ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ АЛГЕБРА БИКВАТЕРНИОНОВ В УРАВНЕНИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Л.А. Алексеева

Институт математики и математического моделирования Комитет науки МОН РК, Алматы, Казахстан

alexeeva@math.kz

Рассматривается функциональное пространство бикватернионов на пространстве Минковского. При этом используется скалярно-векторная запись бикватернионов, предложенная У.Гамильтоном для кватернионов. С введением дифференциальных операторов — взаимных комплексных градиентов (*биградиентов*), обобщающих понятие градиента на пространство бикватернионов, рассмотрены бикватернионные волновые (*биволновые*) уравнения и их обобщенные решения. Исследована инвариантность уравнений для группы преобразований Лоренца-Пуанкаре. Предложена бикватернионная форма обобщенного уравнения Максвелла-Дирака и определены его обобщенные решения в бикватернионной форме через скалярные потенциалы. Получено уравнение для скалярных потенциалов решений уравнения Максвелла-Дирака (*КГФШ-уравнение*), объединяющее известные уравнения квантовой механики (уравнение Клейна-Гордона-Фока и уравнение Шредингера). Построены нестационарные, статические и гармонические по времени скалярные потенциалы и порождаемые ими спиноры и спинорные поля.

Ключевые слова: алгебра, бикватернион, биградиент, биволновое уравнение, обобщенное решение, ударные волны, преобразование Лоренца, уравнение Максвелла, уравнение Дирака, спинор, скалярный потенциал, стационарные колебания.

Предложенная В.Р. Гамильтоном алгебра кватернионов [1] и ее комплексное расширение — алгебра бикватернионов являются удобным математическим аппаратом для описания многих физических процессов. В последние десятилетия эти алгебры стали активно использоваться в работах разных авторов для решения ряда задач электродинамики [2-6], квантовой механики [7-11], механики твердого тела [12] и теории поля [13-16]. Эти разделы физики активно изучаются в рамках теорий клиффордовых алгебр [17-19].

Здесь разрабатывается дифференциальная алгебра бикватернионов на пространстве Минковского для построения обобщенных решений бикватернионных дифференциальных уравнений, характерных для задач математической физики.

С использованием дифференциальных операторов — взаимных комплексных градиентов (*биградиентов*), обобщающих понятие градиента на функциональное пространство бикватернионов на пространстве Минковского, рассмотрены дифференциальные бикватернионные волновые (*биволновые*) уравнения и, на основе обобщенного преобразования Фурье, построены их обобщенные решения. Рассмотрены ударные волны как обобщенные решения этих уравнений и получены условия на скачки решений на их фронтах. Исследована инвариантность биволновых уравнений для групп ортогональных преобразований, преобразований Лоренца и Пуанкаре.

Рассмотрены бикватернионные представления уравнений Максвелла и Дирака и построены их фундаментальные и обобщенные решения, описывающие нестационарные, гармонические и статические поля и спиноры.

1 Алгебра бикватернионов

Введем некоторые понятия и обозначения, которыми будем пользоваться далее. Обозначим e_1, e_2, e_3 – орты декартовой системы координат в R^3, $e_0 = 1$. Пусть F — трехмерный вектор с комплексными компонентами: $F = F_1 e_1 + F_2 e_2 + F_3 e_3$, $f \in \mathcal{C}$ — комплексное число.

Вводится пространство гиперкомплексных чисел — *бикватернионов* (комплексных *кватернионов*) $B = \{\mathbf{F} = f + F\}$. Это линейное пространство со сложением (+) и умножением:

$$a\mathbf{F} + b\mathbf{G} = a(f + F) + b(g + G) = (af + bg) + (aF + bG), \quad \forall a, b \in \mathcal{C},$$

и операцией кватернионного умножения ($\circ$):

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{G} = (f + F) \circ (g + G) = (fg - (F, G)) + (fG + gF + [F, G]). \tag{1}$$

Здесь и далее обозначаем $(F, G) = \sum_{j=1}^{3} F_j G_j$ — скалярное произведение векторов F и G, $[F, G] = \sum_{j,k,l=1}^{3} \varepsilon_{jkl} F_j G_k e_l$ — их векторное произведение, ε_{jkl}– псевдотензор Леви-Чивита, δ_{jk} — символ Кронекера.

Поскольку $\varepsilon_{jkl} = \varepsilon_{ljk} = \varepsilon_{klj}, \quad \varepsilon_{jkl} = -\varepsilon_{jlk} = -\varepsilon_{kjl}$; и $\varepsilon_{jkl}\varepsilon_{mnl} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$,

$$e_0 \circ e_0 = e_0, \quad e_0 \circ e_j = e_j, \quad e_j \circ e_k = -\delta_{jk} + \varepsilon_{jkl} e_l,$$

$$(e_j \circ e_k) \circ e_m = -\varepsilon_{jkm} - \delta_{jk} e_m - \delta_{km} e_j + \delta_{mj} e_k = e_j \circ (e_k \circ e_m), \quad j, k, l, m, n = 1, 2, 3,$$

(здесь и далее всюду по одноименным индексам в произведении суммирование от 1 до 3, подобно тензорной свертке) алгебра бикватернионов ассоциативна:

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{G} \circ \mathbf{H} = (\mathbf{F} \circ \mathbf{G}) \circ \mathbf{H} = \mathbf{F} \circ (\mathbf{G} \circ \mathbf{H}), \tag{2}$$

но некоммутативна:

$$< \mathbf{F}, \mathbf{G} >= \mathbf{F} \circ \mathbf{G} - \mathbf{G} \circ \mathbf{F} = 2[F, G]. \tag{3}$$

Из этого свойства коммутатора следует
тождество Якоби

$$<< \mathbf{F}, \mathbf{G} >, \mathbf{H} > + << \mathbf{H}, \mathbf{F} >, \mathbf{G} > + << \mathbf{G}, \mathbf{H} >, \mathbf{F} >=$$

$$= 4[\,[F, G], H] + 4[\,[H, F], G] + 4[\,[G, H], F] =$$

$$= -4(F(H, G) - G(H, F) + H(G, F) - F(G, H) + G(F, H) - H(F, G)) = 0.$$

Т.е. алгебра бикватернионов является *алгеброй Ли.*

Из (3) следует, что произведение двух бикватернионов коммутативно, если хотя бы один из них — скаляр, либо их векторные части параллельны.

Определения.

Бикватернион $\mathbf{F}^- = f - F$ называется *взаимным* для $\mathbf{F} = f + F$.

Бикватернион $\bar{\mathbf{F}} = \bar{f} + \bar{F}$, где черта обозначает соответствующие компонентам комплексно-сопряженные числа, называется *комплексно-сопряженным* $\mathbf{F}$.

Если $\mathbf{F} \circ \bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}} \circ \mathbf{F} = 1$, то назовем $\mathbf{F}$ *унитарным.*

Бикватернион $\mathbf{F}^* = \bar{f} - \bar{F}$ назовем *сопряженным* $\mathbf{F}$.

Если $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}$, бикватернион называется *самосопряженным.*

Самосопряженные бикватернионы имеют вид: $\mathbf{F} = f + iF$, где f и F — действительные.
Скалярным произведением бикватернионов $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ назовем билинейную операцию

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = f_1 f_2 + (F_1, F_2)\,.$$

Нормой бикватерниона $\mathbf{F}$ назовем неотрицательную скалярную величину

$$\|\mathbf{F}\| = \sqrt{\left(\mathbf{F}, \bar{\mathbf{F}}\right)} = \sqrt{f \cdot \bar{f} + \left(F, \bar{F}\right)} = \sqrt{|f|^2 + \|F\|^2}. \tag{4}$$

Если $\mathbf{F}$ — *кватернион* (действительный биватернион), то $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^-$ и

$$\|\mathbf{F}\|^2 = \mathbf{F}^* \circ \mathbf{F} = \mathbf{F} \circ \mathbf{F}^* \tag{5}$$

Псевдонормой бикватерниона $\mathbf{F}$ назовем величину

$$\langle\langle \mathbf{F} \rangle\rangle = \sqrt{f \cdot \bar{f} - \left(F, \bar{F}\right)} = \sqrt{|f|^2 - \|F\|^2}, \quad Re < \mathbf{F} >\geq 0, \tag{6}$$

Легко видеть, если $\mathbf{F}$ — самосопряженный, то $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^-$ и

$$\bar{\mathbf{F}} \circ \mathbf{F} = \mathbf{F} \circ \bar{\mathbf{F}} = \langle\langle \mathbf{F} \rangle\rangle^2. \tag{7}$$

Если $\mathbf{F} \circ \mathbf{G} = 1$, то $\mathbf{G}$ — *правый обратный* для $\mathbf{F}$ и обозначается $\mathbf{G} = \mathbf{F}^{-1}$, соответственно $\mathbf{F}$ — *левый обратный* для $\mathbf{G}$ и обозначается ${}^{-1}\mathbf{G}$.

Простым вычислением доказываются равенства

$$(\mathbf{F} \circ \mathbf{G})^* = \mathbf{G}^* \circ \mathbf{F}^*, \quad (\mathbf{F} \circ \mathbf{G})^{-1} = \mathbf{G}^{-1} \circ \mathbf{F}^{-1}. \tag{8}$$

Легко доказываются следующие лемма и теорема.

Лемма 1.1. *Если*$(\mathbf{F}, \mathbf{F}) \neq 0$, *то существуют оба обратных бикватерниона и они равны*:

$$\mathbf{F}^{-1} =^{-1} \mathbf{F} = \mathbf{F}^- / (\mathbf{F}, \mathbf{F}). \tag{9}$$

Если$(\mathbf{F}, \mathbf{F}) = 0$, *обратный бикватернион не существует.*

Теорема 1.1. *При известных* $\mathbf{F}$ и $\mathbf{B}$ *бикватернионные линейные (билинейные) уравнения вида*

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{G} = \mathbf{B} \quad \text{или} \quad \mathbf{G} \circ \mathbf{F} = \mathbf{B}$$

имеют единственное решение $\mathbf{G} = \mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{B}$ *или* $\mathbf{G} = \mathbf{B} \circ \mathbf{F}^{-1}$ *соответственно, если* $(\mathbf{F}, \mathbf{F}) \neq 0$.

Доказательство теоремы следует из леммы 1.1.

Если $(\mathbf{F}, \mathbf{F}) = 0$, вопрос существования решения определяется рангом матрицы расширенной системы, который зависит от вида $\mathbf{B}$ (см.[20]).

Введем бикватернион *энергии-импульса*

$$\mathbf{\Xi} = W + iP = \frac{1}{2}\,\mathbf{F} \circ \mathbf{F}^* = (|f|^2 + \|F\|^2)/2 + i\left(\mathtt{Im}\,(\overline{f}F) + [\mathtt{Re}\,F, \mathtt{Im}\,F]\right).$$

Здесь W и P— действительные, $\langle\langle \mathbf{\Xi} \rangle\rangle^2 = W^2 - \|P\|^2 = \mathbf{\Xi} \circ \mathbf{\Xi}^-$.

В задачах математической физики, как покажем далее, он описывает плотность энергии-импульса скалярно-векторного поля на 4-х мерном пространстве Минковского.

