ВОЗМОЖНА ЛИ ФИНСЛЕРОВА ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ОПТИКИ

Е.М. Овсиюк[1], В.М. Редьков[2]

[1] *Мозырский государственный педагогический университет, Мозырь, Белоруссия*
[2] *Институт физики НАН Беларуси, Минск, Белоруссия*

e.ovsiyuk@mail.ru, v.redkov@dragon.bas-net.by

В настоящей работе дается обзор некоторых возможностей применения матричного исчисления для анализа вопросов поляризационной оптики. Есть основания предполагать, что свою роль здесь могут сыграть и методы финслеровой геометрии. Поскольку матрицы Мюллера – это вещественные матрицы, действующие на вещественный 4-мерный вектор Стокса, то для исследования множества всех возможных матриц Мюллера можно использовать параметризацию 4-мерных матриц, получаемую на основе применения матриц Дирака. Закон умножения для элементов исходной группы имеет громоздкий вид, но он вполне поддается аналитическому исследованию. Найден явный вид определителя произвольной матрицы в такой параметризации, который задает естественный классифицирующий инвариант во множестве матриц. Эта параметризация применена для описания возможных поляризационных матриц Мюллера, включая и вырожденные случаи матриц с нулевым определителем, описываемых в рамках структуры полугрупп. Оказалось, что накладывая линейные связи на 16 параметров, совместимые с групповым законом умножения, можно получать преимущественно классы вырожденных матриц со структурой полугрупп. Получена полная классификация таких полугрупп ранга 1, 2, 3.

Ключевые слова: поляризационная оптика, матрицы Дирака, матрицы Мюллера, классификация, вырожденные матрицы, полугруппа.

1 Поляризация света, векторный формализм Мюллера

В случае плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси z, в произвольной точке z имеем (M, N – амплитуды двух компонент вектора $\mathbf{E}$, Δ – фазовый сдвиг)

$$E^1 = N\cos\omega t, \quad E^2 = M\cos(\omega t + \Delta), \quad E^3 = 0,$$
$$N \geqslant 0, \quad M \geqslant 0, \quad \Delta \in [-\pi, +\pi]. \tag{1.1}$$

Четыре параметра Стокса $(S_a) = (I, S^1, S^2, S^3)$ определены равенствами

$$I = \langle E_1^2 + E_2^2 \rangle, \qquad S^3 = \langle E_1^2 - E_2^2 \rangle,$$
$$S^1 = \langle 2E_1E_2\ \cos\Delta \rangle, \qquad S^1 = \langle 2E_1E_2\ \sin\Delta \rangle; \tag{1.2}$$

символ $\langle \dots \rangle$ обозначает усреднение по времени. Если амплитуды и сдвиг фаз N, M, Δ не меняются со временем (или меняются несущественно за время проведения усреднения), то соответствующие параметры Стокса равны

$$S^0_{pol} = I = N^2 + M^2, \qquad S^3_{pol} = N^2 - M^2,$$
$$S^1_{pol} = 2NM\cos\Delta, \qquad S^2_{pol} = 2NM\sin\Delta. \tag{1.3}$$

При этом выполняется тождество

$$S_aS^a = \left(S^0_{pol}\right)^2 - S^j_{pol}S^j_{pol} = I^2_{pol} - \mathbf{S}^2_{pol} = 0, \tag{1.4}$$

т. е. $\mathbf{S} = I_{pol}\,\mathbf{n}$. Другими словами, для полностью поляризованного света 4-вектор Стокса изотропный. Для естественного света параметры Стокса тривиальные

$$S^a_{non-pol} = (I_{non-pol}, 0, 0, 0).$$

При сложении двух некогерентных световых пучков их параметры Стокса складываются линейно: $I_{(1)} + I_{(2)}$, $\mathbf{S}_{(1)} + \mathbf{S}_{(2)}$. В частности, частично поляризованный свет, получающийся при сложении естественно и полностью поляризованного света, описывается параметрами

$$S^a_{nonpol} = (I_{nonpol}, 0, 0, 0)\ , \qquad S^a_{pol} = (I_{pol}, I_{pol}\mathbf{n})\ ,$$

$$S^a = S^a_{nonpol} + S^a_{pol} = (\ I_{nonpol} + I_{pol}\ )\ \left(1, \frac{I_{pol}}{I_{non-ol} + I_{pol}}\,\mathbf{n}\right)\ .$$

