согласно определению 6.1

$$\mathbf{A}'(r) = (\mathbf{A}(r))', \quad r \in J,$$

то, полагая $\tau = \sigma^{-1}$, и, используя равенства (6.4), предложение 5.1 и соответствующий бинарный результат (операции транспонирования и взятия обратного элемента перестановочны), получим

$$(\mathbf{A}')^{\overline{[\ ]_{l,\sigma^{-1},J}}}(j) = (\mathbf{A}'(\tau^{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{A}'(\tau(j)))^{-1} =$$
$$= ((\mathbf{A}(\tau^{l-2}(j)))')^{-1} \dots ((\mathbf{A}(\tau(j)))')^{-1} =$$
$$= ((\mathbf{A}(\sigma(j)))')^{-1} \dots ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))')^{-1} = ((\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1})' \dots ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1})',$$

то есть

$$(\mathbf{A}')^{\overline{[\ ]_{l,\sigma^{-1},J}}}(j) = ((\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1})' \dots ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1})', j \in J. \tag{7.3}$$

Из (7.2) и (7.3) вытекает (7.1). Теорема доказана.

Следствие 7.1. *Если подстановка σ* из $\mathbf{S}_J$ *является тождественной или имеет порядок, равный двум*; l *– нечётное*, $l \geq 3$; $\mathbf{A}$ – *J-матрица из* $< \mathbf{GL}_n(J,P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$, *то*

$$(\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}})' = (\mathbf{A}')^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}}.$$

В частности, если $l = 3$, то

$$(\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{3,\sigma,J}}})' = (\mathbf{A}')^{\overline{[\ ]_{3,\sigma,J}}}.$$

Полагая в теореме 7.1 и следствии 7.1 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим ещё два следствия.

Следствие 7.2 [16]. *Если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$, удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A}$ – вектор-матрица из $< \mathbf{GL}_n(k,P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$, то*

$$(\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,k}}})' = (\mathbf{A}')^{\overline{[\ ]_{l,\sigma^{-1},k}}}.$$

Следствие 7.3. *Если подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ является тождественной или имеет порядок, равный двум*; l *– нечётное*, $l \geq 3$; $\mathbf{A}$ – *вектор-матрица из* $< \mathbf{GL}_n(k,P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *то*

$$(\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,k}}})' = (\mathbf{A}')^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,k}}}.$$

В частности, если $l = 3$, то

$$(\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{3,\sigma,k}}})' = (\mathbf{A}')^{\overline{[\ ]_{3,\sigma,k}}}.$$

8 Комплексно сопряжённые и эрмитово сопряжённые J-матрицы

В данном разделе определяются и изучаются комплексно сопряжённые и эрмитово сопряжённые J-матрицы.

Определение 8.1. Для всякой J-матрицы $\mathbf{A}$ над C назовем *комплексно сопряжённой* J-матрицу $\bar{A}$, у которой для любого $j \in J$ значение $\bar{A}(j)$ является комплексно сопряжённой матрицей для соответствующего значения $\mathbf{A}(j)$ J-матрицы $\mathbf{A}$: $\bar{A}(j) = \overline{\mathrm{A}(j)}$.

Определение 8.2. Для всякой J-матрицы $\mathbf{A}$ над C назовем *эрмитово сопряжённой* J-матрицу $\mathbf{A}^*$, у которой для любого $j \in J$ значение $\mathbf{A}^*(j)$ является эрмитово сопряжённой матрицей для соответствующего значения $\mathbf{A}(j)$ J-матрицы $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}^*(j) = (\mathbf{A}(j))^*$.

Ясно, что для действительной J-матрицы $\mathbf{A}$, то есть J-матрицы, у которой все значения являются действительными матрицами, J-матрицы $\mathbf{A}^*$ и A' совпадают, где A' – транспонированная J-матрица.

Замечание 8.1. Так как всякий элемент из C можно рассматривать как квадратную матрицу первого порядка, то любая функция $\mathbf{z}$ с областью определения J и со значениями в C является J-матрицей первого порядка, для которой, согласно определениям 8.1 и 8.2

$$\bar{\mathbf{z}}(j) = \overline{\mathbf{z}(j)}, \quad \mathbf{z}^*(j) = (\mathbf{z}(j))^*, \quad j \in J.$$

Каждое из восьми равенств в следующем предложении является следствием соответствующего равенства для обычных матриц.

Предложение 8.1. *Пусть* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *– произвольные* J*-матрицы над* C. *Тогда:*

1) *если* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *имеют одинаковые размеры, то*

$$\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}, \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*;$$

2) *если* $\lambda \in$ C, *то*

$$\overline{\lambda \mathbf{A}} = \overline{\lambda} \bar{\mathbf{A}}, \quad (\lambda \mathbf{A})^* = \overline{\lambda} \mathbf{A}^*;$$

3) *операция транспонирования перестановочна и с операцией комплексного сопряжения и с операцией эрмитового сопряжения, то есть*

$$\overline{\mathbf{A}'} = \bar{\mathbf{A}}', \quad (\mathbf{A}')^* = (\mathbf{A}^*)';$$

4) *операции комплексного сопряжения и эрмитового сопряжения инволютивны, то есть*

$$\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}.$$

Нам понадобится следующий бинарный результат.

Лемма 8.1. *Если для матриц* $B_1, \ldots, B_l$ над C *определено произведение* $B_1 B_2 \ldots B_l$, *то определено произведение* $B_l^* \ldots B_2^* B_1^*$ *и верно равенство*

$$(B_1 B_2 \ldots B_l)^* = B_l^* \ldots B_2^* B_1^*.$$

Теорема 8.1. *Пусть подстановка* σ *из* S_J *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_l$ *такие* J*-матрицы над* C, *что определена* J*-матрица*

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}. \tag{8.1}$$

Тогда определены J-матрицы

$$\overline{[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_l]}_{l,\sigma,J}, [\bar{\mathbf{A}}_1\bar{\mathbf{A}}_2\ldots\bar{\mathbf{A}}_l]_{l,\sigma,J}, \tag{8.2}$$

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_l]^*_{l,\sigma,J}, [\mathbf{A}^*_l\ldots\mathbf{A}^*_2\mathbf{A}^*_1]_{l,\sigma^{-1},J} \tag{8.3}$$

и верны равенства

$$\overline{[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_l]}_{l,\sigma,J} = [\bar{\mathbf{A}}_1\bar{\mathbf{A}}_2\ldots\bar{\mathbf{A}}_l]_{l,\sigma,J}, \tag{8.4}$$

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_l]^*_{l,\sigma,J} = [A^*_l\ldots\mathbf{A}^*_2\mathbf{A}^*_1]_{l,\sigma^{-1},J}. \tag{8.5}$$

Доказательство. Так как $\overline{UV}=\bar{U}\bar{V}$ для обычных матриц, то

$$\overline{\mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j))\ldots\mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j))} = \overline{\mathbf{A}_1(j)}\,\overline{\mathbf{A}_2(\sigma(j))}\ldots\overline{\mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j))} \tag{8.6}$$

для любого $j\in J$. Левая часть последнего равенства совпадают со значением первой J-матрицы из (8.2) в точке j. Правая часть этого равенства совпадает со значением второй J-матрицы из (8.2) в точке j, так как согласно определению 8.1

$$\overline{\mathbf{A}_i(\sigma^{i-1}(j))} = \overline{\mathbf{A}_i}(\sigma^{i-1}(j)), \quad i=1,\ldots,l.$$

Таким образом, обе указанные J-матрицы существуют. Тогда равенство (8.4) вытекает из равенства (8.6).