2 Преобразование Лоренца, Пуанкаре на пространстве Минковского

Рассмотрим бикватернионы на пространстве Минковского $M = \{(\tau, x) : \tau \in R^1, x \in R^3\}$ и группы линейных преобразований на нем. Кватернизируем M, вводя комплексно-сопряженные бикватернионы:

$$\mathbf{Z} = \tau + ix, \quad \bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}^- = \tau - ix, \quad \tau \in R^1, \ x \in R^3.$$

Они самосопряженные: $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^*$, $\bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{Z}}^*$, имеют одинаковые норму и псевдонорму:

$$\|\mathbf{Z}\|^2 = \left\|\bar{\mathbf{Z}}\right\|^2 = \tau^2 + \|x\|^2 = (\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}), \quad \langle\langle \mathbf{Z} \rangle\rangle^2 = \langle\langle \bar{\mathbf{Z}} \rangle\rangle^2 = \tau^2 - \|x\|^2 = \mathbf{Z} \circ \bar{\mathbf{Z}} \tag{10}$$

и

$$\mathbf{Z}^{-1} = \bar{\mathbf{Z}} / \langle\langle \mathbf{Z} \rangle\rangle^2, \qquad \bar{\mathbf{Z}}^{-1} = \mathbf{Z} / \langle\langle \mathbf{Z} \rangle\rangle^2.$$

Следовательно, на *световом конусе* ($|\tau| = \|x\|$) обратных для $\mathbf{Z}$, $\bar{\mathbf{Z}}$ не существует.

Ортогональные преобразования. Рассмотрим сопряженные кватернионы:

$$\mathbf{U}(\varphi, e) = \cos\varphi + e \sin\varphi, \ \mathbf{U}^* = \mathbf{U}^- = \cos\varphi - e \sin\varphi, \quad \|e\| = 1, \quad \varphi \in R^1.$$

Легко видеть:

$$\| \mathbf{U} \| = \| \mathbf{U}^* \| = \mathbf{1}, \ \mathbf{U} \circ \mathbf{U}^* = \mathbf{U}^- \circ \mathbf{U} = \mathbf{1}. \tag{11}$$

Лемма 2.1. *Сопряженные кватернионы* $\mathbf{U}(\varphi, e), \mathbf{U}^*(\varphi, e)$, $\varphi \in R^1$, *определяют группу линейных преобразований* M, *ортогональных на векторной части* $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{U} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{U}^*, \ \mathbf{Z} = \mathbf{U}^* \circ \mathbf{Z}' \circ \mathbf{U}.$$

Это преобразование есть вращение пространства R^3 *вокруг вектора* e *на угол* 2φ.

Доказательство. Вычисляя формулу леммы, получим сохранение скалярной части и указанное вращение векторной:

$$\tau' = \tau, \quad x' = e(e, x) + (x - e(e, x)) cos 2\varphi + [e, x] sin 2\varphi.$$

При этом, в силу (10),(11),

$$\langle\langle \mathbf{Z}' \rangle\rangle^{\mathbf{2}} = \mathbf{U} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{U}^* \circ \mathbf{U} \circ \bar{\mathbf{Z}} \circ \mathbf{U}^* = \langle\langle \mathbf{Z} \rangle\rangle^{\mathbf{2}}.$$

Т.к. $\tau = \tau'$, норма вектора Z сохраняется: $\|Z\| = \|Z'\|$.

Рассмотрим суперпозицию двух ортогональных преобразований:

$$\mathbf{U}_1 \circ \mathbf{U_2} = \mathbf{U}_3 = u_3 + U_3 = (\cos\varphi_1 + e_1 \sin\varphi_1) \circ (\cos\varphi_2 + e_2 \sin\varphi_2) =$$
$$= \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - (e_1, e_2) \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + e_2 \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 + e_1 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + [e_1, e_2] \sin\varphi_2 \sin\varphi_2.$$

Поскольку

$$\mathbf{U}_3^{-1} = (\mathbf{U}_1 \circ \mathbf{U_2})^{-1} = \mathbf{U}_2^{-1} \circ \mathbf{U}_1^{-1} = \mathbf{U}_2^- \circ \mathbf{U}_1^-, \quad \mathbf{U}_3^* = (\mathbf{U}_1 \circ \mathbf{U_2})^* = \mathbf{U}_2^* \circ \mathbf{U}_1^* = \mathbf{U}_2^- \circ \mathbf{U}_1^- = \mathbf{U}_3^-,$$

получим:

$$\mathbf{U}_3 \circ \mathbf{U}_3^- = (\mathbf{U}_1 \circ \mathbf{U_2}) \circ (\mathbf{U}_1 \circ \mathbf{U_2})^- = \mathbf{U}_1 \circ \mathbf{U_2} \circ \mathbf{U}_2^- \circ \mathbf{U}_1^- = 1$$

Т.е. $\mathbf{U}_3$ тоже является ортогональным преобразованием:

$$\mathbf{U}_3 = \cos\varphi_3 + e_3 \sin\varphi_3, \quad \varphi_3 = arc(\cos u_3), \quad e_3 = \frac{U_3}{\|U_3\|.}$$

Преобразования Лоренца. Рассмотрим взаимные самосопряженные бикватернионы

$$\mathbf{L}(\theta, e) = ch\,\theta + ie\,sh\,\theta,\ \mathbf{L}^- = ch\,\theta - ie\,sh\,\theta, \quad \theta \in R^1,\ \|e\| = 1$$

(здесь используются гиперболический синус и косинус).

Легко видеть, что они унитарные:

$$\mathbf{L} \circ \mathbf{L}^- = ch\theta^2 - sh\theta^2 = 1. \tag{12}$$

Прямым вычислением доказываются следующие леммы [20].

Лемма 2.2. *Преобразование Лоренца имеет следующее бикватернионное представление*:

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{L} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{L}, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{L}^- \circ \mathbf{Z}' \circ \mathbf{L}^-, \quad \langle\langle \mathbf{Z}' \rangle\rangle^{\mathbf{2}} = \langle\langle \mathbf{Z} \rangle\rangle^{\mathbf{2}}. \tag{13}$$

Легко видеть, что псевдонорма сохраняется, в силу ассоциативности и унитарности (12):

$$\langle\langle \mathbf{Z}' \rangle\rangle^{\mathbf{2}} = \mathbf{L} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{L} \circ \mathbf{L}^- \circ \bar{\mathbf{Z}} \circ \mathbf{L}^- = \langle\langle \mathbf{Z} \rangle\rangle^{\mathbf{2}}.$$

Если вести обозначения:

$$ch2\theta = (1 - v^2)^{-1/2}, \quad sh2\theta = v(1 - v^2)^{-1/2}, \quad |v| < 1,$$

то, вычисляя, получим, что скалярная и векторная часть $\mathbf{Z}'$ и $\mathbf{Z}$ имеют вид известных *релятивистских формул* [2]:

$$\tau' = \frac{\tau + v(e, x)}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x' = (x - e(e, x)) + e\frac{(e, x) + v\tau}{\sqrt{1 - v^2}},$$

$$\tau = \frac{\tau' - v(e, x)}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x = (x' - e(e, x')) + e\frac{(e, x') - v\tau'}{\sqrt{1 - v^2}},$$

что соответствует движению системы координат $\{X_1, X_2, X_3\}$ в направлении вектора e со скоростью v.

Суперпозиция двух Лоренц-преобразований с одинаковым e обладает групповыми свойствами:

$$\mathbf{L}_1 \circ \mathbf{L_2} = \mathbf{L}_3 = l_3 + L_3 = (ch\varphi_1 + iesh\theta_1) \circ (ch\theta_2 + iesh\theta_2) =$$
$$= (ch\theta_1 ch\theta_2 + sh\theta_1 sh\theta_2) + ie(sh\theta_2 ch\theta_1 + sh\theta_1 ch\theta_2) = ch(\theta_1 + \theta_2) + ie\,sh(\theta_1 + \theta_2)$$

Однако суперпозиция двух Лоренц-преобразований с разными (непараллельными) e преобразованием Лоренца не является:

$$\mathbf{L}_1 \circ \mathbf{L_2} = \mathbf{L}_3 = l_3 + L_3 = (ch\theta_1 + ie_1 sh\theta_1) \circ (ch\theta_2 + ie_2 sh\theta_2) =$$
$$= (ch\theta_1 ch\theta_2 + (e_1, e_2) sh\theta_1 sh\theta_2) + i(e_2 sh\theta_2 ch\theta_1 + e_1 sh\theta_1 ch\theta_2) - [e_1, e_2] sh\theta_2 sh\theta_1$$

Как видим, полученный бикватернион имеет действительное слагаемое в векторной части.

Преобразования Пуанкаре. Заметим, что

$$\mathbf{L}(\theta, e) = \mathbf{U}(-i\theta, e).$$

Используя суперпозицию этих двух преобразований, получим общий вид преобразования, которое назовем *преобразованием Пуанкаре.*

Определение. Преобразование Пуанкаре на M — это линейное преобразование вида:

$$\mathbf{Z}^{'} = \mathbf{P} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{P}^{*}, \ \mathbf{Z} = \mathbf{P}^{-} \circ \mathbf{Z}^{'} \circ \mathbf{P}^{*-}, \tag{14}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{U} \circ \mathbf{L} = cos(\varphi + i\theta) + esin(\varphi + i\theta),$$

$$\mathbf{P}^{*} = \mathbf{L}^{*} \circ \mathbf{U}^{*} = cos(\varphi - i\theta) - esin(\varphi - i\theta),$$

которое сохраняет псевдонорму:

$$\langle\langle \mathbf{Z} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{Z}' \rangle\rangle.$$

Последнее в силу $\mathbf{P} \circ \mathbf{P}^{-} = \mathbf{P}^{*} \circ \mathbf{P}^{*-} = 1$.

При преобразованиях Лоренца-Пуанкаре световой конус $\tau = \|x\|$ переходит в световой конус: $\langle\langle \mathbf{Z} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{Z}^{-} \rangle\rangle = 0$.

Суперпозиция преобразований Пуанкаре с одинаковым e также обладает групповыми свойствами, что легко доказывается на основе ассоциативности и коммутативности произведения бикватернионов с параллельными векторами:

$$\mathbf{P}_1 \circ \mathbf{P}_2 = \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{U}_1 \circ \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{U}_2 = \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{U}_1 \circ \mathbf{U}_2 = \mathbf{L}_3 \circ \mathbf{U}_3 = \mathbf{P}_3.$$

Суперпозиция двух преобразований Пуанкаре с разными e таким свойством не обладает.

3 Пространство обобщенных бикватернионов $\mathtt{B}'(M)$

Рассмотрим на M функциональное пространство бикватернионов:

$$\mathtt{B}(M) = \{\mathbf{F} = f(\tau, x) + F(\tau, x)\},$$

где f — комплекснозначная функция, а F — трехмерная вектор-функция с комплексными компонентами F_j, $j = 1, 2, 3$.

