НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОМ ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ РАСШИРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Г.И. Гарасько

ФГУП ВЭИ, Москва, Россия

gri9z@yandex.ru, gri9z.wordpress.com

Рассмотрено движение материальной точки в потенциале Ньютона с особенностью в начале координат при учете расширения пространства-времени. Получено дифференциальное уравнение, описывающее зависимость квадрата орбитальной скорости от расстояния до начала координат, и приближенное решение этого уравнения. При больших расстояниях от начала координат квадрат орбитальной скорости стремится к отличной от нуля величине, зависящей от инкремента расширения пространства-времени.

Ключевые слова: финслерова геометрия, ньютоновкий потенциал, расширение пространства-времени

1 Введение

Наблюдаемые в галактиках массы M отклонения от классической зависимости квадрата орбитальной скорости v_φ^2, вращающихся на переферии галактики вокруг "неподвижного" центра наблюдаемых объектов массы m, от расстояния r до центра описываемые формулой

$$v_\varphi^2 = \frac{kM}{r}\,,$$

где k – гравитационная постоянная, сводятся в основном к тому, что при достаточно больших r квадрат орбитальной скорости v_φ^2 стремится к отличному от нуля асимптотическому значению

$$v_\varphi^2(r) \to v_{\varphi(\infty)}^2 = \mathrm{const}\,.$$

За последние годы предложено много гипотетически возможных объяснений такому эффекту. Обзор многочисленных работ по этой тематике и собственные объяснения и теории представлены, например, в статьях [1, 2] и [3].

В данной работе мы рассмотрим задачу движения материальной точки массой m в поле ньютоновского потенциала

$$U(r) = \frac{kMm}{r}\,,$$

где точечная масса $M \gg m$ покоится в начале координат, а r – расстояние от начала координат до движущейся материальной точки массой m, с учетом того, что пространство-время расширяется с инкрементом γ по закону $e^{\gamma t}$. Целью работы является определение зависимости орбитальной скорости $v_\varphi^2(r)$ от радиуса r.

Поясним, что мы понимаем под расширением пространства-времени в нерелятивистской физике и как это расширение пространства-времени приводит к общей диссипации. Запишем вначале не функцию Лагранжа, а метрическую функцию финслерова пространства Галилея для движения нерелятивистской материальной точки в некотором потенциальном поле U [4], [5]:

$$ds = e^{\gamma t}\left\{mc^2 dt - m\,\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2\,dt} + U dt\right\}\,. \qquad (1)$$

Для такой метрической функции индикатриса в касательном пространстве в каждой точке основного пространства с течением времени сжимается по экспоненциальному закону, что приводит к увеличению расстояния между точками основного пространства. Проще всего представлять себе неизменное координатное пространство-время, в каждой точке которого находятся эталоны единицы длины и единицы времени, и эти эталоны сжимаются по экспоненциальному закону. Считая параметром эволюции время, запишем для такой метрической функции функцию Лагранжа и уравнения движения:

$$L = e^{\gamma t}\left\{m\,\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{2} - U\right\}\,, \tag{2}$$

$$\ddot{\vec{x}} + \gamma\dot{\vec{x}} + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = 0\,. \tag{3}$$

Таким образом, экспоненциальное растяжение пространства-времени (в указанном выше смысле) приводит к общей диссипации, силе "трения" (сопротивления), направленной против скорости движения, а по величине пропорциональной скорости. Коэффициент "трения" совпадает с инкрементом экспоненциального расширения пространства-времени.