Используя обозначения

$$I = I_{nonpol} + I_{pol}, \qquad p = \frac{I_{pol}}{I_{nonpol} + I_{pol}}, \tag{1.5}$$

для параметров Стокса частично поляризованного света находим выражения

$$S^a = (I,\ I\ p\ \mathbf{n})\ , \qquad S_a S^a = I^2(1 - p^2) \geq 0\ ; \tag{1.6}$$

где I – общая интенсивность, p — степень поляризации ($0 \leqslant p \leqslant\ 1$), $\mathbf{n}$ — единичный 3-мерный вектор.

2 Общий анализ возможных подгрупп в $GL(4.C)$

В спинорном базисе произвольная 4×4-матрица может быть задана с помощью четырех 4-мерных величин (векторов) (k, m, l, n):

$$\left| \begin{array}{cc} k_0 +\ \mathbf{k}\,\vec{\sigma} & n_0 +\ \mathbf{n}\,\vec{\sigma} \\ l_0 +\ \mathbf{l}\,\vec{\sigma} & m_0 +\ \mathbf{m}\,\vec{\sigma} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} K & N \\ L & M \end{array} \right|; \tag{2.1}$$

при этом закон умножения 16 параметров имеет вид (см. детальнее об использовании базиса матриц Дирака в теории группы $GL(4, C)$ в [1–3]):

$$\begin{aligned} k''_0 &= k'_0\, k_0 + \mathbf{k}'\,\mathbf{k} + n'_0\, l_0 + \mathbf{n}'\,\mathbf{l}\ , \\ m''_0 &= m'_0\, m_0 + \mathbf{m}'\,\mathbf{m} + l'_0\, n_0 + \mathbf{l}'\,\mathbf{n}\ , \\ n''_0 &= k'_0\, n_0 + \mathbf{k}'\,\mathbf{n} + n'_0\, m_0 + \mathbf{n}'\,\mathbf{m}\ , \\ l''_0 &= l'_0\, k_0 + \mathbf{l}'\,\mathbf{k} + m'_0\, l_0 + \mathbf{m}'\,\mathbf{l}\ , \end{aligned} \tag{2.2a}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'' &= k'_0\,\mathbf{k} + \mathbf{k}'\,k_0 + i\,\mathbf{k}' \times \mathbf{k} + n'_0\,\mathbf{l} + \mathbf{n}'\,l_0 + i\,\mathbf{n}' \times \mathbf{l}\ , \\ \mathbf{m}'' &= m'_0\,\mathbf{m} + \mathbf{m}'\,m_0 + i\,\mathbf{m}' \times \mathbf{m} + l'_0\,\mathbf{n} + \mathbf{l}'\,n_0 + i\,\mathbf{l}' \times \mathbf{n}\ , \\ \mathbf{n}'' &= k'_0\,\mathbf{n} + \mathbf{k}'\,n_0 + i\,\mathbf{k}' \times \mathbf{n} + n'_0\,\mathbf{m} + \mathbf{n}'\,m_0 + i\,\mathbf{n}' \times \mathbf{m}\ , \\ \mathbf{l}'' &= l'_0\,\mathbf{k} + \mathbf{l}'\,k_0 + i\,\mathbf{l}' \times \mathbf{k} + m'_0\,\mathbf{l} + \mathbf{m}'\,l_0 + i\,\mathbf{m}' \times \mathbf{l}. \end{aligned} \tag{2.2b}$$

Далее мы исследуем все варианты линейных ограничений на параметры, совместимых с групповым умножением параметров k, m, n, l; причем,они должны выполняться и в общем случае комплексных параметров. Можно предположить, что исследуя такие линейные ограничения на параметры k, m, n, l, мы построим подгруппы в $GL(4, C)$. Возможно, при этом часть подмножеств будет состоять из вырожденных матриц, т. е. иметь структуру полугрупп.