Частную производную бикватерниона по переменной τ или x_j будем обозначать:

$$\partial_\tau \mathbf{F} = \partial_\tau f + \partial_\tau F, \quad \partial_j \mathbf{F} = \partial_j f + \partial_j F.$$

Введем два пространства бикватернионов, *основное* –

$$\mathtt{B}(M) = \{\mathbf{\Phi} = \varphi(\tau, x) + \Phi(\tau, x)\}, \quad \varphi \in D(R^4),\ \Phi_j \in D(R^4),\ j = 1, 2, 3,$$

где $D(R^4)$ – пространство финитных бесконечно-дифференцируемых функций на R^4 [21], и сопряженное пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathtt{B}(M)$ – $\mathtt{B}'(M) = \{\hat{\mathbf{F}} = \hat{f} + \hat{F}\}$:

$$(\hat{\mathbf{F}}, \mathbf{\Phi}) = (\hat{f}, \varphi) + \sum_{j=1}^{3} (\hat{F}_j, \Phi_j), \quad \forall \mathbf{\Phi} \in \mathtt{B}(M),$$

которое назовем *пространством обобщенных бикватернионов* (ОБк).

Любому регулярному бикватерниону $\mathbf{F}$ соответствует функционал (будем помечать его шапочкой), который можно представить в интегральном виде:

$$(\hat{\mathbf{F}}, \mathbf{\Phi}) = \int\limits_{R^4} (\mathbf{F}(\tau, x), \mathbf{\Phi}(\tau, x))\, d\tau dx_1 dx_2 dx_3, \quad \forall \mathbf{\Phi} \in \mathtt{B}(M).$$

Если действие ОБк нельзя представить в таком интегральном виде, будем называть его *сингулярным.*

Сингулярные функции из $D'(R^4)$ определяют и соответствующие им скалярные ОБк с нулевой векторной частью. Используя их можно строить и более сложные ОБк. В частности, в задачах математической физики часто используются *простые слои.* Их обобщением на $\hat{B}(M)$ являются ОБк $\mathbf{F}\delta_S$, которые определяют функционалы вида:

$$(\mathbf{F}\delta_S, \mathbf{\Phi}) = \int_S (\mathbf{F}(\tau, x), \mathbf{\Phi}(\tau, x))dS, \quad \forall \mathbf{\Phi} \in \mathtt{B}(M).$$

Здесь интеграл берется по поверхности $S \subset R^4$ размерность, которой может быть равной 1,2,3. Определенный и интегрируемый на S бикватернион $\mathbf{F}$ назовем, как принято [21], *плотностью* простого слоя.

Используя определение производной ОБ:

$$(\partial_j \hat{\mathbf{F}}, \mathbf{\Phi}) = -(\hat{\mathbf{F}}, \partial_j \mathbf{\Phi}) \quad \text{для} \quad \forall \mathbf{\Phi} \in \mathtt{B}(M)$$

можно строить частные производные любых порядков, аналогично, как в [4].

Определение. *Обобщенным решением* дифференциального уравнения

$$D(\partial_\tau, \partial_x)\mathbf{F} = \mathbf{G},$$

где D – дифференциальный оператор, будем называть ОБк $\hat{\mathbf{F}}$, удовлетворяющий равенству:

$$(D\hat{\mathbf{F}}, \mathbf{\Phi}) = (\hat{\mathbf{G}}, \mathbf{\Phi}) \quad \text{для } \forall \mathbf{\Phi} \in \mathtt{B}(M).$$

Определим свертку двух бикватернионов в виде:

$$\mathbf{A}(\tau, x) * \mathbf{B}(\tau, x) = a * b - \sum_{i,j,l=1}^{3} (A_j * B_j) + (a * A_j)\, e_j + (b * B_j)\, e_j + \varepsilon_{ijl}\, (A_i * B_j)\, e_l,$$

где в скобках стоят обычные свертки обобщенных функций [21]. Легко видеть, что здесь объединены операции бикватернионного умножения и свертка.

В силу свойства дифференцирования свертки обобщенных функций,

$$\partial_j(\mathbf{A} * \mathbf{B}) = (\partial_j \mathbf{A}) * \mathbf{B} = \mathbf{A} * \partial_j \mathbf{B}, \quad \partial_j = \partial_\tau, \partial_1, \partial_2, \partial_3. \tag{15}$$

Определение. Обобщенным преобразованием Фурье $\hat{\mathbf{G}}$ называется ОБк $\tilde{\mathbf{G}}$, удовлетворяющий равенству:

$$(\hat{\mathbf{G}}, \mathbf{\Phi}) = (\widetilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{\Phi}}) \quad \text{для } \forall \mathbf{\Phi} \in \mathtt{B}(\mathbf{M}).$$

Здесь $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ – классическое преобразование Фурье $\mathbf{\Phi}$:

$$\mathtt{F}[\mathbf{\Phi}(\tau, x)] = \tilde{\mathbf{\Phi}}(\omega, \xi) = \int_{R^4} \mathbf{\Phi}(\tau, x) exp(i\tau\omega + i(\xi, x)) d\tau dx_1 dx_2 dx_3, \quad \mathbf{\Phi} \in \mathtt{B}(M),$$

которое всегда существует в силу свойств $\mathtt{B}(M)$.

Аналогично, как в теории обобщенных функций, можно показать,что если бикватернион регулярный и существует классическое преобразование Фурье, то оно является и обобщенным. Также легко показать,основываясь на свойствах свертки обобщенных функций [21], что

$$\mathtt{F}[\mathbf{A}(\tau, x) * \mathbf{B}(\tau, x)] = \widetilde{\mathbf{A}}(\omega, \xi) \circ \widetilde{\mathbf{B}}(\omega, \xi). \tag{16}$$

Эти свойства свертки ((15),(16)) очень полезны при решении дифференциальных бикватернионных уравнений.

4 Биградиенты и преобразование Лоренца

Рассмотрим частные случаи дифференциальных операторов, характерные для задач математической физики, но будем рассматривать их на $\mathtt{B}'(M)$.

Введем бикватернионные дифференциальные операторы – *взаимные комплексные градиенты*:

$$\nabla^{+} = \partial_\tau + i\nabla, \quad \nabla^{-} = \partial_\tau - i\nabla, \tag{18}$$

где $\nabla = grad = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$. Коротко будем называть их *биградиентами.*

В смысле выше данных определений их символы комплексно-сопряженные и самосопряженные: $(\nabla^-)^* = \nabla^-$, $(\nabla^+)^* = \nabla^+$. Их действие на K определим как в алгебре бикватернионов: (соответственно знакам)

$$\nabla^{\pm}\mathbf{F} = (\partial_\tau \pm i\nabla) \circ (f + F) = (\partial_\tau f \mp i\,(\nabla, F)) \pm \partial_\tau F \pm i\nabla f \pm i[\nabla, F]$$

или в традиционной записи –

$$\nabla^{\pm}\mathbf{F} = (\partial_\tau f \mp i\,div\,F) \pm \partial_\tau F \pm igrad\,f \pm i\,rot\,F.$$

Легко проверить, что волновой оператор $\Box$ представим в виде суперпозиции взаимных биградиентов:

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \triangle = \nabla^- \circ \nabla^+ = \nabla^+ \circ \nabla^-, \tag{19}$$

где $\triangle$ - трехмерный оператор Лапласа.

Используя это свойство, можно строить частные решения дифференциальных бикватернионных уравнений на $\mathtt{B}'(M)$ вида:

$$\nabla^{\pm}\mathbf{K}(\tau, x) = \mathbf{G}(\tau, x), \tag{20}$$

которое будем называть *биволновым уравнением.* А решения этого уравнения будем называть $\pm$*бипотенциалами* $\mathbf{G}$.

При преобразованиях Пуанкаре биградиенты и биволновые уравнения преобразуются в соответствии со следующими утверждениями [20].

Теорема 4.1. *При преобразовании Пуанкаре* $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}' = \mathbf{P} \circ \mathbf{Z} \circ \mathbf{P}^*$ *биградиенты* $\mathbf{D} \to \mathbf{D}'$:

$$\mathbf{D}' = \mathbf{P}^- \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{P}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{P} \circ \mathbf{D}' \circ \mathbf{P}^-,$$

($\mathbf{D} = \nabla^+$ *либо* $\mathbf{D} = \nabla^-$). *При этом* $\mathbf{D}' = \left(\dfrac{\partial}{\partial\tau'} \pm i\nabla'\right)$ *сохраняют вид, а биволновое уравнение преобразуется в биволновое*

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau'} \pm i\nabla'\right)\mathbf{K}' = \mathbf{G}',$$

(*релятивистские формулы*)

$$\mathbf{K}' = \mathbf{P}^- \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{P}, \;\; \mathbf{G}' = \mathbf{P}^- \circ \mathbf{G} \circ \mathbf{P}.$$

Действительно, легко видеть,

$$\mathbf{D}'\mathbf{K}' = \left(\mathbf{P}^- \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{P}\right)\left(\mathbf{P}^- \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{P}\right) = \mathbf{P}^- \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{P} = \mathbf{P}^- \circ \mathbf{G} \circ \mathbf{P} = \mathbf{G}'.$$

5 Обобщенные решения биволнового уравнения. Ударные волны

Перейдем к решению биволнового уравнения.

Теорема 5.1. *Любое обобщенное решение биволнового уравнения* (20) *можно представить в виде*:

$$\hat{\mathbf{K}} = \nabla^{\mp}\hat{\mathbf{G}} * \psi + \mathbf{K_0}. \tag{21}$$

где $\psi(\tau, x)$ *–простой слой на световом конусе* $\tau = \|x\|$:

$$\psi = (4\pi \|x\|)^{-1}\delta(\tau - \|x\|), - \tag{22}$$

фундаментальное решение волнового уравнения:

$$\Box\psi = \delta(\tau)\delta(x). \tag{23}$$

$\mathbf{K_0}(\tau, x)$ — *решение однородного биволнового уравнения, которое имеет вид*:

$$\mathbf{K_0} = \nabla^{\mp}\{\mathbf{G_0} * \psi_0(\tau, x)\}, \tag{25}$$

где $\psi_0(\tau, x)$ — *решение однородного волнового уравнения*:

$$\Box\psi_0 = 0, \tag{26}$$

$$\psi_0(\tau, x) = \int\limits_{R^3} \phi(\xi) \exp\left(i\left((\xi, x) \pm \|\xi\|\,\tau\right)\right) dV(\xi), \quad \forall\phi(\xi) \in L_1(R^3), \tag{27}$$

а $\mathbf{G_0}(\tau, x)$*– любой бикватернион, допускающий свертку с* ψ_0*, либо представимо как сумма решений подобного вида.*

Доказательство. Действительно, используя ассоциативность и свойство дифференцирования свертки (15), для первого слагаемого в (21) получим

$$\nabla^{\pm}\hat{\mathbf{K}} = \nabla^{\pm}\nabla^{\mp}\left(\hat{\mathbf{G}} * \psi\right) = \Box\left(\hat{\mathbf{G}} * \psi\right) = \hat{\mathbf{G}} * \Box\psi = \hat{\mathbf{G}} * \delta(\tau)\delta(x) = \hat{\mathbf{G}}.$$

Здесь использовали (23) и свойства свертки с сингулярной δ-функцией [21].