Существование первой J-матрицы в (8.3) является следствием существования J-матрицы (8.1).

Используя равенства (6.4), а также лемму 8.1, тождественность подстановки σ^{l-1} и равенства

$$(\mathbf{A}_i(r))^* = \mathbf{A}^*_i(r), \quad i=1,\ldots,l, \quad r\in J,$$

получим

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_l]^*_{l,\sigma,J}(j) = (\mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j))\ldots\mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)))^* =\\
&= (\mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)))^*(\mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)))^*\ldots(\mathbf{A}_2(\sigma(j)))^*(\mathbf{A}_1(j))^* =\\
&= (\mathbf{A}_l(j))^*(\mathbf{A}_{l-1}(\tau(j)))^*\ldots(\mathbf{A}_2(\tau^{l-2}(j)))^*(\mathbf{A}_1(j))^* =\\
&= \mathbf{A}^*_l(j)\mathbf{A}^*_{l-1}(\tau(j))\ldots\mathbf{A}^*_2(\tau^{l-2}(j))\mathbf{A}^*_1(\tau^{l-1}(j)) =\\
&= [\mathbf{A}^*_l\mathbf{A}^*_{l-1}\ldots\mathbf{A}^*_2\mathbf{A}^*_1]_{l,\tau,J}(j) = [\mathbf{A}^*_l\mathbf{A}^*_l\ldots\mathbf{A}^*_2\mathbf{A}^*_1]_{l,\sigma^{-1},J}(j).
\end{aligned}$$

Таким образом, доказаны как существование второй J-матрицы в (8.3), так и само равенство (8.5). Теорема доказана.

Замечание 8.2. Равенство (8.5) может быть получено как следствие равенства (8.4) и равенства (6.3).

Следствие 8.1. *Пусть подстановка σ* из $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию $\sigma^l=\sigma$, J-матрицы* $\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_l$ над C *являются квадратными, и для любого $j\in J$* матрицы (6.4) *имеют одинаковый порядок. Тогда верны равенства* (8.4) и (8.5).

Следствие 8.2. *Пусть подстановка σ* из $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию $\sigma^l=\sigma$, $\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_l$ – квадратные J-матрицы над* C *одного и того же порядка. Тогда верны равенства* (8.4) и (8.5).

Если подстановка σ из $\mathbf{S}_J$ является тождественной или имеет порядок, равный двум, то из теоремы 8.1 и следствий 8.1 и 8.2 получаются соответственно еще три следствия.

Следствие 8.3. *Пусть подстановка σ* из $\mathbf{S}_J$ *является тождественной или имеет порядок, равный двум; l – нечётное, $l\geq 3$; J-матрицы $\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_l$ таковы, что определена*

J*-матрица* (8.1)*. Тогда определена* J*-матрица* $[\mathbf{A}_l^* \dots \mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_1^*]_{l,\sigma,J}$*, и верно равенство*

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]^*_{l,\sigma,J} = [\mathbf{A}_l^* \dots \mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_1^*]_{l,\sigma,J}. \tag{8.7}$$

В частности, если $l = 3$*, то*

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3]^*_{l,\sigma,J} = [\mathbf{A}_3^* \mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_1^*]_{l,\sigma,J}. \tag{8.8}$$

Следствие 8.4. *Пусть подстановка* σ из $\mathbf{S}_J$ *является тождественной или имеет порядок, равный двум*; l *– нечётное,* $l \geq 3$; *квадратные* J*-матрицы* $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ таковы, *что для любого* $j \in J$ *матрицы* (6.4) *имеют одинаковый порядок. Тогда верно* (8.7)*. В частности, если* $l = 3$*, то верно* (8.8).

Следствие 8.5. *Пусть подстановка* σ из $\mathbf{S}_J$ *является тождественной или имеет порядок, равный двум*; l *– нечётное,* $l \geq 3$; $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ *– квадратные* J*-матрицы одного и того же порядка. Тогда верно* (8.7)*. В частности, если* $l = 3$*, то верно* (8.8).

Замечание 8.3. В следствиях 8.3 – 8.5, как и в следствиях 6.3 – 6.5, можно в качестве множества J взять множество N, а в качестве подстановки σ – подстановку из примера 2.1 или можно в качестве множества J взять множество Z, а в качестве подстановки σ – подстановку из примера 2.2.

В [18] приведено большое количество утверждений о комплексно сопряженных и эрмитово сопряженных J-матрицах для случая $J = \{1, 2, \dots, k\}$. Сформулируем только одно из них.

Полагая в теореме 8.1 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим

Следствие 8.6 [18]. *Пусть подстановка* σ из $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), \quad i = 1, \dots, l.$$

– такие вектор-матрицы над C*, что определена вектор-матрица*

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k}.$$

Тогда определены вектор-матрицы

$$\overline{[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]}_{l,\sigma,k}, [\bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{A}}_2 \dots \bar{\mathbf{A}}_l]_{l,\sigma,k},$$

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]^*_{l,\sigma,k}, [\mathbf{A}_l^* \dots \mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_1^*]_{l,\sigma^{-1},k}$$

и верны равенства

$$\overline{[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]}_{l,\sigma,k} = [\bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{A}}_2 \dots \bar{\mathbf{A}}_l]_{l,\sigma,k},$$

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]^*_{l,\sigma,k} = [\mathbf{A}_l^* \dots \mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_1^*]_{l,\sigma^{-1},k}.$$

9 Связь между сопряжёнными и косыми J-матрицами

В следующей теореме обобщаются равенства

$$\overline{(\mathbf{A}^{-1})} = (\bar{\mathbf{A}})^{-1}, (\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1},$$

справедливые для квадратных невырожденных матриц.

Теорема 9.1. *Если подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A}$ *–* J*-матрица из* $< \mathbf{GL}_n(J, \mathrm{C}), [\ ]_{l,\sigma,J} >$*, то верны равенства*

$$\overline{\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}}} = (\overline{\mathbf{A}})^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}}, (\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[\ ]_{l,\sigma^{-1},J}}}. \tag{9.1}$$

Доказательство. Докажем второе равенство.

Так как по предложению 5.1

$$\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}}(j) = (\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1}, \quad j \in J,$$

и, кроме того, согласно определению 8.2

$$(\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}})^*(j) = (\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}}(j))^*, \quad j \in J,$$

то, используя лемму 8.1, получим

$$(\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}})^*(j) = (\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}}(j))^* = ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1})^* =$$

$$= ((\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1})^* \dots ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1})^*,$$

то есть

$$(\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}})^*(j) = ((\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1})^* \dots ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1})^*, \quad j \in J. \tag{9.2}$$

С другой стороны, так как, согласно определению 8.2

$$\mathbf{A}^*(r) = (\mathbf{A}(r))^*, \quad r \in J,$$

то, полагая $\tau = \sigma^{-1}$, и, используя равенства (6.4), предложение 5.1 и соответствующий бинарный результат (операции комплексного сопряжения и взятия обратного элемента перестановочны), получим

$$(\mathbf{A}^*)^{\overline{[\ ]_{l,\sigma^{-1},J}}}(j) = (\mathbf{A}^*(\tau^{l-2}(j)))^{-1} \dots (\mathbf{A}^*(\tau(j)))^{-1} =$$

$$= ((\mathbf{A}(\tau^{l-2}(j)))^*)^{-1} \dots ((\mathbf{A}(\tau(j)))^*)^{-1} =$$

$$= ((\mathbf{A}(\sigma(j)))^*)^{-1} \dots ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^*)^{-1} = ((\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1})^* \dots ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1})^*,$$

то есть

$$(\mathbf{A}^*)^{\overline{[\ ]_{l,\sigma^{-1},J}}}(j) = ((\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1})^* \dots ((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1})^*, \quad j \in J. \tag{9.3}$$

Из (9.2) и (9.3) вытекает (9.1).