3 Один независимый вектор: вариант $\mathbf{I(k)}$

Рассмотрим **вариант** $\mathbf{I(k)}$:

$$\mathbf{n} = A\,\mathbf{k}\;,\; n_0 = \alpha\, k_0\;,\; \mathbf{m} = B\,\mathbf{k}\;,\; m_0 = \beta\, k_0\;,\; \mathbf{l} = D\,\mathbf{k}\;,\; l_0 = t\, k_0\;. \tag{3.1}$$

Формулы умножения параметров $(2.2a, b)$ принимают вид:

$$\begin{aligned}
k_0'' &= k_0'\,k_0 + \mathbf{k}'\,\mathbf{k} + \alpha t\, k_0' k_0 + AD\,\mathbf{k}'\mathbf{k},\\
m_0'' &= \beta^2\, k_0' k_0 + B^2\,\mathbf{k}'\,\mathbf{k} + t\alpha\, k_0'\,k_0 + DA\,\mathbf{k}'\,\mathbf{k},\\
n_0'' &= \alpha\, k_0' k_0 + A\,\mathbf{k}'\mathbf{k} + \alpha\beta\, k_0'\,k_0 + AB\,\mathbf{k}'\,\mathbf{k},\\
l_0'' &= t\, k_0'\,k_0 + D\,\mathbf{k}'\,\mathbf{k} + \beta t\, k_0' k_0 + BD\,\mathbf{k}'\mathbf{k},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}'' &= k_0'\,\mathbf{k} + \mathbf{k}'\,k_0 + i\,\mathbf{k}' \times \mathbf{k} + \alpha D\, k_0'\,\mathbf{k} + At\,\mathbf{k}' k_0 + iAD\,\mathbf{k}' \times \mathbf{k},\\
\mathbf{m}'' &= \beta B\, k_0'\mathbf{k} + B\beta\,\mathbf{k}'\,k_0 + iB^2\,\mathbf{k}' \times \mathbf{k} + tA\, k_0'\mathbf{k} + D\alpha\,\mathbf{k}'\,k_0 + iDA\,\mathbf{k}' \times \mathbf{k},\\
\mathbf{n}'' &= A\, k_0'\,\mathbf{k} + \alpha\,\mathbf{k}'\,k_0 + iA\,\mathbf{k}' \times \mathbf{k} + \alpha B\, k_0'\mathbf{k} + A\beta\,\mathbf{k}'\,k_0 + iAB\,\mathbf{k}' \times \mathbf{k},\\
\mathbf{l}'' &= t\, k_0'\mathbf{k} + D\,\mathbf{k}' k_0 + iD\,\mathbf{k}' \times \mathbf{k} + \beta D\, k_0'\,\mathbf{k} + Bt\,\mathbf{k}'\,k_0 + iBD\,\mathbf{k}' \times \mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Требуем выполнения соотношений (3.1) для параметров с двумя штрихами:

$\underline{n_0'' = \alpha\, k_0''}$

$$\alpha(1+\beta)\; k_0' k_0 + A(1+B)\;\mathbf{k}'\mathbf{k} = \alpha(1+\alpha t)\; k_0'\; k_0 + \alpha(1+AD)\;\mathbf{k}'\;\mathbf{k},$$

$\underline{m_0'' = \beta\, k_0''}$

$$(\beta^2 + t\alpha)\; k_0' k_0 + (B^2 + DA)\;\mathbf{k}'\;\mathbf{k} = \beta(1+\alpha t)\; k_0'\; k_0 + \beta(1+AD)\;\mathbf{k}'\;\mathbf{k},$$

$\underline{l_0'' = t\, k_0''}$

$$t(1+\beta)\; k_0'\; k_0 + D(1+B)\;\mathbf{k}'\;\mathbf{k} = t\;(1+\alpha t)\; k_0'\; k_0 + t(1+AD)\;\mathbf{k}'\;\mathbf{k},$$