Аналогично, для второго слагаемого получим:

$$\nabla^{\pm}\mathbf{K_0} = \nabla^{\pm}\nabla^{\mp}\{\mathbf{C_0} * \psi_0(\tau, x)\} = \Box\{\mathbf{C_0} * \psi_0(\tau, x)\} = \{\Box\psi_0(\tau, x)\} * \mathbf{C_0} = \mathbf{0}.$$

Обратно, если $\mathbf{K_0}$ – решение однородного биволнового уравнения, тогда каждая компонента является решением однородного уравнения (26). Поэтому его можно представить в виде (25) или разложить в сумму 4-х таких бипотенциалов для каждой компоненты с разными решениями однородного волнового уравнения.

Вид решений волнового уравнения (27), в том числе фундаментального (22), хорошо известен [18, 21]. В силу линейности, их сумма в (21) является решением биволнового уравнения (20).

Следует заметить, что свойство дифференцирования свертки (15) позволяет вычислять ее по-разному, в зависимости от свойств дифференцируемости $\mathbf{G}$, что следует учитывать при конкретных вычислениях. Так, полагая $\mathbf{G} = \delta(\tau)\delta(x)$, получим

Фундаментальное решение биволнового уравнения

$$\mathbf{\Psi}(\tau, x) = \partial_\tau\psi \pm i\, grad\, \psi,$$

которое позволяет строить решения биволнового уравнения в виде свертки:

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{G}} * \mathbf{\Psi} + \mathbf{K}_0$$

для любой правой части (20), допускающей такую свертку.

Ударные волны. Рассмотрим обобщенные решения однородного биволнового уравнения. Поскольку оно эквивалентно системе гиперболических уравнений, следовательно, существуют разрывные на характеристических поверхностях (S) решения этой системы, на которых, как легко видеть,

$$n_\tau^2 = \|n\|^2 \tag{28}$$

где (n_τ, n_1, n_2, n_3) — нормаль к S в M, $n = (n_1, n_2, n_3)$, $\|n\|^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$. Это конус характеристических нормалей волнового уравнения.

Определим условия, которым должны удовлетворять скачки решений на таких поверхностях, чтобы они были обобщенными решениями (23).

Пусть S — такая поверхность в M. Предположим, что вне ее они непрерывны и дифференцируемы. Используя правило обобщенного дифференцирования разрывных функций [21], получим обобщенные производные бикватернионов:

$$\partial_\tau \hat{\mathbf{F}} = \partial_\tau \mathbf{F} + n_\tau \left[\mathbf{F}\right]_S \delta_S(\tau, x), \quad \partial_i \hat{\mathbf{F}} = \partial_i \mathbf{F} + n_i \left[\mathbf{F}\right]_S \delta_S(\tau, x),$$

где первое слагаемое — обычная производная, а второе — простой слой на S, (n_τ, n_1, n_2, n_3) — компоненты единичной нормали к S в M: $n_\tau^2 + n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$; $[\mathbf{F}]_S$ — скачок на S:

$$[\mathbf{F}(\tau, x)]_S = \lim_{\varepsilon \to +0} \left\{ \mathbf{F}(\tau + \varepsilon n_\tau, x + \varepsilon n) - \mathbf{F}(\tau - \varepsilon n_\tau, x - \varepsilon n) \right\}, \quad (\tau, x) \in S.$$

В силу этого,

$$\nabla^+ \hat{\mathbf{K}} = \nabla^+ \mathbf{K} + \left\{ n_\tau \left[k\right]_S - i\left(n, [K]_S\right) + n_\tau \left[K\right]_S + in\left[k\right]_S + i[n, [K]_S] \right\} \delta_S(\tau, x) =$$
$$= \nabla^+ \mathbf{K} + (n_\tau + in) \circ \left[K\right]_S \delta_S(\tau, x) = 0$$

Поскольку $\nabla^+ \mathbf{K} = 0$, отсюда следуют условия на скачки:

$$n_\tau [k]_S - i\left(n, [K]_S\right) = 0, \quad n_\tau [K]_S + in[k]_S + i[n, [K]_S] = 0. \tag{29}$$

Характеристической поверхности S соответствует подвижный волновой фронт S_t в R^3, с нормалью (n_1, n_2, n_3), который распространяется со скоростью

$$c = -\frac{n_\tau}{\|n\|} = 1. \tag{30}$$

Последнее — в силу (28). Такие решения называются *ударными волнами.*

Очевидно, при регулярной правой части биволнового уравнения получим те же соотношения. Сформулируем этот результат в виде полезной теоремы.

Теорема 5.2. *Регулярные разрывные решения биволнового уравнения удовлетворяют следующим условиям на фронтах ударных волн*:

$$\left[\mathbf{K}\ \right]_S = i\mathbf{m} \circ \left[\mathbf{K}\right]_S,$$

где $\mathbf{m} = n/\|n\|$*— единичный волновой вектор, направленный в сторону распространения волны в* R^3.

Доказательство. Если поделить (29) на $\|n\|$, с учетом (30) , получим условия на фронтах ударных волн:
$$[k]_S = -i\,(\mathbf{m}, [K]_S), \quad [K]_S = i\,\mathbf{m}\,[k]_S + i\,[\mathbf{m}, [K]_S] \tag{31}$$
Бикватернионная запись этих уравнений дана в формуле теоремы.

Первое уравнение (31) описывает продольные волны. Если подставить его во второе уравнение, получим соотношение для касательной составляющей вектора K к фронту волны:
$$[K]_S - \mathbf{m}(\mathbf{m}, [K]_S) = i\,[\mathbf{m}, [K]_S],$$
которая связывает скачки действительной и мнимой векторной части бикватерниона друг через друга.

Задача Коши для биволнового уравнения

Рассмотрим задачу Коши для биволнового уравнения. Пусть даны *начальные условия*:
$$\mathbf{K}(0, x) = \mathbf{K^0}(x), \qquad \mathbf{K^0}(x) \in \mathtt{B}'(R^3)$$
Требуется построить решение уравнения (20), удовлетворяющее этим данным.

Используем для этого метод обобщенных функций. Введем регулярные обобщенные функции вида $\widehat{\mathbf{G}} = H(\tau)\mathbf{G}(\tau, x)$, где $H(\tau)$— функция Хевисайда. Предположим, что $\mathbf{K^0}$ — регулярный БК. Используя свойство дифференцирования регулярных обобщенных функций, получим
$$\nabla^{\pm}\widehat{\mathbf{K}} = \widehat{\mathbf{G}} + \delta(\tau)\mathbf{K^0}(x).$$
Следовательно, обобщенное решение имеет вид:
$$\mathbf{H}(\tau)\mathbf{K}(\tau, x) = \nabla^{\mp}\{H(\tau)\mathbf{G} * \psi\} + \mathbf{G}(0, x) \underset{x}{*} \psi + \nabla^{\mp}\{\mathbf{K^0}(x) \underset{x}{*} \psi\} \tag{32}$$
(здесь знак "$\underset{x}{*}$ "означает, что свертка берется только по x).

Для регулярной правой части биволнового уравнения ее интегральная запись легко выписывается, с учетом вида полной и неполной свертки с ψ. А именно,
$$4\pi\hat{\mathbf{K}}(\tau, x) = -\nabla^{\mp}\left\{\int\limits_{r\leq\tau} \mathbf{G}(\tau - r, y)\frac{dV(y)}{r} + \tau^{-1}\int\limits_{r=\tau} \mathbf{K^0}(y)dS(y)\right\} - \tau^{-1}\int\limits_{r=\tau} \mathbf{G}(0, y)dS(y).$$
Здесь и далее $r = \|y - x\|$, $dV(y) = dy_1dy_2dy_3$, $dS(y)$ — дифференциал площади сферы $r = \tau$.

В случае сингулярных начальных данных решение дает формулу (32), где следует брать свертки согласно правилам теории обобщенных функций.

Эта формула является обобщением известной формулы Кирхгофа для решения задачи Коши для волнового уравнения [21]. Поэтому назовем ее *обобщенной формулой Кирхгофа* для биволнового уравнения.

6 Бикватернионная форма уравнений Максвелла и их модификация

В качестве примера приложения изложенной теории биволнового уравнения рассмотрим уравнения Максвелла (УМ) для электромагнитного (ЭМ) поля.

Система уравнения Максвелла, состоящая из 8 уравнений (2-х векторных и 2-х скалярных), в пространстве бикватернионов имеет вид биволнового уравнения [4,24]:

$$\nabla^{+}\mathbf{A}+\mathbf{\Theta}=0. \tag{33}$$

Бикватернионы *напряженности* $\mathbf{A}$ и *заряда-тока* $\mathbf{\Theta}$ ЭМ-поля определены равенствами:

$$\mathbf{A}=0+A=\sqrt{\varepsilon}\,E(\tau,x)+i\sqrt{\mu}\,H(\tau,x),\quad \mathbf{\Theta}=i\rho(\tau,x)+J(\tau,x),$$

где E — напряженность электрического поля, H — напряженность магнитного поля; *плотность* ρ и *импульс* J выражаются через плотности электрического заряда ρ^E и электрического тока j^E формулами:

$$\rho=\rho^E/\sqrt{\varepsilon}=\sqrt{\varepsilon}\,div\,E,\quad J=\sqrt{\mu}\,j^E,$$

ε,μ-константы электрической проводимости и магнитной проницаемости среды;$\tau=ct$, t-время, $c=1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ –скорость света.

Расписывая скалярную и векторную часть этого уравнения (33), получим известную комплексную форму уравнений Максвелла :

$$\rho=div\,A,\quad \partial_\tau A+i\,rot\,A+J=0,$$

которую называют *гамильтоновой формой* УМ [22,25]. Выписывая действительную и мнимую части этих уравнений получим классическую форму уравнений Максвелла из 2-х векторных и 2-х скалярных уравнений.

Если взять взаимный биградиент в бикватернионной форме УМ (33), получим в скалярной части закон сохранения заряда и волновое уравнение для напряженности ЭМ-поля в векторной:

$$\partial_\tau\rho+div\,J=0,\quad \Box A=i\,rot\,J-grad\rho-\partial_\tau J.$$

Вычисляя бикватернион *энергии-импульса* $\mathbf{A}$-поля:

$$\mathbf{\Xi}=W+iP=\frac{1}{2}\,\mathbf{A}\circ\mathbf{A}^*,$$

получим известные [26] плотность энергии ЭМ-поля –

$$W=0,5\,\|A\|^2=\frac{1}{2}\left(\varepsilon\,\|E\|^2+\mu\,\|H\|^2\right),$$

и вектор Умова-Пойнтинга –

$$P=\frac{1}{2}[\bar{A},A]=c^{-1}E\times H.$$

Преобразования Пуанкаре для уравнения Максвелла имеют вид:

$$\nabla^{+}\mathbf{A}'=\mathbf{\Theta}',\qquad \text{где}\quad \mathbf{A}'=\mathbf{P}^-\circ\mathbf{A}\circ\mathbf{P},\qquad \mathbf{\Theta}'=\mathbf{P}^-\circ\mathbf{\Theta}\circ\mathbf{P}.$$

Ударные ЭМ-волны. Из теоремы 4.1 получим условие на фронтах ударных ЭМ-волн:

$$[A]_S=i\mathbf{m}\circ[\mathbf{A}]_{\mathbf{S}}$$

где $\mathbf{m}$ — единичный волновой вектор, направленный в сторону распространения волны в R^3. Для скалярной и векторной частей в этом случае оно имеет вид:

$$(\mathbf{m}, [A]_S) = 0, \quad [A]_S = i[\mathbf{m}, [A]_S]. \tag{34}$$

Первое условие означает, что ударные ЭМ-волны являются *поперечными*. Расписывая второе условие для действительной и мнимой части, получим связь скачка электрического поля со скачком магнитного:

$$\sqrt{\varepsilon}\,[E]_S = \sqrt{\mu}\,[[H]_S, \mathbf{m}], \quad \sqrt{\mu}\;[H]_S = \sqrt{\varepsilon}[\mathbf{m}, [E]_S].$$

или, используя вектора электрического смещения и магнитной индукции

$$D = \varepsilon E, \quad B = \mu H,$$

сформулируем результат в виде теоремы.