Первое равенство из (9.1) доказывается аналогично. Теорема доказана.

Замечание 9.1. Второе равенство в (9.1) может быть получено как следствие первого равенства в (9.1) и равенства (6.3).

Следствие 9.1. *Если подстановка σ* из $\mathbf{S}_J$ *является тождественной или имеет порядок, равный двум*; l *– нечётное*, $l \geq 3$; $\mathbf{A}$ *–* J*-матрица из* $< \mathbf{GL}_n(J, \mathrm{C}), [\ ]_{l,\sigma,J} >$, *то*

$$(\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,J}}}.$$

В частности, если $l = 3$, *то*

$$(\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{3,\sigma,J}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[\ ]_{3,\sigma,J}}}.$$

Полагая в теореме 9.1 и следствии 9.1 $J = \{1, 2, \dots, k\}$, получим ещё два следствия.

Следствие 9.2 [18]. *Если подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$, *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A}$ *– вектор-матрица из* $< \mathbf{GL}_n(k, \mathrm{C}), [\ ]_{l\sigma,k} >$, *то*

$$\overline{\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,k}}}} = (\overline{\mathbf{A}})^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,k}}}, (\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[\ ]_{l,\sigma^{-1},k}}}.$$

Следствие 9.3. *Если подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *является тождественной или имеет порядок, равный двум*; l *– нечётное*, $l \geq 3$; $\mathbf{A}$ *– векто-матрица из* $< \mathbf{GL}_n(k, C), [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *то*

$$(\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[\ ]_{l,\sigma,k}}}.$$

В частности, если $l = 3$, *то*

$$(\mathbf{A}^{\overline{[\ ]_{3,\sigma,k}}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\overline{[\ ]_{3,\sigma,k}}}.$$

10 J-Определители, простейшие свойства

В теории обычных матриц каждой квадратной матрице над ассоциативным коммутативным кольцом с единицей ставится в соответствие ее определитель, являющийся элементом этого кольца. Возникает естественный вопрос: *как определить для J-матрицы аналог обычного определителя*?

В данном разделе для каждой J-матрицы $\mathbf{A}$ над ассоциативным коммутативным кольцом с единицей определяется J-определитель $\mathbf{det_A}$, который для обычной матрицы совпадает с ее определителем.

Определение 10.1. Пусть P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. *J-определителем* квадратной J-матрицы $\mathbf{A}$ над P, то есть J-матрицы $\mathbf{A}$, у которой все значения $\mathbf{A}(j)$ являются квадратными матрицами над P, называется функция $\mathbf{det_A} \in P^J$, ставящая в соответствие с каждому $j \in J$ определитель матрицы $\mathbf{A}(j)$:

$$\mathbf{det_A}(j) = \det\mathbf{A}(j) \in P.$$

Замечание 10.1. В [19] для каждой квадратной k-компонентной вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ над ассоциативным коммутативным кольцом с единицей был определен вектор-определитель

$$\mathbf{det_A} = \{\det A_1, \ldots, \det A_k\},$$

который, как несложно заметить, является J-определителем, если множество J совпадает с множеством $\{1, 2, \ldots, k\}$. Отметим, что в [19] вместо символа $\mathbf{det_A}$ использовался символ $\mathbf{detA}$. Употребление в общем случае символа $\mathbf{det_A}$ в формулах, на наш взгляд, предпочтительнее, так как отпадает необходимость в расстановке лишних скобок.

По аналогии со случаем $J = \{1, 2, \ldots, k\}$ N-определитель N-марицы $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots)$ удобно записывать в виде

$$\mathbf{det_A} = \{\det A_1, \det A_2, \ldots\},$$

а Z-определитель Z-марицы $\mathbf{A}_i = (\ldots, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \ldots)$ удобно записывать в виде

$$\mathbf{det_A} = \{(\ldots, \det A_{-2}, \det A_{-1}, \det A_0, \det A_1, \det A_2, \ldots\}.$$

Ясно, что для одноэлементного множества J понятия J-определителя и определителя совпадают: $\mathbf{det_A} = \det\mathbf{A}$.

Пример 10.1. Если $J = \{1, 2, 3\}$, $P = \mathrm{Z}$,

$$\mathbf{A} = \left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix},\ 5,\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

то $\mathbf{det_A} = (16, 5, -3)$.

Замечание 10.2. Понятно, что множество $\mathbf{SL}_n(J, P)$ совпадает с множеством всех J-матриц $\mathbf{A}$ над P, у которых J-определитель $\mathbf{det_A}$ является постоянной функцией $\mathbf{e} \in P^J$, ставящей в соответствие каждому $j \in J$ единицу кольца P: $\mathbf{det_A} = \mathbf{e}$.

Далее все J-матрицы рассматриваются над ассоциативным коммутативным кольцом с единицей.

Сформулированные ниже свойства J-определителей получаются с помощью соответствующих свойств обычных определителей.

Предложение 10.1. *Если A' – транспонированная J-матрица для квадратной J-матрицы $\mathbf{A}$, то $\mathbf{det}_{\mathbf{A}'} = \mathbf{det}_{\mathbf{A}}$.*

В соответствии с соглашением в разделе 1, для обозначения функция из P^J, ставящей в соответствие каждому $j \in J$ нуль 0 кольца P будем использовать символ $\mathbf{0}$.

Предложение 10.2. *Если квадратная J-матрица $\mathbf{A}$, такова, что для любого $j \in J$ в матрице $\mathbf{A}(j)$ имеется строка или столбец, состоящий целиком из нулей кольца P, то $\mathbf{det}_{\mathbf{A}} = \mathbf{0} \in P^J$.*

Предложение 10.3. *Для любого $\lambda \in P$ и любой квадратной J-матрицы $\mathbf{A}$ над P верны равенства $\mathbf{det}_{\lambda\mathbf{A}}(j) = \lambda^{n_j} \det\mathbf{A}(j)$, $j \in J$, где n_j – порядок матрицы $\mathbf{A}(j)$.*

Доказательство. Используя равенство из определения 10.1, равенство $(\lambda\mathbf{A})(j) = \lambda\mathbf{A}(j)$, определяющее произведение $\lambda\mathbf{A}$ элемента $\lambda \in P$ на J-матрицу $\mathbf{A}$ над P, а также соответствующий бинарный результат, получим

$$\mathbf{det}_{\lambda\mathbf{A}}(j) = \det(\lambda\mathbf{A})(j) = \det\lambda\mathbf{A}(j) = \lambda^{n_j}\det\mathbf{A}(j).$$

Предложение доказано.

Считая в предложении 10.3 $\mathbf{A}$ квадратной J-матрицей порядка n, то есть J-матрицей, у которой все значения – квадратные матрицы порядка n, получим

Следствие 10.1. *Для любого $\lambda \in P$ и любой квадратной J-матрицы $\mathbf{A}$ порядка n над P верны равенства $\mathbf{det}_{\lambda\mathbf{A}}(j) = \lambda^{n}\det\mathbf{A}(j)$, $j \in J$.*

Замечание 10.3. Так как всякий J-определитель $\mathbf{det}_{\mathbf{A}} \in P^J$ можно рассматривать как J-матрицу первого порядка, то равенства

$$(\lambda\mathbf{A})(j) = \lambda\mathbf{A}(j), \quad j \in J,$$

определяющие произведение $\lambda\mathbf{A}$ элемента $\lambda \in P$ на J-матрицу $\mathbf{A}$ над P (раздел 6), позволяют определить произведение $\lambda\mathbf{det}_{\mathbf{A}}$ формулой

$$(\lambda\mathbf{det}_{\mathbf{A}})(j) = \lambda\mathbf{det}_{\mathbf{A}}(j), \quad j \in J. \tag{10.1}$$

Теперь следствие 10.1 можно переформулировать следующим образом.