$\underline{\mathbf{n}'' = A\,\mathbf{k}''}$

$$(A+\alpha B)\; k_0'\;\mathbf{k} + (\alpha + A\beta)\;\mathbf{k}'\; k_0 + iA(1+B)\;\mathbf{k}' \times \mathbf{k} =$$

$$A(1+\alpha D)\; k_0'\;\mathbf{k} + A(1+At)\;\mathbf{k}'\; k_0 + iA(1+AD)\;\mathbf{k}' \times \mathbf{k}\;,$$

$\underline{\mathbf{m}'' = B\,\mathbf{k}''}$

$$(\beta B + tA)\; k_0'\mathbf{k} + (B\beta + D\alpha)\;\mathbf{k}'\; k_0 + i(B^2 + AD)\;\mathbf{k}' \times \mathbf{k} =$$

$$B(1+\alpha D) k_0'\;\mathbf{k} + B(1+At)\;\mathbf{k}'\; k_0 + iB(1+AD)\;\mathbf{k}' \times \mathbf{k}\;,$$

$\underline{\mathbf{l}'' = D\,\mathbf{k}''}$

$$(t + \beta D)\; k_0'\mathbf{k} + (D + Bt)\;\mathbf{k}' k_0 + iD(1+B)\;\mathbf{k}' \times \mathbf{k} =$$

$$D(1+\alpha D)\; k_0'\;\mathbf{k} + D(1+At)\;\mathbf{k}'\; k_0 + iD(1+AD)\;\mathbf{k}' \times \mathbf{k}.$$

Дальше приходим к системе уравнений

$$\begin{gathered}
\alpha(1+\beta)=\alpha(1+\alpha t)\;, \qquad A(1+B)=\alpha(1+AD),\\
(\beta^2+t\alpha)=\beta(1+\alpha t)\;, \qquad (B^2+DA)=\beta(1+AD),\\
t(1+\beta)=t(1+\alpha t)\;, \qquad D(1+B)=t(1+AD),\\
(A+\alpha B)=A(1+\alpha D), \quad (\alpha+A\beta)=A(1+At), \quad A(1+B)=A(1+AD),\\
(\beta B+tA)=B(1+\alpha D), \quad (B\beta+D\alpha)=B(1+At), \quad (B^2+AD)=B(1+AD),\\
(t+\beta D)=D(1+\alpha D), \quad (D+Bt)=D(1+At), \quad D(1+B)=D(1+AD).
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Предстоит найти все решения этой системы; каждое решение определяет либо некоторую подгруппу, либо некоторую подполугруппу (множество матриц с нулевым определителем, замкнутое относительно умножения).

Прежде всего, система уравнений (3.2) при трех равных нулю блоках имеет тривиальное решение:

решение $(K-1)$,

$$A=\alpha=0\;,\; B=\beta=0\;,\; D=t=0\;, \qquad G=\begin{vmatrix} K & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}\;; \tag{3.3}$$

все эти 4-мерные матрицы вырождены: их определитель равен нулю. Ранг матриц равен 2 или 1 (в последнем случае нужно требовать $\det K=0$).

Исследуем решения при двух равных нулю блоках. Здесь есть три возможности. Сначала предположим, что

$$A=\alpha=0\;, \qquad D=t=0\;; \tag{3.4a}$$

система (3.2) дает

$$\beta^2=\beta\;, \qquad B^2=\beta\;, \qquad \beta B=B\;, \qquad B^2=B\;, \tag{3.4b}$$

откуда в дополнение к уже встречавшемуся тривиальному решению (3.3) при $B=\beta=0$ получаем новое:

решение $(K-2)$,

$$A=\alpha=0\;,\; D=t=0\;,\; D=\beta=+1\;, \qquad G=\begin{vmatrix} k_0+\mathbf{k}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & k_0+\mathbf{k}\vec{\sigma}\end{vmatrix}; \tag{3.4c}$$

это множество невырожденных матриц со структурой подгруппы.