Теорема 6.1. *На фронтах ударных электромагнитных волн выполняются следующие условия на скачки напряженности электрического и магнитного поля*:

$$[E]_S = c\,[[B]_S, \mathbf{m}], \quad [H]_S = c\,[\mathbf{m}, [D]_S],$$

что эквивалентно условиям:

$$[D]_S = c^{-1}[[H]_S, \mathbf{m}], \quad [B]_S = c^{-1}[\mathbf{m}, [E]_S],$$

где $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Задача Коши. При известных зарядах-токах и начальных данных из класса регулярных функций:

$$\mathbf{A}(0, x) = \mathbf{A^0}(x).$$

решение задачи Коши для уравнений Максвелла дается обобщенной формулой Кирхгофа:

$$4\pi\mathbf{A} = \nabla^- \left\{ \int\limits_{r\le\tau} \mathbf{\Theta}(\tau - r, y)\frac{dV(y)}{r} + \tau^{-1}\int\limits_{r=\tau} \mathbf{A^0}(y)dS(y) \right\} + \tau^{-1}\int\limits_{r=\tau} \mathbf{\Theta}(0, y)dS(y).$$

Отсюда нетрудно записать интегральные представления для векторов напряженности ЭМ-поля E,H, которые будут иметь довольно громоздкий вид.

Модифицированные уравнения Максвелла. В системе УМ (34) векторное уравнение определяет токи, скалярное уравнение является определением заряда, а закон сохранения заряда является следствием этих двух уравнений. Его получаем из этих уравнений, взяв дивергенцию от векторного с учетом определения заряда.

Заметим, что в биградиенте напряженности ЭМ-поля скалярная часть равна нулю. Следствием этого, как выше показано, тоже является закон сохранения заряда. Т.е. система уравнений Максвелла описывает замкнутые системы электрических зарядов и токов и порождаемых ими ЭМ-поля.

Для открытых систем, как показано в [16], уравнения Максвелла необходимо модифицировать введением скалярного поля $a(\tau, x)$ в бикватернион напряженности

$$\mathbf{A} = a(\tau, x) + A(\tau, x).$$

Последовательный бикватернионный подход, как здесь показано, приводит к модификации системы уравнений Максвелла, которая, как следует из (33), имеет вид: (*модифицированные уравнения Максвелла*)

$$\partial_\tau A + i\, rot A + J = grad\, a, \quad \rho = div\, A - \partial_\tau a. \tag{35}$$

Если заряды ρ и токи J известны, эта система уравнений для определения a и A замкнута.

Скалярное поле $a(\tau, x)$ можно назвать полем *сопротивления-поглощения*. Ранее в работе автора [16] этот вопрос подробно рассмотрен для одной бикватернионной модели взаимодействия электро-гравимагнитных полей, зарядов и токов с использованием полевых аналогов законов Ньютона.

Замечание. Бикватернионная форма уравнения Максвелла (33) имеет глубокий физический смысл. Из нее следует, что *напряженность ЭМ-поля является бипотенциалом своего заряда-тока, а заряды-токи являются физическим проявлением биградиента ЭМ-поля.*

7 Стационарные биградиенты и уравнения колебаний

Рассмотрим решения биволнового уравнения (20), описывающие стационарные колебания с частотой $\omega > 0$:

$$\mathbf{K}(\tau, x) = \mathbf{K}(x) exp(-i\omega\tau).$$

Аналогичный вид имеет правая часть этого уравнения.

В этом случае уравнение для комплексной амплитуды имеет вид:

$$\nabla_\omega^\pm \hat{\mathbf{K}}(x) = \omega k(x) \mp div\, K(x) \pm grad\, k(x) + \omega K(x) \pm rot\, K(x) = i\hat{\mathbf{G}}(x), \tag{36}$$

где введены *взаимные ω-градиенты* $\nabla_\omega^\pm = (\omega \pm \bigtriangledown)$.

Взяв от этого уравнения взаимный ω-градиент, получим неоднородное уравнение Гельмгольца для комплексных амплитуд:

$$\triangle \hat{\mathbf{K}}(x) + \omega^2 \hat{\mathbf{K}}(x) = i\nabla_\omega^\mp \hat{\mathbf{G}}(x).$$

Решение этого уравнения, в силу свойства дифференцирования свертки, имеет вид:

$$\hat{\mathbf{K}} = i\nabla_\omega^\mp \{\psi_\omega * \hat{\mathbf{G}}\} = i\mathbf{\Psi}_\omega * \hat{\mathbf{G}}, \tag{37}$$

где $\mathbf{\Psi}_\omega(x)$ -фундаментальное решение уравнения (36):

$$\mathbf{\Psi}_\omega(x) = \omega\, \psi_\omega(x) \pm grad\, \psi_\omega(x),$$

а ψ_ω — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца:

$$(\nabla + \omega^2)\psi_\omega = \delta(x). \tag{38}$$

Таковыми, в частности, являются функции

$$-(4\pi\|x\|)^{-1} exp(\pm i\omega\|x\|),$$

где выбор знака в правой части зависит от выбора условий излучения на бесконечности. Так, если решение должно удовлетворять условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности [21], то

$$\psi_\omega(x) = -\frac{e^{i\omega\|x\|}}{4\pi\|x\|}.$$

Добавляя к решению (37) решение однородного уравнения:

$$\nabla_{\omega}^{\pm}\hat{\mathbf{K}}(x) = \mathbf{0}, \tag{39}$$

получим общее решение уравнения для комплексных амплитуд (36).

Формулу (37) можно использовать для любых обобщенных функций, допускающих свертку с $\psi_\omega(x)$. Для регулярных $\mathbf{G}(x)$ ее можно записать в интегральном виде.

Теорема 7.1. *Если при* $x \to \infty$ $\|\mathbf{G}(x)\| = O(\|x\|^{-(2+\varepsilon)})$, $\varepsilon > 0$, *то общее решение уравнения* (36) *имеет вид*:

$$-4i\pi\hat{\mathbf{K}}(x) = div \int\limits_{R^3} G(y)\frac{e^{i\omega r}}{r}\, dV(y) - grad \int\limits_{R^3} g(y)\frac{e^{i\omega r}}{r}\, dV(y) - rot \int\limits_{R^3} G(y)\frac{e^{i\omega r}}{r}\, dV(y) + \mathbf{K}_0(x).$$

Если $\mathbf{G}(x)$ *— дифференцируемый бикватернион и его производные удовлетворяют условию:* $\|\partial_j \mathbf{G}(x)\| = O(\|x\|^{-(2+\varepsilon)})$ $(j = \tau, x_1, x_2, x_3)$, *то*

$$-4i\pi\mathbf{K}(x) = \int\limits_{R^3} \{divG(y) - grad\, g(y) - rot\, G(y)\}\frac{exp(i\omega r)}{r}\, dV(y) + \mathbf{K}_0(x).$$

Здесь $\mathbf{K}_0(x)$ *– решение однородного уравнения* (39), $r = \|x - y\|$.

Доказательство следует из представления свертки регулярных функций. Сходимость интегралов следует из асимптотических свойств подынтегральных функций. Введение производной под знак интегралов возможно при заданных условиях на правую часть.

В этом случае решение является классическим в силу леммы Дюбуа-Реймона для регулярных обобщенных функций [21].

Теорема 7.2. *Решение однородного уравнения* (39) *представимо в виде* :

$$\mathbf{K_0} = \nabla_{\omega}^{\mp}\{\psi_\omega^0 * \mathbf{C}\},$$

где ψ_ω^0 *— решение уравнения Гельмгольца*:$(\triangle + \omega^2)\psi_\omega^0 = 0$,

$$\psi_\omega^0(x) = \int\limits_{\|\mathbf{e}\|=1} p(\mathbf{e})\, e^{-i\omega(\mathbf{e},x)} dS(\mathbf{e}), \tag{40}$$

$p(\mathbf{e})$ *– ∀ функция, интегрируемая на единичной сфере,* $\mathbf{C}(x)$ *– ∀ любой бикватернион, допускающий эту свертку.*

Доказательство. Легко видеть,

$$\nabla_{\omega}^{\pm}\mathbf{K_0} = \nabla_{\omega}^{\pm}\nabla_{\omega}^{\mp}\{\mathbf{C} * \psi_\omega^0(\omega, x)\} = (\triangle + \omega^2)\{\mathbf{C} * \psi_\omega^0\} = \mathbf{C} * (\triangle + \omega^2)\psi_\omega^0 = 0.$$

Определим $\psi_\omega^0(x)$. Используя преобразования Фурье по x из уравнения Гельмгольца получим :

$$(\|\xi\|^2 - \omega^2)\mathrm{F}[\psi_\omega^0(x)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F}[\psi_\omega^0(x)] = g(\xi)\delta\left(\|\xi\|^2 - \omega^2\right), \forall g(\xi) \Rightarrow$$

$$\psi_\omega^0(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\|\xi\|=\omega} g(\xi)\, e^{-i(\xi,x)} dS(\xi) = \frac{\omega^2}{(2\pi)^3} \int\limits_{\|\mathbf{e}\|=1} g(\omega\mathbf{e})\, e^{-i\omega(\mathbf{e},x)} dS(\mathbf{e}).$$

Откуда, в силу произвольности $g(\xi)$, получим (40).

Решения уравнения Гельмгольца хорошо изучены в теории специальных (бесселевых) функций, которые можно получить из представления (40) для определенных видов $p(\mathbf{e})$.

8 Градиентные бикватернионные уравнения и потенциалы векторных полей

В случае, когда правая часть биволнового уравнения (20) не зависит от времени, решение тоже, тогда уравнение преобразуется к виду *градиентного*:

$$\nabla\hat{\mathbf{K}}(x) = -div\,K(x) + grad\,k(x) + rot\,K(x) = \hat{\mathbf{G}}(x). \tag{41}$$

Поскольку $\nabla \circ \nabla = -\triangle$, отсюда имеем

$$\triangle\hat{\mathbf{K}}(x) = -\bigtriangledown\hat{\mathbf{G}}(x). \tag{42}$$

Откуда, с точностью до решения однородного уравнения, получим решение уравнения (42):

$$\hat{\mathbf{K}}(x) = -\nabla\{\psi_0 * \hat{\mathbf{G}}(x)\}, \tag{43}$$

где $\psi_0(x)$ — фундаментальное решения уравнения Лапласа:

$$\Delta\psi_0(x) = \delta(x)$$

В частности, для затухающих на бесконечности решений :

$$\psi_0(x) = -\frac{1}{4\pi\|x\|}. \tag{44}$$

Формулу (43) можно использовать для любых обобщенных функций, допускающих свертку с $\psi_0(x)$.