Следствие 10.2. *Для любого $\lambda \in P$ и любой квадратной J-матрицы $\mathbf{A}$ порядка n над P верно равенство $\mathbf{det}_{\lambda\mathbf{A}} = \lambda^n\mathbf{det}_{\mathbf{A}}$.*

Доказательство. Последовательно используя определение 10.1, а затем равенство (10.1), получим

$$\lambda^n\det\mathbf{A}(j) = \lambda^n\mathbf{det}_{\mathrm{A}}(j) = (\lambda^n\mathbf{det}_{\mathbf{A}})(j),$$

то есть

$$\lambda^n\det\mathbf{A}(j) = (\lambda^n\mathbf{det}_{\mathbf{A}})(j), \quad j \in J.$$

Тогда равенство из следствия 10.1 принимает вид

$$\mathbf{det}_{\lambda\mathbf{A}}(j) = (\lambda^n\mathbf{det}_{\mathbf{A}})(j), \quad j \in J,$$

откуда следует $\mathbf{det}_{\lambda\mathbf{A}} = \lambda^n\mathbf{det}_{\mathbf{A}}$. Следствие доказано.

Для J-определителя $\mathbf{det_A}$ любой квадратной J-матрицы $\mathbf{A}$ над P определим J-определитель $-\,\mathbf{det_A}$ по правилу

$$(-\mathbf{det_A})(j) = -\mathbf{det_A}(j), \quad j \in J. \tag{10.2}$$

Предложение 10.4. *Если в каждом значении* $\mathbf{A}(j)$ *квадратной* J*-матрицы* $\mathbf{A}$ *переставить любые две строки или два столбца, то* J*-определитель полученной* J*-матрицы* $\mathbf{B}$ *равен* J*-определителю* J*-матрицы* $\mathbf{A}$, *взятому со знаком минус*: $\mathbf{det_B} = -\,\mathbf{det_A}$.

Доказательство. Согласно определению 10.1

$$\mathbf{det_B}(j) = \det\mathbf{B}(j), \quad j \in J,$$

а так как матрица $\mathbf{B}(j)$ получается из матрицы $\mathbf{A}(j)$ перестановкой строк или столбцов, то согласно соответствующему бинарному результату

$$\det\mathbf{B}(j) = -\det\mathbf{A}(j).$$

Снова применяя определение 10.1, получим

$$-\det\mathbf{A}(j) = -\mathbf{det_A}(j),$$

а согласно (10.2)

$$-\mathbf{det_A}(j) = (-\mathbf{det_A})(j).$$

Таким образом,

$$\mathbf{det_B}(j) = (-\mathbf{det_A})(j), \quad j \in J.$$

откуда $\mathbf{det_B} = -\,\mathbf{det_A}$. Предложение доказано.

Пример 10.2. Если

$$\mathbf{A} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \right), \quad \mathbf{B} = \left(\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \right),$$

то есть вектор-матрица $\mathbf{B}$ получена из вектор-матрицы $\mathbf{A}$ перестановкой столбцов в первой компоненте и перестановкой первой и третьей строк во второй компоненте, то $\mathbf{det_B} = -\,\mathbf{det_A}$.

Предложение 10.5. *Если в каждом значении квадратной* J*-матрицы* $\mathbf{A}$ *имеются две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то*

$$\mathbf{det_A} = \mathbf{0} \in P^J.$$

Предложение 10.6. *Если* $\bar{\mathbf{A}}$ и $\mathbf{A}^*$ – *соответственно комплексно сопряженная и эрмитово сопряженная* J*-матрицы для* J*-матрицы* $\mathbf{A}$, *то*

$$\mathbf{det}_{\bar{\mathbf{A}}} = \overline{\mathbf{det_A}}, \quad \mathbf{det}_{\mathbf{A}^*} = \overline{\mathbf{det_A}}.$$

Доказательство. Докажем, например, второе равенство.

Последовательно используя определение 10.1, второе равенство из замечания 8.1, бинарный результат о равенстве определителя эрмитово сопряженной матрицы сопряженному значению определителя, снова определение 10.1, а также первое равенство из замечания 8.1, получим для любого $j \in J$

$$\mathbf{det}_{\mathbf{A}^*}(j) = \det\mathbf{A}^*(j) = \det(\mathbf{A}(j))^* = \overline{\det\mathbf{A}(j)} = \overline{\mathbf{det_A}(j)} = \overline{\mathbf{det_A}}(j),$$

то есть верно второе равенство из формулировки предложения.

Первое равенство доказываются аналогично. Предложение доказано.

11 Аналог теоремы о произведении определителей

Следующая теорема обобщает бинарный результат о равенстве определителя произведения матриц произведению их определителей.

Теорема 11.1. *Пусть подстановка* σ из $\mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_l$ *– J-матрицы над ассоциативным коммутативным кольцом с единицей, у которых для любого* $j \in J$ *матрицы*

$$\mathbf{A}_1(j), \mathbf{A}_2(\sigma(j)), \ldots, \mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)), \mathbf{A}_l(j)$$

– квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда

$$\mathbf{det}_{[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}} = [\mathbf{det}_{\mathbf{A}_1} \ldots \mathbf{det}_{\mathbf{A}_l}]_{l,\sigma,J}. \tag{11.1}$$

Доказательство. Из условия теоремы вытекает, что J-матрица $[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}$ существует. Отметим также, что в правой и левой частях равенства (11.1) одним и тем же символом обозначены различные l-арные операции: в левой части l-арная операция определена на J-матрицах, а в правой части на элементах из P^J, где P – кольцо, над которым рассматриваются J-матрицы.

Последовательно используя определение 10.1, равенство (1.3) для J-матрицы $[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}$, бинарный результат о равенстве определителя произведения матриц произведению их определителей, снова определение 10.1, а затем равенство (1.3) для элемента $[\mathbf{det}_{\mathbf{A}_1} \ldots \mathbf{det}_{\mathbf{A}_l}]_{l,\sigma,J} \in P^J$, получим для любого $j \in J$

$$\mathbf{det}_{[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}}(j) = \det[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,j}(j) =$$
$$= \det(\mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j))) =$$
$$= \det \mathbf{A}_1(j) \det \mathbf{A}_2(\sigma(j)) \ldots \det \mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)) \det \mathbf{A}_l(\sigma^{l-1}(j)) =$$
$$= \mathbf{det}_{\mathbf{A}_1}(j)\mathbf{det}_{\mathbf{A}_1}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{det}_{\mathbf{A}_{l-1}}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{det}_{\mathbf{A}_l}(\sigma^{l-1}(j)) =$$
$$= [\mathbf{det}_{\mathbf{A}_1} \ldots \mathbf{det}_{\mathbf{A}_l}]_{l,\sigma,J}(j),$$

то есть верно (3.1). Теорема доказана.