Теперь предположим, что

$$A=\alpha=0\;, \qquad B=\beta=0\;; \tag{3.5a}$$

система (3.2) дает

$$\begin{gathered}
0=0, \qquad A=0,\\
0=0, \qquad 0=0,\\
t=t, \qquad D=t,\\
0=0, \qquad 0=0, \qquad 0=0,\\
0=0, \qquad 0=0, \qquad 0=0,\\
t=D, \qquad D=D, \qquad D=D,
\end{gathered} \tag{3.5b}$$

т. е. приходим к решению:

решение $(K-3)$,

$$A=\alpha=0\,,\qquad B=\beta=0\,,\qquad D=t\,,$$

$$G=\left|\begin{array}{cc} K & 0 \\ DK & 0 \end{array}\right|,\qquad G'G=\left|\begin{array}{cc} K' & 0 \\ DK' & 0 \end{array}\right|\left|\begin{array}{cc} K & 0 \\ DK & 0 \end{array}\right|=\left|\begin{array}{cc} K'K & 0 \\ DK'K & 0 \end{array}\right|; \tag{3.5c}$$

это множество вырожденных матриц ранга 2 со структурой полугруппы.

Теперь предположим, что

$$B=\beta=0\,,\qquad D=t=0\,; \tag{3.6a}$$

система (3.2) дает

$$\begin{array}{ccc} & \alpha=\alpha, & A=\alpha, \\ & 0=0, & 0=0, \\ & 0=0, & 0=0, \\ A=A, & \alpha=A, & A=A, \\ 0=0, & 0=0, & 0=0, \\ 0=0, & 0=0, & 0=0, \end{array} \tag{3.6b}$$

т. е. приходим к следующему решению:

решение $(K-4)$,

$$A=\alpha\,,\qquad B=\beta=0\,,\qquad D=t=0\,,$$

$$G=\left|\begin{array}{cc} K & AK \\ 0 & 0 \end{array}\right|,\qquad G'G=\left|\begin{array}{cc} K' & AK' \\ 0 & 0 \end{array}\right|\left|\begin{array}{cc} K & AK \\ 0 & 0 \end{array}\right|=\left|\begin{array}{cc} K'K & AK'K \\ 0 & 0 \end{array}\right|; \tag{3.6c}$$

это множество вырожденных матриц ранга 2 со структурой полугруппы.

Исследуем решения при одном нулевом блоке. Первая возможность:

$$A=\alpha=0\,; \tag{3.7a}$$

система (3.2) дает

$$\begin{array}{ccc} & 0=0\,, & 0=0\,, \\ & \beta^2=\beta\,, & B^2=\beta\,, \\ & t(1+\beta)=t\,, & D(1+B)=t\,, \\ 0=0\,, & 0=0\,, & 0=0\,, \\ \beta B=B\,, & B\beta=B\,, & B^2=B\,, \\ (t+\beta D)=D\,, & (D+Bt)=D\,, & D(1+B)=D\,. \end{array} \tag{3.7b}$$

Уравнения $(3.7b)$ имеют только два уже встречавшиеся решения:

решение $(K-3)$,

$$A=\alpha=0\ ,\ B=\beta=0\ ,\ t=D\ , \qquad G=\left|\begin{array}{cc} K & 0 \\ DK & 0 \end{array}\right|\ ; \tag{3.7c}$$

решение $(K-2)$,

$$A=\alpha=0\ ,\ B=\beta=+1\ ,\ D=t=0\ , \qquad G=\left|\begin{array}{cc} k_0+\mathbf{k}\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & k_0+\mathbf{k}\vec{\sigma} \end{array}\right|. \tag{3.7d}$$

Исследуем вторую возможность при одном нулевом блоке:

$$D=t=0\ ; \tag{3.8a}$$

система (3.2) дает

$$\begin{gathered} \alpha\beta=0\ , \qquad A(1+B)=\alpha\ , \\ \beta^2=\beta\ , \qquad B^2=\beta\ , \\ 0=0\ , \qquad 0=0\ , \\ (A+\alpha B)=A\ , \qquad (\alpha+A\beta)=A\ , \qquad AB=0\ , \\ \beta B=B\ , \qquad B\beta=B\ , \qquad B^2=B\ , \\ 0=0\ , \qquad 0=0\ , \qquad 0=0\ . \end{gathered} \tag{3.8b}$$

Система (3.8b) приводит к двум уже известным возможностям:
решение $(K-2)$,

$$A=\alpha=0\ ,\ B=+1\ ,\ \beta=+1\ ,\ D=t=0\ , \qquad G=\left|\begin{array}{cc} k_0+\mathbf{k}\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & k_0+\mathbf{k}\vec{\sigma} \end{array}\right|; \tag{3.8c}$$