2 Зависимость угловой скорости от радиуса

Считая потенциал сферически симметричным, запишем функцию Лагранжа и уравнения движения в сферических координатах:

$$L = e^{\gamma t}\left\{m\,\frac{\dot{r}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2}{2} - U(r)\right\}\,, \tag{4}$$

$$m\,\frac{d}{dt}\,e^{\gamma t}\dot{r} - e^{\gamma t}\left\{m\,\left(r\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2 + r\dot{\vartheta}^2\right) - \frac{dU}{dr}\right\} = 0\,, \tag{5}$$

$$m\,\frac{d}{dt}\,e^{\gamma t}\,r^2\,\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi} = 0\,, \tag{6}$$

$$m\,\frac{d}{dt}\,e^{\gamma t}\,r^2\dot{\vartheta} - m\,e^{\gamma t}\,r^2\sin\vartheta\,\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2 = 0\,. \tag{7}$$

Последнее уравнение автоматически удовлетворяется, если $\vartheta \equiv \dfrac{\pi}{2}$, иначе говоря, если движение происходит в плоскости $\vartheta \equiv \dfrac{\pi}{2}$. Принимая это упрощение и несколько преобразовывая оставшиеся два уравнения движения, получим

$$\ddot{r} + \gamma\dot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{m}\frac{dU}{dr} = 0\,, \tag{8}$$

$$e^{\gamma t}\,r^2\,\dot{\varphi} = \mu\,, \tag{9}$$

где μ – постоянная.

Если $\gamma = 0$, то эта система уравнений разрешает равномерное движение по окружности:

$$\dot{\varphi} = \mathrm{const}\,, \quad r = \mathrm{const}\,, \qquad v_\varphi \equiv r\cdot\dot{\phi} = \mathrm{const}\,, \tag{10}$$

где постоянные связаны соотношением

$$v_\varphi^2 = \frac{r}{m}\frac{dU}{dr}\,. \tag{11}$$

Если $\gamma \neq 0$, то эта система уравнений не разрешает движение по окружности.

3 Ньютоновский потенциал

Рассмотрим теперь ньютоновский потенциал:

$$U(r) = -\frac{kmM}{r}\,, \tag{12}$$

k – гравитационная постоянная, M – покоящаяся масса в начале координат, "создающая" гравитационное поле. Тогда уравнения (8), (9) запишутся следующим образом:

$$\ddot{r} + \gamma\dot{r} - \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{kM}{r^2} = 0\,, \tag{13}$$

$$e^{\gamma t}\, r v_\varphi = \mu\,. \tag{14}$$

Если $\gamma = 0$, то эта система уравнений разрешает равномерное движение по окружности, при выполнении соотношения

$$v_\varphi^2 = \frac{kM}{r}\,. \tag{15}$$

При $\gamma \neq 0$ в качестве нулевого приближения можно взять $v_\varphi^2(r)$ (15). При этом мы стремимся получить решение $v_\varphi^2(r,\gamma)$, которое бы при $\gamma \to 0$ переходило бы в $v_\varphi^2(r)$ (15).

Будем считать, что

$$t = t(r)\,, \qquad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(r)\,, \tag{16}$$

а в качестве неизвестной функции выберем

$$\zeta(r) \equiv \ln\left(\left(\frac{r v_\varphi}{\mu}\right)^2\right)\,. \tag{17}$$

Из уравнения (14) получим

$$t(r) = -\frac{1}{2\gamma}\,\zeta(r)\,, \tag{18}$$

поэтому

$$\frac{d\,t}{d\,r} = -\frac{1}{2\gamma}\,\frac{d\zeta}{dr}\,, \qquad \frac{d\,r}{d\,t} = -\,2\gamma\,\frac{1}{\dfrac{d\zeta}{dr}}\,, \qquad \frac{d^2\,r}{d\,t^2} = -\,4\gamma^2\,\frac{\dfrac{d^2\zeta}{dr^2}}{\left(\dfrac{d\zeta}{dr}\right)^3}\,. \tag{19}$$

Тогда при выполнении условия

$$\frac{d\zeta}{dr} \neq 0 \tag{20}$$

уравнение (13) можно записать следующим образом:

$$-\,4\gamma^2\,\frac{\dfrac{d^2\zeta}{dr^2}}{\left(\dfrac{d\zeta}{dr}\right)^3} - \,2\gamma^2\,\frac{1}{\dfrac{d\zeta}{dr}} - \frac{\mu^2 e^\zeta}{r^3} + \frac{kM}{r^2} = 0\,, \tag{21}$$