Полагая в теореме 11.1 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 11.1 [19]. *Пусть подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \ldots, A_{ik}), \quad i = 1, \ldots, l$$

– k-компонентные вектор-матрицы, у которых для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ *компоненты*

$$A_{1j}, A_{2\sigma(\mathrm{j})}, \ldots, A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}, A_{lj}$$

– квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда

$$\mathbf{det}_{[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,k}} = [\mathbf{det}_{\mathbf{A}_1} \ldots \mathbf{det}_{\mathbf{A}_l}]_{l,\sigma,k}.$$

Полагая в следствии 11.1 σ – цикл длины k, получим

Следствие 11.2 [19]. *Пусть* σ *– цикл длины* k,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \ldots, A_{ik}), \quad i = 1, \ldots, k+1$$

– k-компонентные вектор-матрицы, у которых для любого $j \in \{1,\dots,k\}$ компоненты

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \dots, A_{k\sigma^{k-1}(j)}, A_{(k+1)j}$$

– квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда

$$\mathbf{det}_{[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{k+1}]_{k+1,\sigma,k}} = [\mathbf{det}_{\mathbf{A}_1} \dots \mathbf{det}_{\mathbf{A}_{k+1}}]_{k+1,\sigma,k}.$$

Полагая в следствии 11.2 $\sigma = (12\dots k)$, получим

Следствие 11.3 [19]. *Пусть*

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), \quad i = 1, \dots, k+1$$

– k-компонентные вектор-матрицы, у которых для любого $j \in \{1,\dots,k\}$ компоненты

$$A_{1j}, A_{2(j+1)}, \dots, A_{(k+1-j)k}, A_{(k+2-j)1}, \dots, A_{k(j-1)}, A_{(k+1)j}$$

– квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда

$$\mathbf{det}_{[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{k+1}]_{k+1,(12\dots k),k}} = [\mathbf{det}_{\mathbf{A}_1} \dots \mathbf{det}_{\mathbf{A}_{k+1}}]_{k+1,(12\dots k),k}.$$

Полагая в теореме 11.1 $J = \mathrm{N}$, получим

Следствие 11.4. *Пусть подстановка σ из $\mathbf{S}_{\mathrm{N}}$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$,*

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, A_{i2}, \dots), \quad i = 1, \dots, l$$

– N-*матрицы, у которых для любого $j \in \mathrm{N}$ компоненты*

$$A_{1j}, A_{2\sigma(\mathrm{j})}, \dots, A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}, A_{lj}$$

– квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда

$$\mathbf{det}_{[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,\mathrm{N}}} = [\mathbf{det}_{\mathbf{A}_1} \dots \mathbf{det}_{\mathbf{A}_l}]_{l,\sigma,\mathrm{N}}.$$

Полагая в теореме 11.1 $J = \mathrm{Z}$, получим

Следствие 11.5. *Пусть подстановка σ из S_{Z} удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$,*

$$\mathbf{A}_i = (\dots, A_{i(-2)}, A_{i(-1)}, A_{i0}, A_{i1}, A_{i2}, \dots), \quad i = 1, \dots, l$$

– Z-*матрицы, у которых для любого $j \in \mathrm{Z}$ компоненты*

$$A_{1j}, A_{2\sigma(\mathrm{j})}, \dots, A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}, A_{lj}$$

– квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда

$$\mathbf{det}_{[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,\mathrm{Z}}} = [\mathbf{det}_{\mathbf{A}_1} \dots \mathbf{det}_{\mathbf{A}_l}]_{l,\sigma,\mathrm{Z}}.$$

12 Гомоморфизм из $< \mathbf{GL}_n(J,P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$

В следующей теореме символом P^* обозначается группа всех обратимых элементов кольца P.

Теорема 12.1. *Если подстановка $\sigma \in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то отображение $\gamma: \ \mathbf{A} \to \mathbf{det_A}$ является гомоморфизмом l-арной группы $< \mathbf{GL}_n(J,P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ на l-арную группу $< P^{*J}, [\ ]_{l,\sigma,J} >$.*

Доказательство. Ясно, что γ отображает $\mathbf{GL}_n(J,P) = \mathbf{GL}_n^J(P)$ на всё P^{*J}. Пусть

$$\mathbf{A}_i \in \mathbf{GL}_n(J,P), \quad i = 1, \ldots, l$$

и положим

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J} = \mathbf{Y}.$$

Последовательно используя определение отображения γ, определение 10.1, равенство (1.3) для J-матрицы $[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}$, бинарный результат о равенстве определителя произведения матриц произведению их определителей, снова определение 10.1, затем равенство (1.3) для элемента $[\mathbf{det}_{\mathbf{A}_1} \ldots \mathbf{det}_{\mathbf{A}_l}]_{l,\sigma,J} \in P^J$ и определение отображения γ, получим для любого $j \in J$

$$\gamma([A_1 \ldots A_l]_{l,\sigma,J})(j) = \gamma(\mathbf{Y})(j) = \mathbf{det_Y}(j) = \det \mathbf{Y}(j) =$$

$$= \det(\mathbf{A}_1(j)\mathbf{A}_2(\sigma(j)) \ldots \mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{A}_l(j)) =$$

$$= \det \mathbf{A}_1(j) \det \mathbf{A}_2(\sigma(j)) \ldots \det \mathbf{A}_{l-1}(\sigma^{l-2}(j)) \det \mathbf{A}_l(j) =$$

$$= \mathbf{det}_{\mathbf{A}_1}(j)\mathbf{det}_{\mathbf{A}_2}(\sigma(j)) \ldots \mathbf{det}_{\mathbf{A}_{l-1}}(\sigma^{l-2}(j))\mathbf{det}_{\mathbf{A}_l}(j) =$$

$$= [\mathbf{det}_{\mathbf{A}_1} \ldots \mathbf{det}_{\mathbf{A}_l}]_{l,\sigma,J}(j) = [\gamma(\mathbf{A}_1) \ldots \gamma(\mathbf{A}_l)]_{l,\sigma,J}(j),$$

то есть

$$\gamma([\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{Al}]_{l,\sigma,J})(j) = [\gamma(\mathbf{A}_1) \ldots \gamma(\mathbf{A}_l)]_{l,\sigma,J}(j), \quad j \in J,$$

откуда

$$\gamma([\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\sigma,J}) = [\gamma(\mathbf{A}_1) \ldots \gamma(\mathbf{A}_l)]_{l,\sigma,J}.$$

Следовательно, γ – искомый гомоморфизм. Теорема доказана.

Полагая в теореме 12.1 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 12.1 [19]. *Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то отображение $\gamma: \ \mathbf{A} \to \mathbf{det}\mathbf{A}$ является гомоморфизмом l-арной группы $< \mathbf{GL}_n(k,P), [\ ]_{l,\sigma,k} >$ на l-арную группу $< P^{*k}, [\ ]_{l,\sigma,k} >$.*

Полагая в следствии 12.1 σ – цикл длины k, получим

Следствие 12.2 [19]. *Если цикл σ из S_k имеет длину, равную k, то отображение $\gamma: \ \mathbf{A} \to \mathbf{det_A}$ является гомоморфизмом $(k+1)$-арной группы $< \mathbf{GL}_n(k,P), [\ ]_{k+1,\sigma,k} >$ на $(k+1)$-арную группу $< P^{*k}, [\ ]_{k+1,\sigma,k} >$.*

Полагая в следствии 11.2 $\sigma = (12 \ldots k)$, получим

Следствие 12.3 [19]. *Отображение $\gamma: \ \mathbf{A} \to \mathbf{det_A}$ является гомоморфизмом $(k+1)$-арной группы $< \mathbf{GL}_n(k,P), [\ ]_{k+1,(12\ldots k),k} >$ на $(k+1)$-арную группу $< P^{*k}, [\ ]_{k+1,(12\ldots k),k} >$.*

Полагая в теореме 12.1 $J = \mathrm{N}$, получим

Следствие 12.4. *Если подстановка $\sigma \in S_{\mathrm{N}}$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то отображение $\gamma: \ \mathbf{A} \to \mathbf{det_A}$ является гомоморфизмом l-арной группы $< \mathbf{GL}_n(\mathrm{N},P), [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{N}} >$ на*

l-арную группу $< P^{*\mathrm{N}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{N}} >$.