решение $(K-1)$,

$$A=\alpha\ ,\ B=\beta=0\ ,\ D=t=0\ , \qquad G=\left|\begin{array}{cc} K & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right|. \tag{3.8d}$$

Рассматриваем третью возможность при одном нулевом блоке:

$$B=\beta=0\ ; \tag{3.9a}$$

система (3.2) дает

$$\begin{gathered} 0=\alpha^2 t, \quad A=\alpha(1+AD), \\ t\alpha=0, \quad DA=0, \\ 0=\alpha t^2, \quad D=t(1+AD), \\ 0=A\alpha D, \quad \alpha=A(1+At), \quad 0=A^2D, \\ tA=0, \quad D\alpha=0, \quad AD=0, \\ t=D(1+\alpha D), \quad 0=DAt, \quad 0=AD^2. \end{gathered} \tag{3.9b}$$

Здесь возможны только два уже встречавшихся решения:

решение $(K-4)$,

$$A=\alpha\ ,\ B=\beta=0\ ,\ D=t=0\ , \qquad G=\begin{vmatrix} K & AK \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \tag{3.9c}$$

решение $(K-3)$,

$$A=\alpha=0\ ,\ B=\beta=0\ ,\ D=t\ , \qquad G=\begin{vmatrix} K & 0 \\ DK & 0 \end{vmatrix}. \tag{3.9d}$$

Теперь рассматриваем ситуацию, когда нулевых блоков нет:

$$A\ ,\ \alpha\neq 0\ , \qquad B\ ,\ \beta\neq 0\ , \qquad D\ ,\ t\neq 0\ ; \tag{3.10a}$$

при этом система уравнений (3.2) дает

$$\begin{gathered}
\beta=+\alpha t, \quad A(1+B)=\alpha(1+AD), \\
(\beta^2+t\alpha)=\beta(1+\alpha t), \quad (B^2+DA)=\beta(1+AD), \\
\beta=+\alpha t, \quad D(1+B)=t(1+AD), \\
B=AD, \quad (\alpha+A\beta)=A(1+At), \quad B=AD, \\
(\beta B+tA)=B(1+\alpha D), \quad (B\beta+D\alpha)=B(1+At), \quad (B^2+AD)=B(1+AD), \\
(t+\beta D)=D(1+\alpha D), \quad B=AD, \quad B=AD.
\end{gathered} \tag{3.10b}$$

Исключим из уравнений B и β:

$$B=AD\ , \qquad \beta=\alpha t\ ;$$

выпишем оставшиеся независимые уравнения:

$$\begin{gathered}
(A-\alpha)(1+AD)=0\ , \\
(AD-\alpha t)(1+AD)=0\ , \\
(D-t)(1+AD)=0\ , \\
(A-\alpha)(1+At)=0\ , \\
(D-t)(1+\alpha D)=0.
\end{gathered} \tag{3.10c}$$

Рассмотрим сначала случай $A=\alpha$; система (3.10c) примет вид:

$$A=\alpha\ , \qquad (D-t)(1+AD)=0\ . \tag{3.11}$$

Здесь приходим к двум новым решениям:

решение $(K-5)$,

$$A=\alpha\ ,\ B=\beta=AD\ ,\ D=t\ , \qquad G=\begin{vmatrix} K & AK \\ DK & ADK \end{vmatrix}; \tag{3.12a}$$

это множество вырожденных матриц с рангом 2. Убеждаемся что закон умножения выполняется:

$$\left| \begin{array}{cc} K' & AK' \\ DK' & ADK' \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} K & AK \\ DK & ADK \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} (K'K + ADK'K) & A(K'K + ADK'K) \\ D(K'K + ADK'K) & AD(K'K + ADK'K) \end{array} \right| . \qquad (3.12b)$$

Отмечаем, что если выбрать $D = -A^{-1}$, то результат умножения двух матриц будет давать всегда ноль:

решение $(K-5)'$,

$$A = \alpha \ , \ B = \beta = -1 \ , \ D = t \ , \ G = \left| \begin{array}{cc} K & AK \\ -A^{-1}K & -K \end{array} \right| , \ G'G = 0 \ ; \qquad (3.12c)$$

решение $(K-6)$,

$$A = \alpha \ , \ B = -1, \ \beta = -At, \ D = -\frac{1}{A}, \ G = \left| \begin{array}{cc} k_0 + \vec{k}\vec{\sigma} & Ak_0 + A\vec{k}\vec{\sigma} \\ tk_0 - A^{-1}\vec{k}\vec{\sigma} & Atk_0 - \vec{k}\vec{\sigma} \end{array} \right| ; \qquad (3.13a)$$

это множество вырожденных матриц с рангом 2.

Проверяем закон умножения, обеспечивающий структуру полугруппы во множестве $(3.13a)$:

$$G'G \left| \begin{array}{cc} k'_0 + \vec{k}\vec{\sigma} & Ak'_0 + A\vec{k}'\vec{\sigma} \\ tk'_0 - A^{-1}\vec{k}'\vec{\sigma} & Atk'_0 - \vec{k}'\vec{\sigma} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} k_0 + \vec{k}\vec{\sigma} & Ak_0 + A\vec{k}\vec{\sigma} \\ tk_0 - A^{-1}\vec{k}\vec{\sigma} & Atk_0 - \vec{k}\vec{\sigma} \end{array} \right| = G'' \ ;$$

результат умножения записываем по блокам:

$$\begin{aligned} &(11) = (1 + At) \ k'_0 k_0 + (1 + At)\vec{k}' k_0 \vec{\sigma} \ , \\ &(12) = A \ \Big[(1 + At) \ k'_0 k_0 + (1 + At)\vec{k}' k_0 \vec{\sigma}\Big] \ , \\ &(21) = t \ (1 + At) \ k'_0 k_0 - A^{-1} \ (1 + At)\vec{k}' k_0 \vec{\sigma} \ , \\ &(22) = At \ (1 + At) \ k'_0 k_0 - (1 + At)\vec{k}' k_0 \vec{\sigma} \ , \end{aligned}$$

т. е.

$$k''_0 = (1 + At)k_0 \ k'_0 \ , \qquad \vec{k}'' = (1 + At)k_0 \ \vec{k}' \ ; \qquad (3.13b)$$

другими словами, матрица $G'' = G'G$ “помнит” структуру матрицы G'.

Возвращаемся к системе $(3.10c)$ и рассматриваем случай

$$A \neq \alpha \ , \qquad 1 + AD = 0 \ ; \qquad (3.14a)$$

система $(3.10c)$ дает единственное решение:

$$D = -\frac{1}{A}, \qquad t = -\frac{1}{A} \ , \qquad (3.14b)$$

откуда находим

решение $(K-7)$,

$$A,\alpha,\ B=-1,\ \beta=-\frac{\alpha}{A}\ ,\ D=t=-\frac{1}{A},\quad G=\begin{vmatrix} k_0+\vec{k}\vec{\sigma} & \alpha k_0+A\vec{k}\vec{\sigma} \\ -A^{-1}(k_0+\vec{k}\vec{\sigma}) & -A^{-1}\alpha k_0-\vec{k}\vec{\sigma} \end{vmatrix}; \quad (3.14c)$$

это множество вырожденных матриц с рангом 2. Проверяем закон умножения, обеспечивающий структуру полугруппы:

$$G'G=\begin{vmatrix} k'_0+\vec{k}'\vec{\sigma} & \alpha k'_0+A\vec{k}'\vec{\sigma} \\ -A^{-1}(k'_0+\vec{k}'\vec{\sigma}) & -A^{-1}\alpha k'_0-\vec{k}'\vec{\sigma} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} k_0+\vec{k}\vec{\sigma} & \alpha k_0+A\vec{k}\vec{\sigma} \\ -A^{-1}(k_0+\vec{k}\vec{\sigma}) & -A^{-1}\alpha k_0-\vec{k}\vec{\sigma} \end{vmatrix};$$