или

$$4\gamma^2\,\frac{d^2\zeta}{d\,r^2} + 2\gamma^2\,\left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^2 + \left(\frac{\mu^2 e^\zeta}{r^3} - \frac{kM}{r^2}\right)\left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^3 = 0\,. \tag{22}$$

Заметим, что это уравнение не изменяется при замене параметра γ на $(-\,\gamma)$. То есть и при сжатии пространства-времени по экспоненциальному закону с декрементом затухания γ

зависимость $v_\varphi^2(r)$ будет та же самая, что и для расширяющегося пространства-времени, при совпадении граничных и дополнительных условий.

Если $\gamma = 0$, то решением этого уравнения является

$$\zeta = \ln\left(\frac{kMr}{\mu^2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad v_\varphi^2 = \frac{kM}{r}\,. \tag{23}$$

Будем считать это решение нулевым приближением по малому параметру γ, в этом случае следующее приближение дает

$$\zeta = \ln\frac{kMr + 2\gamma^2 r^4}{\mu^2} \qquad \Rightarrow \qquad v_\varphi^2 = \frac{kM}{r} + 2\,\gamma^2\,r^2\,. \tag{24}$$

Для выполнения условия малости добавки следующего приближения необходимо, чтобы выполнялись неравенства:

$$\frac{kM}{r} \gg 2\,\gamma^2\,r^2 \qquad \Rightarrow \qquad r \ll \left(\frac{kM}{2\gamma^2}\right)^{\frac{1}{3}} \equiv 2^{\frac{2}{3}}\left(\frac{kM}{8\gamma^2}\right)^{\frac{1}{3}}\,. \tag{25}$$

Функциональная зависимость квадрата орбитальной скорости от радиуса (24) имеет минимум

$$\left(v_\varphi^2\right)_{min} = 6\gamma^2\left(\frac{kM}{4\gamma^2}\right)^{\frac{2}{3}} \equiv \frac{3}{2^{4/3}}\frac{kM}{\left(\frac{kM}{8\gamma^2}\right)^{\frac{1}{3}}}\,, \tag{26}$$

в точке r_*:

$$r_* = \left(\frac{kM}{4\gamma^2}\right)^{\frac{1}{3}} \equiv 2^{\frac{1}{3}}\left(\frac{kM}{8\gamma^2}\right)^{\frac{1}{3}}\,. \tag{27}$$

При “больших” r, то есть при

$$r \gg 2^{\frac{2}{3}}\left(\frac{kM}{8\gamma^2}\right)^{\frac{1}{3}}\,, \tag{28}$$

уравнение (22) приобретает вид

$$2\,\frac{d^2\zeta}{d\,r^2} + \left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^2 = 0\,, \tag{29}$$

и его общее решение -

$$\zeta = \ln\frac{(r+\alpha)^2}{\beta^2} \qquad \Rightarrow \qquad v_\varphi^2 = \eta\frac{(r+\alpha)^2}{r^2}\,, \tag{30}$$

где α, β и η - постоянные.

Теперь надо сшить два решения (24) и (30). Исходя из требований: монотонного убывания зависимости $v_\varphi(r)$ и гладкости сшивки в точке

$$r_j = \left(\frac{kM}{8\gamma^2}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{31}$$

- получим приближенное решение уравнения (22) во всей области изменения переменной $r \in (0,\,\infty)$:

$$V^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{4}R^2\,, & R < 1\,; \\[2ex] \dfrac{4}{5}\,\dfrac{\left(R + \dfrac{1}{4}\right)^2}{R^2}\,, & R \geq 1\,; \end{cases} \tag{32}$$

где R и V – безразмерные величины:

$$R \equiv \frac{r}{r_j}\,, \qquad\qquad V \equiv \frac{v_\varphi}{\sqrt{\dfrac{kM}{r_j}}}\,. \tag{33}$$

Зависимость (32) квадрата нормированной орбитальной скорости V^2 материальной точки от нормированного расстояния R до точки нахождения массивного тела изображена на рис. 1.