Исходя из представления свертки, для регулярных $\hat{\mathbf{G}}(x)$ легко доказывается

Теорема 8.1. *Если при* $x \to \infty$ $\|\mathbf{G}(x)\| = O(\|x\|^{-(2+\varepsilon)})$, $\varepsilon > 0$, *то решение градиентного уравнения* (40) *имеет вид*:

$$4\pi\hat{\mathbf{K}}(x) = div\int\limits_{R^3}\frac{G(y)}{r}\,dV(y) - grad\int\limits_{R^3}\frac{g(y)}{r}\,dV(y) - rot\int\limits_{R^3}\frac{G(y)}{r}\,dV(y)$$

(*с точностью до решения однородного уравнения*). *Если* $\mathbf{G}(x)$ *— дифференцируемый бикватернион и на бесконечности* $\|\partial_j\mathbf{G}(x)\| = O(\|x\|^{-(2+\varepsilon)})$ $(j = \tau, x_1, x_2, x_3)$, *то*

$$4\pi\mathbf{K}(x) = \int\limits_{R^3}(div\,G(y) - grad\,g(y) - rot\,G(y))\,\frac{dV(y)}{r}.$$

Как приложение этих теорем рассмотрим задачи определения потенциалов векторных полей.

Потенциалы статических векторных полей. Легко видеть, что биградиентное уравнение (41) совпадает с уравнениями теории поля, когда требуется определить скалярный $\varphi(x)$ и векторный $\Psi(x)$ потенциалы векторного поля $V(x)$:

$$V(x) = grad\,\varphi(x) + rot\,\Psi(x),$$

с калибровкой :

$$div\,\Psi(x) = f(x)$$

Тогда, полагая $\mathbf{G}(x) = -f(x) + V(x)$, используя теоремы 8.1 или 8.2, получим

$$\varphi(x) + \Psi(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{R^3}\frac{div\,V(y) + grad\,f(y) - rot\,V(y)}{\|x-y\|}dy_1dy_2dy_3.$$

Так при гауссовой калибровке ($div\,\Psi(x) = 0$) имеем

$$\varphi(x) + \Psi(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{R^3} \frac{div\,V(y) - rot\,V(y)}{\|x-y\|} dy_1 dy_2 dy_3.$$

Потенциалы динамических векторных полей. Определить скалярный и векторный потенциалы $\mathbf{F} = f - iF$ векторного поля $V(\tau, x)$ с лоренцевой калибровкой :

$$\partial_\tau f = \, div\, F$$

В этом случае имеем биволновое уравнение

$$\nabla^{+}\mathbf{F} = -i\partial_\tau F + igrad\, f + \, rot\, F = V(\tau, x).$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям излучения, дает обобщенная формула Кирхгофа:

$$-4\pi\hat{\mathbf{F}}(\tau, x) =$$

$$= \nabla^{\mp} \left\{ \int\limits_{\|y-x\|\le\tau} \frac{\mathbf{V}(\tau - \|y-x\|, y)}{\|x-y\|} dy_1 dy_2 dy_3 + \frac{1}{\tau} \int\limits_{\|y-x\|=\tau} \mathbf{F_0}(y) dS(y) \right\} + \frac{1}{\tau} \int\limits_{\|y-x\|=\tau} \mathbf{V}(0, y) dS(y).$$

Бипотенциал определяется неоднозначно, с точностью до начального условия $\mathbf{F_0}(x)$.

9 Биградиенты и матрицы Дирака

Биволновое уравнение (20) можно записать в матричном виде:

$$\sum_{j=0}^{3} D^{\pm}_{m\,j} b_j = g_m, \quad m, j = 0, 1, 2, 3, \tag{44}$$

где $b_0 = b,\ g_0 = g,\ b_j = B_j,\ g_j = G_j,\ j = 1, 2, 3;$ а $D^{\pm}_{m\,j}$ — компоненты матриц $D^{\pm}$ (соответственно знаку), которые имеют вид:

$$D^{+} = D = \left\{ \begin{array}{cccc} \partial_\tau & -i\partial_1 & -i\partial_2 & -i\partial_3 \\ i\partial_1 & \partial_\tau & -i\partial_3 & i\partial_2 \\ i\partial_2 & i\partial_3 & \partial_\tau & -i\partial_1 \\ i\partial_3 & -i\partial_2 & i\partial_1 & \partial_\tau \end{array} \right\}, \quad D^{-} = \bar{D} = \left\{ \begin{array}{cccc} \partial_\tau & i\partial_1 & i\partial_2 & i\partial_3 \\ -i\partial_1 & \partial_\tau & i\partial_3 & -i\partial_2 \\ -i\partial_2 & -i\partial_3 & \partial_\tau & i\partial_1 \\ -i\partial_3 & i\partial_2 & -i\partial_1 & \partial_\tau \end{array} \right\} \tag{45}$$

Легко проверить, что их произведение (суперпозиция операторов) удовлетворяют соотношению:

$$\sum_{j=0}^{3} D_{m\,j} D_{jl} = \delta_{m\,l} \Box, \quad j, m, l = 0, 1, 2, 3. \tag{46}$$

Покажем, что матрицы (45) — это дифференциальные матричные операторы Дирака, которые именно таким свойством обладают [18]. Для этого представим их в матричном виде:

$$D^{+} = \sum_{j=0}^{3} D^{j} \partial_j, \tag{47}$$

где, как следует из (45), матрицы D^j имеют следующие компоненты:

$$D^0 = I, \quad D^1 = \begin{Bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{Bmatrix}, \quad D^2 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \; D^3 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Здесь I – единичная матрица. Как видим, это четырехмерные унитарные матрицы Дирака, составленные из двухмерных матриц Паули:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} \pm i & 0 \\ 0 & \mp i \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 0 & \pm i \\ \pm i & 0 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 0 & \pm i \\ \mp i & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матричный оператор Дирака $D^{\pm}$ – это *матричное представление биградиента* $\nabla^{\pm}$.

10 Бикватернионная форма уравнения Дирака и КГФШ-уравнение

Рассмотрим бикватернионное уравнение вида:

$$\mathbf{D}_m^{\pm}\mathbf{B} \equiv \left(\nabla^{\pm} + m\right) \circ \mathbf{B} = \mathbf{F}, \quad m \in \mathcal{C}, \tag{48}$$

При $m = 0$ уравнение становится биволновым.

В силу матричных свойств биградиента (46), (47), и биградиентного представления уравнений Максвелла, это уравнение можно назвать *обобщенным уравнением Максвелла-Дирака* в бикватернионной форме (УМД), а дифференциальные операторы:

$$\mathbf{D}_m^{+} = \nabla^{+} + m, \quad \mathbf{D}_m^{-} = \nabla^{-} + m$$

являются *биградиентным представлением* матричных операторов Дирака: $D^{\pm} + mI$.

Простым вычислением легко показать, что их суперпозиция коммутативна и обладает следующим полезным свойством.

$$\mathbf{D}_m^{+} \circ \mathbf{D}_m^{-} = \mathbf{D}_m^{-} \circ \mathbf{D}_m^{+} = \Box + m^2 + 2m\partial_\tau. \tag{49}$$

При чисто мнимом $m = i\rho$

$$\mathbf{D}_{i\rho}^{+} \circ \mathbf{D}_{i\rho}^{-} = \Box - \rho^2 + 2i\rho\partial_\tau.$$

Здесь в правой части, помимо оператора Клейна-Гордона-Фока ($\Box - \rho^2$), содержится первая производная по времени с комплексной единицей, подобно мнимому члену в операторе Шредингера, поэтому уравнение вида :

$$\Box u + 2m\partial_\tau u + m^2 u = f(\tau, x) \tag{50}$$

назовем *уравнением Клейна-Гордона-Фока-Шредингера* (*КГФШ-уравнением*).

Интересно, что появление этого дополнительного члена значительно упрощает вид фундаментального решения, в сравнении с фундаментальным решением уравнения Клейна-Гордона-Фока.

Теорема 10.1. *Решение УМД* (48) *имеет вид*:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{D}_m^{\mp}\left(\psi * \mathbf{F}\right) = \mathbf{B}^0 + \mathbf{\Psi} * \mathbf{F}, \tag{51}$$

где $\mathbf{B}^0(\tau, x)$ *– решение уравнения Дирака*:

$$\mathbf{D}_m^{\pm}\mathbf{B}^0 = 0, \tag{52}$$

$\mathbf{\Psi}$ *–фундаментальное решение УМД*:

$$\mathbf{\Psi}(\tau, x) = \partial_\tau\psi + m\psi \pm i\, grad\, \psi,$$

$\psi(\tau, x)$*– фундаментальное решение КГФШ-уравнения.*

Доказательство: В силу линейности уравнения, достаточно доказать утверждение для второго слагаемого в формуле (51). Подставив его в (48), используя свойство дифференцирования сверток и δ-функции, получим требуемое:

$$\mathbf{D}_m^{\pm}\mathbf{D}_m^{\mp}\ (\psi *\, \mathbf{F}) = \mathbf{F} * \left(\Box\psi + 2m\partial_\tau\psi + m^2\psi\right) = \mathbf{F} * \delta(\tau)\delta(x) = \mathbf{F}.$$

Очевидно, в силу линейности, любое решение уравнения (48) можно представить в виде (51).

Из теоремы 10.1 легко получим следствие для мнимых $m = i\rho$, которое сформулируем тоже в виде теоремы.

Теорема 10.2. *При* $m = i\rho$, $\mathrm{Im}\rho = 0$, *решение УМД вида* :

$$\left(\nabla^{\pm} + i\rho\right)\, \mathbf{B} = \mathbf{F} \tag{53}$$

можно представить в форме:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \left(\nabla^{\mp} + i\rho\right) \circ (\mathbf{F} *\ \psi)\,, \tag{54}$$

где $\psi(\tau, x)$*– решение уравнения*:

$$\Box\psi - \rho^2\psi + 2i\rho\, \partial_\tau\psi = \delta(\tau)\delta(x), \tag{55}$$

$\mathbf{B}_0(\tau, x)$ *– решение уравнения Дирака*:

$$\left(\nabla^{\pm} + i\rho\right)\, \mathbf{B}_0 = 0. \tag{56}$$

Скалярные потенциалы. Рассмотрим обобщенные решения КГФШ-уравнения (50) для разных m. Их можно представить в виде:

$$u = f * \psi + u_0,$$

где ψ – фундаментальное решение КГФШ — уравнения (55), $u_0(\tau, x)$ — решение однородного уравнения (при $f = 0$).