Полагая в теореме 11.1 $J = \mathrm{Z}$, получим

Следствие 12.5. *Если подстановка $\sigma \in S_{\mathrm{Z}}$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то отображение $\gamma :\ \mathbf{A} \to \mathbf{det_A}$ является гомоморфизмом l-арной группы $< \mathbf{GL}_n(\mathrm{Z}, P), [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{Z}} >$ на l-арную группу $< P^{*\mathrm{Z}}, [\ ]_{l,\sigma,\mathrm{Z}} >$.*

13 J-Определитель косой J-матрицы

Косую J-матрицу для J-матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(J, P)$ можно обозначать символом $\mathbf{A}^{[-1]}$, чем мы и будем пользоваться в данном разделе. Объяснение будет дано ниже.

Теорема 13.1. *Пусть подстановка $\sigma \in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A}$ – произвольный элемент l-арной группы $< \mathbf{GL}_n(J, P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$. Тогда:*

$$\mathbf{det}_{\mathbf{A}^{[-1]}} = (\mathbf{det_A})^{[-1]}, \tag{13.1}$$

где в левой части присутствует косой элемент для $\mathbf{A}$ в $< \mathbf{GL}_n(J, P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$, а правая часть является косым элементом для элемента $\mathbf{det_A}$ l-арной группы $< P^{*J}, [\ ]_{l,\sigma,J} >$.

Доказательство. По предложению 5.1 для J-матрицы $\mathbf{A}$ и элемента $\mathbf{det_A}$ существуют косая J-матрица $\mathbf{A}^{[-1]}$ и косой элемент $(\mathbf{det_A})^{[-1]}$, значения которых имеют следующий вид

$$\mathbf{A}^{[-1]}(j) = (\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1}, \quad j \in J,$$

$$(\mathbf{det_A})^{[-1]} = (\mathbf{det_A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{det_A}(\sigma(j)))^{-1}, \quad j \in J.$$

Используя эти равенства, определение 10.1, бинарный результат о равенстве определителя произведения матриц произведению их определителей, а также бинарный результат об определителе обратной матрицы, получим для любого $j \in J$

$$\mathbf{det}_{\mathbf{A}^{[-1]}}(j) = \det \mathbf{A}^{[-1]}(j) = \det((\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1}) =$$

$$= \det(\mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \ldots \det(\mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1} =$$

$$= (\det \mathbf{A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \ldots (\det \mathbf{A}(\sigma(j)))^{-1} =$$

$$= (\mathbf{det_A}(\sigma^{l-2}(j)))^{-1} \ldots (\mathbf{det_A}(\sigma(j)))^{-1} = (\mathbf{det_A})^{[-1]}(j),$$

то есть

$$\mathbf{det}_{\mathbf{A}^{[-1]}}(j) = (\mathbf{det_A})^{[-1]}(j).$$

Следовательно, верно равенство (13.1). Теорема доказана.

Полагая в теореме 13.1 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, $J = \mathrm{N}$ или $J = \mathrm{Z}$, можно сформулировать соответствующие следствия. Случай $J = \{1, 2, \ldots, k\}$ доказан в [19].

14 J-Определитель степени J-матрицы

Для всякого элемента a l-арной полугруппы $< A, [\ ] >$ естественным образом определяются натуральные степени

$$a^{[0]} = a,\ a^{[1]} = [\underbrace{a \ldots a}_{l}],\ a^{[2]} = [\underbrace{a \ldots a}_{2l-1}],\ \ldots\ , a^{[s]} = [\underbrace{a \ldots a}_{s(l-1)+1}],\ \ldots$$

В частности,

$$\mathbf{A}^{[0]} = \mathbf{A}, \mathbf{A}^{[s]} = [\underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{s(l-1)+1}]$$

для всякого натурального s и любой J-матрицы $\mathbf{A}$ l-арной полугруппы $< \mathbf{M}_n(J,P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$.

Теорема 11.1 позволяет сформулировать

Предложение 14.1. *Пусть подстановка $\sigma \in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A}$ – произвольный элемент l-арной полугруппы $< \mathbf{M}_n(J,P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$, где P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. Тогда:*

$$\mathbf{det}_{\mathbf{A}^{[s]}} = (\mathbf{det}_{\mathbf{A}})^{[s]}, \tag{14.1}$$

где в левой части присутствует степень элемент $\mathbf{A}$ в $< \mathbf{GL}_n(J,P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$, а правая часть является стпенью элемента $\mathbf{det}_{\mathbf{A}}$ l-арной группы $< P^J, [\ ]_{l,\sigma,J} >$.

Для всякого элемента a l-арной группы $< A, [\ ] >$ помимо положительных степеней, определяются [1, 9] и отрицательные степени: для любого целого $s < 0$ степень $a^{[s]}$ есть решение уравнения

$$[x \underbrace{a \dots a}_{-s(l-1)}] = a.$$

Отрицательную степень при $l \geq 3$ можно определить [10] с помощью косого элемента:

$$a^{[s]} = [\underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{-2s} \underbrace{a \dots a}_{-s(l-3)+1}], \quad s < 0,$$

где $\bar{a}$ – косой элемент для a. Так как при $s = -1$

$$a^{[-1]} = [\bar{a}\bar{a} \underbrace{a \dots a}_{l-2}] = \bar{a},$$

то $\bar{a} = a^{[-1]}$, что отмечалось выше.

Таким образом, $\mathbf{A}^{[-1]} = \bar{\mathbf{A}}$,

$$\mathbf{A}^{[s]} = [\underbrace{\mathbf{A}^{[-1]} \dots \mathbf{A}^{[-1]}}_{-2s} \underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{-s(l-3)+1}], \quad s < 0 \tag{14.2}$$

для всякого натурального sи любой J-матрицы $\mathbf{A}$ l-арной группы $< \mathbf{GL}_n(J,P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$.

Теорема 14.1. *Для любого целого s, любой подстановки $\sigma \in S_J$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, и любой J-матрицы $\mathbf{A}$ l-арной группы $< \mathbf{GL}_n(J,P), [\ ]_{l,\sigma,J} >$ верно равенство* (14.1).

Доказательство. Если $s \geq 0$, то применяется предложение 14.1. Для $s < 0$, используя равенство (14.2), теорему 11.1, а также определение отрицательной s-ой степени для элемента $\mathbf{det}_{\mathbf{A}}$, получим

$$\mathbf{det}_{\mathbf{A}^{[s]}}(j) = \mathbf{det}_{[\underbrace{\mathbf{A}^{[-1]} \dots \mathbf{A}^{[-1]}}_{-2s} \underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{-s(l-3)+1}]}(j) =$$

$$= [\underbrace{\mathbf{det}_{\mathbf{A}^{[-1]}} \dots \mathbf{det}_{\mathbf{A}^{[-1]}}}_{-2s} \underbrace{\mathbf{det}_{\mathbf{A}} \dots \mathbf{det}_{\mathbf{A}}}_{-s(l-3)+1}](j) = (\mathbf{det}_{\mathbf{A}})^{[s]}(j), \quad j \in J,$$

то есть

$$\mathbf{det}_{\mathbf{A}^{[s]}}(j) = (\mathbf{det}_{\mathbf{A}})^{[s]}(j), \quad j \in J.$$

Следовательно, верно равенство (14.1). Теорема доказана.