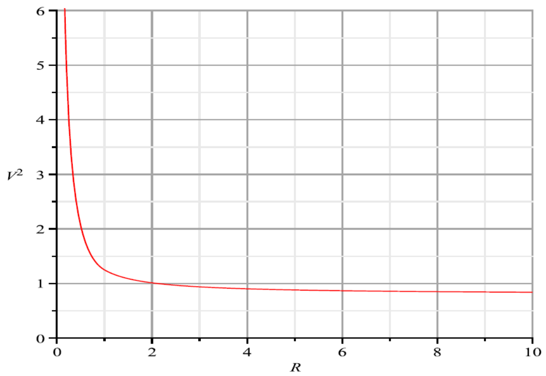

Рис. 1: Зависимость квадрата орбитальной скорости материальной точки от расстояния до покоящейся массы.

В нормированных величинах точка сшивки $R_j = 1$, а асимптотическое значение V_∞^2 при $R \to \infty$ равно $V_\infty^2 = \dfrac{4}{5}$, или в размерных величинах:

$$v^2_{\varphi(\infty)} = \frac{4}{5}\,\frac{kM}{\left(\dfrac{kM}{8\gamma^2}\right)^{\frac{1}{3}}}\,. \tag{34}$$

Из-за того, что точка, где происходит сшивка решений, однозначно не определена и нет граничного условия для $r = \infty$, точность полученного приближенного решения (32) невелика. Сравним, например, величину $v^2_{\varphi(\infty)}$ (34) с $\left(v^2_\varphi\right)_{min}$ (26):

$$\frac{v^2_{\varphi(\infty)}}{\left(v^2_\varphi\right)_{min}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{2^{4/3}}} = 0,6719578933 \approx 0,7\,. \tag{35}$$

При выборе вместо r_j (31) точку сшивания $r_J > r_j$ получим асимптотическое значение квадрата орбитальной скорости большее, чем (34). Отношение (35) характеризует возможные отклонения.

4 Заключение

Предложенные рассуждения позволяют несколько иначе взглянуть на проблему движения материальных объектов во «вращающихся» галактиках.

Необходимо досконально изучить уравнение (22) и получить более точное решение во всей области изменения $r \in (0, \infty)$.

Литература

[1] Сипаров С.В. Теория эффекта нулевого порядка для исследования геометрических свойств пространства-времени // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2006. Том 3, 2(6), стр. 155 – 172.

[2] Сипаров С.В. Закон гравитации и модель источника в анизотропной геометродинамике // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2009. Том 6, 2(12), стр. 144 – 161.

[3] Владимиров Ю.С., Ромашка М.Ю. Модифицированная ньютоновская динамика (MOND) и ее возможные интерпретации // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*, 2013. Вып. 1, стр. 64 – 77.

[4] Рашевский П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М. – Л., ОГИЗ, 1947.

[5] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., ТЕТРУ, 2009.

MATERIAL POINT NONRELATIVISTIC MOVEMENT IN SPHERICAL POTENTIAL FIELD IN VIEW OF SPACE-TIME EXPANSION

G.I. Garas'ko

Electrotechnical Institute of Russia, Moscow, Russia

gri9z@yandex.ru, gri9z.wordpress.com

Movement of material point in Newton potential with singularity in origin of coordinates is considered. Differential equation describing dependence of square of orbital velosity on distance from origin of coordinates is obtained and its approximate solution is presented. In the case of large distance from origin of coordinates, square of orbital velosity go to non-zero value, which depends on space-time expansion increment.

Key Words: Finsler geometry, Newton potential, space-time expansion