Теорема 10.3 *Фундаментальные решения КГФШ — уравнения имеют вид*:

$$\psi = \frac{1}{4\pi\, \|x\|}\left(a\, H(\tau)e^{-m\|x\|}\delta(\tau - \|x\|) + (1-a)H(-\tau)\delta(\tau + \|x\|)e^{m\|x\|}\right) + \psi_0, \quad \forall a \in \mathcal{C},$$

где $\delta(\tau \pm \|x\|)$ *— простой слой на световом конусе* $\|x\| = |\tau|$; $\psi_0(\tau, x)$ *— решение однородного КГФШ-уравнения, которое существует только при чисто мнимом* $m = i\rho$ *и может быть представлено в виде:*

$$\psi_0(\tau, x) = e^{-i\rho\tau}\int\limits_{R^3} \phi(\xi)\exp\left(i\left((\xi, x) \pm \|\xi\|\, \tau\right)\right) dV(\xi), \quad \forall\phi(\xi) \in L_1(R^3). \tag{57}$$

Доказательство. Из уравнения для фундаментального решения:

$$\Box\psi + m^2\psi + 2m\partial_\tau\psi = \delta(\tau)\delta(x), \tag{58}$$

следует, что неполное преобразование Фурье (ПФ) по τ функции $\psi(\tau, x)$ является фундаментальным решением уравнения Гельмгольца:

$$\left\{\Delta - k^2\right\} F_\tau[\psi] + \delta(x) = 0, \quad k = i\omega - m.$$

С точностью до решения однородного уравнения, его можно представить в виде:

$$F_\tau[\psi] = \frac{1}{4\pi\|x\|}\left(ae^{-k\|x\|} + (1-a)e^{k\|x\|}\right), \quad \forall a \in \mathcal{C}.$$

Следовательно,

$$\psi = \frac{1}{4\pi\|x\|}\left(ae^{(i\omega-m)\|x\|} + (1-a)e^{-(i\omega-m)\|x\|}\right), \quad \forall a \in \mathcal{C}.$$

Отсюда, используя свойства ПФ, при обратном преобразовании по ω получим формулу теоремы, где носитель по времени первого слагаемого $\tau > 0$, а второго $\tau < 0$. Это расширяющиеся и сужающиеся со временем в R^3 с единичной скоростью сферы радиуса $|\tau|$. Ч.т.д.

Если $m = i\rho$ — чисто мнимое число и носитель решения $\tau > 0$, то

$$\psi = \frac{e^{-i\rho\|x\|}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|). \tag{59}$$

Здесь плотностью простого слоя на световом конусе является фундаментальное решение уравнения Гельмгольца с волновым числом ρ .

Решения однородного КГФШ-уравнения. Построим решения уравнения:

$$\Box u + m^2 u + 2m\partial_\tau u = 0. \tag{60}$$

В пространстве ПФ из (60) имеем:

$$\left(\|\xi\|^2 - \omega^2 + m^2 - 2im\omega\right) F_{\omega,\xi}\left[u(\tau,x)\right] = \left(\|\xi\|^2 - (\omega + im)^2\right) u^*(\omega,\xi) = 0, \tag{61}$$

где $u^*(\omega,\xi) = F_{\omega,\xi}\left[u(\tau,x)\right]$ – полное ПФ по τ, x.

Если $\operatorname{Re} m \neq 0$, тогда $\|\xi\|^2 - (\omega + im)^2 \neq 0$ при $\forall\xi \in R^3$. В этом случае это уравнение имеет только тривиальное нулевое решение: $u^* = 0$. Однако при чисто мнимом $m = i\rho$ уравнение имеет бесчисленное множество сингулярных решений вида:

$$u^*(\omega,\xi) = \phi(\omega,\xi)\delta\left(\|\xi\|^2 - (\omega - \rho)^2\right), \tag{62}$$

где $\phi(\omega,\xi)$ — плотность простого слоя — произвольно заданная интегрируемая на конусах $\|\xi\| = |\omega - \rho|$ функция. Вычисляя оригинал, получим:

$$u(\tau,x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{\|\xi\|=|\omega-\rho|} \phi(\omega,\xi)\exp\left(-i(\xi,x) - i\omega\tau\right) dS(\xi) =$$

$$= \frac{e^{-i\rho\tau}}{(2\pi)^4}\int_{R^3}\left\{\phi(\rho + \|\xi\|, \xi)e^{-i\|\xi\|\tau} - \phi(\rho - \|\xi\|,\ \xi)e^{i\|\xi\|\tau}\right\}\exp\left(-i(\xi,x)\right) dV(\xi).$$

Здесь $dS(\xi)$ — дифференциал площади поверхности сферы радиуса, указанного под знаком соответствующего интеграла, $dV(\xi) = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$. Отсюда, в силу произвольности ϕ, следует формула (57) теоремы.

11 Обобщенные решения уравнения Дирака. Бикватернионное представление спинорных полей

Рассмотрим бикватернионные решения уравнения Дирака:

$$\left(\nabla^{\pm} + i\rho\right)\mathbf{Sp} = 0, \qquad \mathrm{Re}\rho = 0. \tag{63}$$

В квантовой механике их называют *спинорами* [18,28].

Теорема 11.1. *Ненулевые решения уравнения Дирака* (63) *можно представить в виде свертки*:

$$\mathbf{Sp} = \mathbf{D}^{\mp}_{i\rho}\left(\psi_0 * \mathbf{C}(\tau, x)\right), \tag{64}$$

где $\mathbf{C}$ *– произвольный бикватернион, а* ψ_0 *– решение однородного КГФШ-уравнения, либо представимо в виде суммы решений подобного вида.*

Доказательство. Подставляя (64) в (63), получим (соответственно верхнему или нижнему знакам):

$$\mathbf{D}^{\pm}_m\mathbf{Sp} = \mathbf{D}^{\pm}_m\mathbf{D}^{\mp}_m\left(\psi_0 * \mathbf{C}\right) = \left(\Box\psi_0 + 2m\partial_\tau\psi_0 + m^2\psi_0\right) * \mathbf{C} = 0, \quad m = i\rho.$$

Обратно, если (64) – решение (63), тогда:

$$\left(\Box + 2m\partial_\tau + m^2\right)\mathbf{Sp} = \mathbf{D}^{\mp}_m\mathbf{D}^{\pm}_m\mathbf{Sp} = \mathbf{D}^{\mp}_m 0 = 0.$$

Т.е. и скалярная часть и компоненты векторной части $\mathbf{Sp}$ являются решением однородного КГФШ-уравнения. Следовательно, $\mathbf{Sp}$ можно представить в виде суммы решений вида (64).

В частном случае, когда $\mathbf{C} = \delta(\tau, x)$, получим *спинор скалярного* ψ_0*-поля* :

$$\mathbf{\Psi}^{\mp}_0 = \left(\nabla^{\mp} + m\right)\psi_0 = m\psi_0 + \partial_\tau\psi_0 \mp i\,\mathrm{grad}\psi_0,$$

Используя его, *спинорное* $\mathbf{C}$*-поле*, порождаемое потенциалом ψ_0, можно представить в виде:

$$\mathbf{Sp}^{\pm} = \mathbf{\Psi}^{\pm}_0 * \mathbf{C}(\tau, x), \tag{65}$$

где $\mathbf{C}(\tau, x)$ – бикватернион, допускающий эту свертку. Последнее зависит от свойств скалярного потенциала ψ_0, вид которого дает теорема 10.2.

Скалярные гармонические потенциалы. Рассмотрим решение однородного КГФШ-уравнения (57), где под знаком интеграла стоят две плоские гармонические волны:

$$\varphi^{\pm}_{\xi}(\tau, x) = \exp\left(i\left((\xi, x) - \rho\tau \pm \|\xi\|\,\tau\right)\right),$$

которые сами являются его решениями. Волновой вектор ξ определяет направление движения волны, длина которой равна $\lambda = 2\pi/\,\|\xi\|$, частота $\omega = |\rho \pm \|\xi\||$, период $T = 2\pi/\,|\rho \pm \|\xi\||$.

В зависимости от знака, одна из них сверхсветовая $(V > 1)$, а другая - досветовая $(V < 1)$, т.к. фазовая скорость движения волны $V = 1 \pm \dfrac{\rho}{\|\xi\|}$.

При $\|\xi\| \to \infty$ частота $\omega \to \infty$, а $V \to 1 \pm 0$. При $\|\xi\| \to |\rho|$ скорости $V \to 1; 0$, а частоты соответственно $\omega \to \dfrac{\pi}{\rho};\ \infty$.

Спиноры, порождаемые этими волнами, имеют вид:

$$\left(\nabla^{\mp} + i\rho\right)\varphi^{\pm}_{\xi}(\tau, x) = \pm\left(i\,\|\xi\| + \xi\right)\varphi^{\pm}_{\xi}.$$

Определение. Назовем *элементарными гармоническими спинорами* бикватернионы

$$\mathbf{Sp}_\xi^{\pm} = \frac{\exp\left(i\left((\xi,x)-\rho\tau \pm \|\xi\|\,\tau\right)\right)}{\sqrt{2}}\left(i+\frac{\xi}{\|\xi\|}\right), \quad \left\|\mathbf{Sp}_\xi^{\pm}\right\| = 1, \quad \left\langle\left\langle \mathbf{Sp}_\xi^{\pm}\right\rangle\right\rangle = 0;$$

Энергия-импульс $\mathbf{Sp}_\xi^{\pm}$ равны :

$$\mathbf{\Xi} = \mathbf{Sp}_\xi^{\pm}\circ(\mathbf{Sp}_\xi^{\pm})^* = 1 - i\frac{\xi}{\|\xi\|}, \quad \|\mathbf{\Xi}\| = 2, \quad \langle\langle\mathbf{\Xi}\rangle\rangle = 0.$$

Гармонические спинорные $\mathbf{C}$*-поля* — это спиноры вида:

$$\mathbf{Sp} = \mathbf{C}(\tau,x) * \mathbf{Sp}_\xi^{\pm}(\tau,x). \tag{66}$$

Используя их и формулу (64), получим бикватернионное представление спинорного $\boldsymbol{C}$-поля через $\mathbf{Sp}_\xi^{\pm}$.

Теорема 11.2. *Спинорное* $\boldsymbol{C}$*-поле можно представить в виде* (66), *либо в виде свертки*:

$$\mathbf{Sp} = \mathbf{C}(\tau,x) * \int_{R^3}\phi(\xi)\mathbf{Sp}_\xi^{\pm}(\tau,x)dV(\xi),$$

где $\phi(\xi)\in L_1(R^3)$, *либо в виде линейной комбинации подобных спинорных полей.*

12 Стационарные и статические решения уравнения Дирака

Рассмотрим класс решений УДМ вида $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x)e^{-i\omega\tau}$, которые описывают гармонические колебания с частотой ω. Предполагается, что правая часть УДМ (48) имеет ту же структуру. Тогда для комплексных амплитуд получим $(\omega+\rho)$-градиентное уравнение :

$$\nabla^{\pm}_{(\omega+\rho)}\mathbf{B}(x) = \mathbf{F}(x). \tag{67}$$

Из теоремы 7.2 следует теорема 12.1.