Замечание 14.1. Из теоремы 14.1 при $s = -1$ вытекает теорема 13.1.

Полагая в теореме 14.1 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, $J = \mathrm{N}$ или $J = \mathrm{Z}$, можно сформулировать соответствующие следствия. Случай $J = \{1, 2, \ldots, k\}$ доказан в [19].

15 Аналогии и обобщения

15.1 *J*-Перманент.

Определитель $\det A$ матрицы $A \in \mathbf{M}_n(P)$ можно рассматривать как значение функции det, определенной на $\mathbf{M}_n(P)$, со значениями в P. Точно также J-определитель $\mathbf{det}_{\mathbf{A}}$ J-матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_n(J, P)$ можно считать значением функции $\mathbf{det}$, которая определена на J-ой декартовой степени $\mathbf{M}_n(J, P) = \mathbf{M}_n^J(P)$, со значениями в P^J.

Беря за основу какую-либо функцию u: $\mathbf{M}_n(P) \to P$, отличную от функции det, можно определить функцию $\mathbf{u}$: $\mathbf{M}_n^J(P) \to P^J$ аналогично тому, как это было сделано для функции det: $\mathbf{M}_n(P) \to P$.

В качестве примера рассмотрим функцию per: $\mathbf{M}_n(P) \to P$, где

$$\mathrm{per} A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

для матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_n(P)$. Значение $\mathrm{per} A$ называют перманентом матрицы A. Перманентам посвящена книга Х. Минка [20].

Определение 15.1. Пусть P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. *J-перманентом* J-матрицы $\mathbf{A}$, у которой все значения являются квадратными матрицами над P, называется функция $\mathbf{per}_{\mathbf{A}} \in P^J$, ставящая в соответствие каждому $j \in J$ перманент матрицы $\mathbf{A}(j)$:

$$\mathbf{per}_{\mathbf{A}}(j) = \mathrm{per}\mathbf{A}(j) \in P.$$

Замечание 15.1. В [19] для каждой квадратной k-компонентной вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_k)$ над ассоциативным коммутативным кольцом с единицей был определен вектор-перманент

$$\mathbf{per}_{\mathbf{A}} = \{\mathrm{per} A_1, \ldots, \mathrm{per} A_k\},$$

который, как несложно заметить, является J-перманентом, если множество J совпадает с множеством $\{1, 2, \ldots, k\}$. Отметим, что в [19] вместо символа $\mathbf{per}_{\mathbf{A}}$ использовался символ $\mathbf{per}\mathbf{A}$.

Ясно, что при $J = \{1\}$ имеем $\mathbf{per}_{\mathbf{A}} = \mathrm{per}\mathbf{A}$, то есть в этом случае понятия J-перманента и перманента совпадают.

Используя свойства перманентов обычных матриц, можно получить их аналоги для J-перманентов J-матриц.

Так как перманент определяется [20] не только для квадратных матриц, но и для матриц размера $m \times n$, где $m < n$, то можно определить и изучать J-перманент J-матрицы $\mathbf{A}$, у которой для любого $j \in J$ значение $\mathbf{A}(j)$ является матрицей размера $m_j \times n_j$, где $m_j < n_j$.

15.2 J-Супердетерминант.

Множество $\mathbf{GL}(m,n\,|\,N)$ всех квадратных матриц $K=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где блоки A и D – обратимые матрицы порядков m и n соответственно, состоящие из четных элементов грассмановой алгебры G_N с N образующими, а блоки B и C – прямоугольные матрицы, состоящие из нечетных элементов этой же грассмановой алгебры, является группой [21]. *Супердетерминантом* называется [21] функция sdet из $\mathbf{GL}(m,n\,|\,N)$ со значениями в G_N, определяемая равенством

$$\mathrm{sdet}K = \det(A - BD^{-1}C)\det D^{-1}.$$

Положим

$$\mathbf{GL}(m,n\,|\,N,J) = \mathbf{GL}^J(m,n\,|\,N).$$

Так как $\mathbf{GL}(m,n\,|\,N)$ – группа, то, ввиду теоремы 2.7.1 из [4], верна

Теорема 15.1. *Если подстановка $\sigma\in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l=\sigma$, то $<\mathbf{GL}(m,n\,|\,N,J),[\ ]_{l,\sigma,J}>$ – l-арная группа.*

Замечание 15.2. Из соответствующих результатов книги [4] следует, что l-арная группа $<\mathbf{GL}(m,n\,|\,N,J),[\ ]_{l,\sigma,J}>$ не имеет единиц, если σ – нетождественная подстановка; и является неполуабелевой, в частности неабелевой, если $n\geq 2$.

Определение 15.2. *J-супердетерминантом* элемента

$$\mathbf{K}\in\mathbf{GL}(m,n\,|\,N,J)$$

называется функция $\mathbf{sdet}_{\mathbf{K}}\in G_N^J$, ставящая в соответствие каждому $j\in J$ супердетерминант матрицы $\mathbf{K}(j)$:

$$\mathbf{sdet}_{\mathbf{K}}(j) = \mathrm{sdet}\mathbf{K}(j)\in G_N.$$

Замечание 15.3. В [19] для каждой k-компонентной вектор-матрицы $\mathbf{K}=(K_1,\ldots,K_k)$ с компонентами из $\mathbf{GL}(m,n\,|\,N)$ был определен вектор-супердетерминант

$$\mathbf{sdet}_{\mathbf{K}} = (\mathrm{sdet}K_1,\ldots,\mathrm{sdet}K_k)\in G_N^k,$$

который, как несложно заметить, является J-супердетерминантом, если множество J совпадает с множеством $\{1,2,\ldots,k\}$. Отметим, что в [19] вместо символа $\mathbf{sdet}_{\mathbf{K}}$ использовался символ $\mathbf{sdetK}$.

Ясно, что при $J=\{1\}$ понятия J-супердетерминанта и супердетерминанта совпадают: $\mathbf{sdet}_{\mathbf{K}}=\mathrm{sdet}\mathbf{K}$.

Полагая в теореме 15.1 $J=\{1,2,\ldots,k\}$, получим

Следствие 15.1 [19]. *Если подстановка $\sigma\in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l=\sigma$, то $<\mathbf{GL}(m,n\,|\,N,k),[\ ]_{l,\sigma,k}>$ – l-арная группа. В частности, $<\mathbf{GL}(m,n\,|\,N,k),[\ ]_{k+1,(12\ldots k),k}>$ – $(k+1)$-арная группа.*

Для супердетерминантов имеет место полный аналог теоремы 11.1.

Теорема 15.2. *Если подстановка $\sigma\in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l=\sigma$, то для любых $\mathbf{K}_1,\ldots,\mathbf{K}_l\in\mathbf{GL}(m,n\,|\,N,J)$ верно равенство*

$$\mathbf{sdet}_{[\mathbf{K}_1\ldots\mathbf{K}_l]_{l,\sigma,J}} = [\mathbf{sdet}_{\mathbf{K}_1}\ldots\mathbf{sdet}_{\mathbf{K}_l}]_{l,\sigma,J}. \qquad (15.1)$$

Доказательство теоремы 15.2 почти дословно повторяет доказательство теоремы 11.1. Отличие состоит только в том, что при доказательстве равенства (15.1) вместо мультипликативности функции det используется мультипликативность функции sdet [21]:

$$\mathrm{sdet}(K_1K_2) = \mathrm{sdet}K_1 \cdot \mathrm{sdet}K_2.$$

Полагая в теореме 15.2 $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, получим

Следствие 15.2 [19]. *Если подстановка* $\sigma \in S_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, то для любых $\mathbf{K}_1, \ldots, \mathbf{K}_l \in \mathbf{GL}(m, n \mid N, k)$ верно равенство

$$\mathbf{sdet}_{[\mathbf{K}_1 \ldots \mathbf{K}_l]_{l,\sigma,k}} = [\mathbf{sdet}_{\mathbf{K}_1} \ldots \mathbf{sdet}_{\mathbf{K}_l}]_{l,\sigma,k}.$$

Полагая в теоремах 15.1 и 15.2 $J = \mathrm{N}$ или $J = \mathrm{Z}$, можно сформулировать соответствующие следствия.

15.3 Квантовый J-детерминант.

Можно ввести понятие квантового J-детерминанта, являющегося обобщением понятия квантового детерминанта, который определяется [22] для квантовой матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n над полем P и элемента $q \in P$, удовлетворяющего некоторым дополнительным условиям, следующим образом:

$$\det(q, A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-q)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)},$$

где $\mathrm{inv}(\sigma)$ – число инверсий подстановки σ.

Пусть $\mathbf{q} \in P^J$. Если для каждого значения $\mathbf{A}(j)$ J-матрицы $\mathbf{A}$ определен квантовый детерминант $\det(\mathbf{q}(j), \mathbf{A}(j))$, то *квантовым J-детерминантом* J-матрицы $\mathbf{A}$ называется функция $\mathbf{det}_{(\mathbf{q},\mathbf{A})}$, ставящая в соответствие каждому $j \in J$ квантовый детерминант матрицы $\mathbf{A}(j)$:

$$\mathbf{det}_{(\mathbf{q},\mathbf{A})}(j) = \det(\mathbf{q}(j), \mathbf{A}(j)).$$

Если $\mathbf{q}$ – постоянная функция, принимающая значение q, то рассматривают квантовый J-детерминант $\mathbf{det}_{(q,\mathbf{A})}$, определяемый равенствами

$$\mathbf{det}_{(q,\mathbf{A})}(j) = \det(q, \mathbf{A}(j)), \quad j \in J.$$

15.4 Аналоги J-детерминанта для некоммутативных колец.

В связи с существованием различных обобщений понятия определителя на случай некоммутативных колец возникает задача определения и изучения для каждого из этих обобщений соответствующего аналога J-детерминанта. Например, для квазидетерминантов [23, 24], которые находят широкое применение в физике, для детерминанта Дьёдонне [25, 26], для детерминанта Стади [27], для детерминанта Мура [28], для строчных и столбцовых определителей [29], а также для других обобщений классического детерминанта.

Литература

[1] Post E.L. Polyadic groups // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1940, Vol. 48, №2, pp.208 – 350.

[2] Слипенко А.К. Абстрактная характеристика матричных оперативов // *Укр. мат. журнал.*, 1974, Т. 26, №1, с. 112 – 114.

[3] Слипенко А.К. Про матрични оперативи // *Доповiдi АН УССР.*, 1975, A, №3, с. 207 – 208.

[4] Гальмак А.М., Кулаженко Ю.И. Полиадические операции на множествах функций. Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2013, 190 с.

[5] Гальмак А.М. Об операции $[\;]_{l,\sigma,k}$. // *Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова*, Могилев, 2010, № 1 (35), с. 34 – 38.

[6] Гальмак А.М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях // *Весці НАН Беларусі*, 2008, № 3, с. 28 – 34.

[7] Гальмак А.М. Многоместные операции на декартовых степенях. Минск: Изд. центр БГУ, 2009, 265 с.

[8] Гальмак А.М. Вектор-матрицы // *Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова.*, 2011, № 1 (37), серия В, с. 30 – 37.

[9] Русаков С.А. Алгебраические n-арные системы. Мн.: Навука і тэхніка, 1992, 245 с.

[10] Гальмак А.М. n-Арные группы. Часть 1. Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003, 202с.

[11] Гальмак А.М. n-Арные группы. Часть 2. Минск: Изд. центр БГУ, 2007, 324 с.

[12] Гальмак А.М. n-Арные группы. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, Москва, 2007, т. 4, № 2 (18), с. 76 – 95.

[13] Супруненко Д.А. Группы подстановок. Мн.: Навука і тэхніка, 1996, 366 с.

[14] Wielandt H. Unendliche Permutationsgruppen. Vorlesungen an der Universität Tübingen WS 1959-1960, Tübingen, 1960, s. 1 – 45.

[15] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988, 552 с.

[16] Гальмак А.М. Транспонированные вектор-матрицы. // *Проблемы физики, математики и техники*, 2011, № 1 (6), с. 52 – 56.

[17] Гальмак А.М. О σ-согласованных вектор-матрицах // *Проблемы физики, математики и техники*, 2011, № 4 (9), с. 92 – 99.

[18] Гальмак А.М. Сопряженные вектор-матрицы и пространственные матрицы // *Проблемы физики, математики и техники*, 2012, № 4 (13), с. 40 – 49.

[19] Гальмак А.М. Вектор-определители и определители вектор-матриц // *Проблемы физики, математики и техники*, 2011, № 2 (7), с. 58 – 64.

[20] Минк Х. Перманенты. М.: Мир., 1982, 213 с.

[21] Березин Ф.А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: Изд-во МГУ, 1983, 208 с.

[22] Manin Y. Multiparametric quantum deformation of the general linear supergroup // *Math. Phys.*, 1989, V. 123, pp. 163 – 175.

[23] Гельфанд И.М., Ретах В.С. Детерминанты матриц над некоммутативными кольцами // *Функц. анализ и его приложения*, 1991, т. 25, № 2, с. 13 – 35.

[24] Гельфанд И.М., Ретах В.С. Теория некоммутативных детерминантов и характеристических функций графов // *Функц. анализ и его приложения*, 1993, т. 26, № 4, с. 33 – 45.

[25] Dieudonne J. Les determinants sur un corps non commutatif // *Bull. Math. Soc. France*, 1943, V. 71, pp. 27 – 45.

[26] Дьёдонне Ж. Геометрия классических групп. М.: Мир., 1974, 204 с.

[27] Study E. Zur Theorie der lineare Gleihungen. // *Math.*, 1920, B. 42, s. 1 – 61.

[28] Moore E.H. On the determinant of an Hermitian matrix of quaternionic elements // *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1922, v. 28, pp. 161 – 162.

[29] Кирчей И.И. Правило Крамера для кватернионных систем линейных уравнений // *Фундаментальная и прикладная математика*, 2007, т. 13, № 4, с. 67 – 94.

POLYADIC OPERATIONS ON THE SETS OF MATRIX-VALUED FUNCTIONS

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technology, Mogilev, Belarus

halm54@mail.ru

Main object of the present paper are polyadic operations on the set $\mathbf{M}^J(P)$. Elements of the set are functions defined on the nonempty set J with values, which belong to set of all matrix $\mathbf{M}(P)$ with elements from some ring P. Such polyadic operations for the first time introduce E. Post. He consider the case $J = \{1, \ldots, m-1\}$, where C – field of complex number.

Key Words: polyadic operations, matrix, function, semigroup, group.