Теорема 12.1. *Решения* $(\omega+\rho)$*-градиентного уравнения* (67) *можно представить в виде суммы бикватернионов*:

$$\mathbf{B} = \nabla^{\mp}_{\omega+\rho}(\chi*\,\mathbf{F}) + \mathbf{Sp}^{(\omega+\rho)},$$

где

$$\chi = -\frac{ae^{ik\|x\|}}{4\pi\,\|x\|} - \frac{(1-a)e^{-ik\|x\|}}{4\pi\,\|x\|}, \quad k = |\omega+\rho| \neq 0, \quad \forall a\in\mathcal{C},$$

$$\mathbf{Sp}^{(\omega+\rho)} = \nabla^{\mp}_{\omega+\rho}\left(\chi_0 * \mathbf{C}(x)\right),$$

$\chi_0(x)$– *решение уравнения Гельмгольца с волновым числом* k:

$$\chi_0(x) = \int_{\|\mathbf{e}\|=1} p(\mathbf{e})\,e^{-ik(\mathbf{e},x)}dS(\mathbf{e}),$$

$p(\mathbf{e})-\forall$ *функция, интегрируемая на единичной сфере,* $\mathbf{C}(x)-\forall$ *бикватернион, допускающий эту свертку.*

Элементарные гармонические $(\omega+\rho)$*-спиноры* определим как спиноры вида:

$$\mathbf{\Psi}_0^{(\omega+\rho)}(x,\mathbf{e}) = \frac{1}{k\sqrt{2}}\left(\nabla+\omega+\rho\right)e^{-ik(\mathbf{e},x)} = \frac{1}{k\sqrt{2}}\left(\omega+\rho-ik\mathbf{e}\right)e^{-ik(\mathbf{e},x)} \tag{68}$$

Их норма и псевдонорма соответственно равны

$$\left\|\mathbf{\Psi}_0^{\omega+\rho}\right\| = 1, \quad \left\langle\left\langle\mathbf{\Psi}_0^{\omega+\rho}\right\rangle\right\rangle = 0. \tag{69}$$

Здесь $\mathbf{e}$ — направление ω-спинора, $k = |\omega+\rho|$ — его волновое число.

Энергия-импульс спинора $\mathbf{\Psi}_0^{(\omega+\rho)}$ равны

$$\mathbf{\Xi} = \mathbf{\Psi}_0^{(\omega+\rho)} \circ \{\mathbf{\Psi}_0^{(\omega+\rho)}\}^* = 1 - i\,\mathbf{e}\,sign(\omega+\rho)$$

Через них также можно представить комплексные амплитуды $(\omega+\rho)$-спиноров.

Теорема 12.2. *$(\omega+\rho)$-спиноры можно представить в виде свертки*:

$$\mathbf{Sp}^{\omega+\rho} = \mathbf{G}(x) * \mathbf{\Psi}_0^{\omega+\rho}(x, \mathbf{e})$$

либо

$$\mathbf{Sp}^{\omega+\rho} = \mathbf{G}(x) * \int\limits_{\|\mathbf{e}\|=1} p(\mathbf{e})\mathbf{\Psi}_0^{\omega+\rho}(x, \mathbf{e})dS(\mathbf{e}),$$

при $\forall p(\mathbf{e}) \in L_1(Sp_{\mathbf{e}}), Sp_{\mathbf{e}} = \{\mathbf{e} \in R^3 : \|\mathbf{e}\| = 1\}$, *либо в виде спиноров такого вида.*

Статические спиноры получим при $\omega = 0$. Формулы теоремы 12.2 при этом сохраняют вид, т.к. $k = |\rho| \neq 0$.

Заключение

В начале было отмечено, что кватернионным и бикватернионным представлением уравнений Максвелла и Дирака и анализом их свойств занимается ряд исследователей. Для каждого из них характерна собственная терминология, система обозначений как самих кватернионов и бикватернионов, так и вводимых дифференциальных операторов.

Здесь используется скалярно-векторная запись бикватернионов, предложенная еще Гамильтоном [1, 28] для кватернионов, которая очень наглядна, удивительно приспособлена для записи физических величин и уравнений и очень проста при вычислениях. Автор старался, по возможности, использовать общепринятые в математической физике обозначения и терминологию, либо этимологически обусловленную.

Бикватернионная форма уравнений, как видим, позволяет переходить от решения систем из 8-ми дифференциальных уравнений первого порядка к решению одного дифференциального, но бикватернионного уравнения первого порядка, что значительно упрощает их решение и решение краевых задач. В качестве иллюстрации см. [29, 30], где построены обобщенные решения стационарных и нестационарных краевых задач для системы уравнений Максвелла. Эти результаты можно значительно проще получить, используя бикватернионную форму этих уравнений. Заметим, что это также значительно упрощает решение краевых задач на ЭВМ.

Заметим, что решения уравнений Максвелла-Дирака здесь получены в классе обобщенных функций, что позволяет строить решения как для классических бикватернионных функций, так и при наличии сингулярных источников в его правой части, которые можно использовать при построении бикватернионной теории элементарных частиц. При вычислении спинорных полей, используя свойства дифференцирования свертки, производные можно перебрасывать на компоненты $\boldsymbol{C}$-поля, когда это удобно, которые тоже могут быть сингулярными обобщенными функциями.

Как здесь показано, восстановление скалярного и векторного потенциала векторного поля также приводится к бикватернионным дифференциальным уравнениям, которые легко решаются. Группу преобразований Пуанкаре, Лоренца и ортогональных преобразований также легко вычислять, используя их бикватернионное представление. В матричном представлении это довольно трудоемкая процедура.

Биградиенты, биволновые уравнения и их решения автор использовал ранее для построения одной модели электро-гравимагнитного полей и их взаимодействий [15, 16]. Можно найти много других полезных приложений дифференциальной алгебры бикватернионов, что и предлагается заинтересованному читателю.

Литература

[1] Hamilton W.R. On a new Species of Imaginary Quantities connected with a theory of Quaternions // *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 2, 1843, pp. 424 – 434.

[2] Казанова Г. Векторная алгебра. М., Наука, 1979, 120 с.

[3] Стражев В.И. Уравнения Максвелла с магнитными зарядами в кватернионной форме // *Изв. вузов. Физика*, № 8, 1977, с. 45.

[4] Edmonds Jr. J.D. Восемь уравнений Максвелла как одно кватернионное // *Amer. J. Phys.*, 46, 1978, №4, с. 430.

[5] Шпилькер Г.Л. Гиперкомплексные решения уравнений Максвелла // *ДАН СССР*, 272, 1983, №6, с. 1359 – 1363.

[6] Acevedo M., Lopez-Bonilla J., Sanchez-Meraz M. Quaternions, Maxwell Equations and Lorentz Transformations // *Apeiron*, 12, 2005, №4, с. 371.

[7] Adler S.L. Quaternionic quantum mechanics and quantum fields. New York, Oxford University Press,1995.

[8] Rotelli P. The Dirac equation on the quaternionic field // *Mod. Phys. Lett. A*, 4, 1989, pp. 933 – 940.

[9] Davies A.J. Quaternionic Dirac equation // *Phys. Rev. D*, 41, 1990, pp. 2628 – 2630.

[10] Finkelstein D., Jauch J.M., Schiminovich S., Speiser D. Foundations of quaternion quantum mechanics // *J. Math. Phys.*, 3, 1992, pp. 207 – 220.

[11] De Leo S., Rodrigues Jr. W.A. Quaternionic electron theory: geometry, algebra and Dirac's spinors // *Int. J. Theor. Phys.*, 37, 1998, pp. 1707 – 1720.

[12] Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Механика космического полета. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М., Наука, 1973, 320 с.

[13] Kassandrov V.V. Biquaternion electroynamics and Weyl-Cartan geometry of space-time // *Gravitation and cosmology*, 1, 1995, 3, pp. 216 – 222.

[14] Ефремов А.П. Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(1), 2004, с. 111 – 127.

[15] Алексеева Л.А. Уравнения взаимодействия А-полей и законы Ньютона // *Известия Нац.Акад. Наук Респ.Казахстан, Серия физико-математическая*, №3, 2004, с. 45 – 53.

[16] Алексеева Л.А. Полевые аналоги законов Ньютона для одной модели электро-гравимагнитного поля // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 6, 2009, №1, с. 122 – 134.

[17] Rodrigues W.A. Jr., Capelas de Oliviera E. Dirac and Maxwell equations in the Clifford and spin Clifford bundles // *International Journal of Theoretical Physics*, 29, 1990, с. 397 – 412.

[18] Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. М., Наука, 1987, 616 с.

[19] Марчук Н.Г. Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда. Москва-Ижевск, 2009, 362 с.

[20] Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов. 1. Преобразования Лоренца // *Математический журнал*, 10, 2010, №1, с. 33 – 41.

[21] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М., Наука, 1976, 512 с.

[22] Ахиезер А.И., Берестецкий Д.В. Квантовая электродинамика. М., Наука, 1981. 320 с.

[23] Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов. 2.Обобщенные решения биволновых уравнений // *Математический журнал*, 10, 2010, №4, с. 5 – 13.

[24] Алексеева Л.А. Гамильтонова форма уравнения Максвелла и ее обобщенные решения // *Дифференциальные уравнения*, 39, 2003, №6, с. 769 – 776.

[25] Алексеева Л.А. Кватернионы гамильтоновой формы уравнений Максвелла // *Математический журнал*, 3, 2003, №4, с. 20 – 24.

[26] Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов. 3. Уравнение Дирака и его обобщенные решения // *Математический журнал*, 11, 2011, №1, с. 30 – 38.

[27] Тамм И.Е. Основы теории электричества. М., Наука, 1989.

[28] Математическая энциклопедия. М., Наука, 2, 1982.

[29] Алексеева Л.А., Саутбеков С.С. Метод обобщенных функций при решении стационарных краевых задач для уравнений Максвелла // *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 40, 2000, №4, с. 611 – 622.

[30] Алексеева Л.А. Обобщенные решения нестационарных краевых задач для уравнений Максвелла // *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 42, 2002, №1, с. 76 – 88.

THE DIFFERENTIAL ALGEBRA OF BIQUATERNIONS IN EQUATIONS OF MATHEMATICAL AND THEORETICAL PHYSICS

L.A. Alexeyeva

Institute of mathematics and mathematical modelling, Almaty, Kazakhstan

alexeeva@math.kz

The functional space of biquaternions is considered on Minkovskiy space. Here the scalar-vector biquaternions representation is used which was offered by W. Hamilton for quaternions. With introduction of differential operator — a mutual complex gradient (*bigradients*), which generalize the notion of a gradient on biquaternions space, biquaternionic wave (*biwave*) equations are considered, their invariance for group of the Lorence-Puancare transformations is proved and their generalized solutions have been obtained. Biquaternionic form of generalized Maxwell-Dirac equation is constructed and its decisions are researched on base of the differential biquaternions algebra. Its generalized decisions are built with use of scalar potential. The new equation for these potential are constructed which unites known equations of quantum mechanics (*Klein-Gordon and Schrödinger Eq.*). The nonstationary, steady-state and harmonic on time scalar fields and generated by them the spinors and spinors fields in biquaternionic form are constructed.

Key Words: algebra, biquaternion, bigradient, biwave equation, generalized solution, shock waves, Lorenz transformation, Maxwell equation, Dirac equation, spinor, scalar potential, stationary vibration.