результат умножения записываем по блокам:

$$\begin{aligned}
(11) &= \left(1-\tfrac{\alpha}{A}\right)\ k'_0k_0+\left(1-\tfrac{\alpha}{A}\right)k'_0\vec{k}\ \vec{\sigma},\\
(12) &= \alpha\ \left(1-\tfrac{\alpha}{A}\right)\ k'_0k_0+A\ \left(1-\tfrac{\alpha}{A}\right)k'_0\vec{k}\ \vec{\sigma}\ ,\\
(21) &= -A^{-1}\ \left(1-\tfrac{\alpha}{A}\right)\ k'_0k_0-A^{-1}\ \left(1-\tfrac{\alpha}{A}\right)k'_0\vec{k}\ \vec{\sigma},\\
(22) &= -A^{-1}\alpha\ \left(1-\tfrac{\alpha}{A}\right)\ k'_0k_0-\left(1-\tfrac{\alpha}{A}\right)k'_0\vec{k}\ \vec{\sigma}\ ,
\end{aligned}$$

т. е. закон умножения в полугруппе выглядит так:

$$G''=G'G\ ,\qquad k''_0=(1-\frac{\alpha}{A})\ k'_0k_0\ ,\qquad \vec{k}''=(1-\frac{\alpha}{A})k'_0\vec{k}\ . \qquad (3.14d)$$

Таким образом, анализ варианта $\mathbf{I(k)}$ завершен полностью: найдено 7 типов решений; с точки зрения получения подгрупп есть только два варианта, остальные приводят к структурам полугрупп (матриц с рангом 2).

4 Один независимый вектор: вариант I(m)

Рассматриваем **вариант $\mathbf{I(m)}$**. Накладываем линейные ограничения

$$\mathbf{n}=A\ \mathbf{m}\ ,\ n_0=\alpha\ m_0\ ,\ \mathbf{k}=B\ \mathbf{m}\ ,\ k_0=\beta\ m_0\ ,\ \mathbf{l}=D\ \mathbf{m}\ ,\quad l_0=t\ m_0\ . \qquad (4.1)$$

При этом закон умножения параметров $(2.2a,b)$ дает

$$\begin{aligned}
k''_0 &= \beta m'_0\ \beta m_0+B\mathbf{m}'\ B\mathbf{m}+\alpha m'_0\ tm_0+A\mathbf{m}'\ D\mathbf{m}\ ,\\
m''_0 &= m'_0\ m_0+\mathbf{m}'\ \mathbf{m}+tm'_0\ \alpha m_0+D\mathbf{m}'\ A\mathbf{m}\ ,\\
n''_0 &= \beta m'_0\ \alpha m_0+B\mathbf{m}'\ A\mathbf{m}+\alpha m'_0\ m_0+A\mathbf{m}'\ \mathbf{m}\ ,\\
l''_0 &= tm'_0\ \beta m_0+D\mathbf{m}'\ B\mathbf{m}+m'_0\ tm_0+\mathbf{m}'\ D\mathbf{m}\ ,
\end{aligned} \qquad (4.2a)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}'' &= \beta m'_0\ B\mathbf{m}+B\mathbf{m}'\ \beta m_0+i\ B\mathbf{m}'\times B\mathbf{m}+\alpha m'_0\ D\mathbf{m}+A\mathbf{m}'\ tm_0+i\ A\mathbf{m}'\times D\mathbf{m}\ ,\\
\mathbf{m}'' &= m'_0\ \mathbf{m}+\mathbf{m}'\ m_0+i\ \mathbf{m}'\times\mathbf{m}+tm'_0\ A\mathbf{m}+D\mathbf{m}'\ \alpha m_0+i\ D\mathbf{m}'\times A\mathbf{m}\ ,\\
\mathbf{n}'' &= \beta m'_0\ A\mathbf{m}+B\mathbf{m}'\ \alpha m_0+i\ B\mathbf{m}'\times A\mathbf{m}+\alpha m'_0\ \mathbf{m}+A\mathbf{m}'\ m_0+i\ A\mathbf{m}'\times\mathbf{m}\ ,\\
\mathbf{l}'' &= tm'_0\ B\mathbf{m}+D\mathbf{m}'\ \beta m_0+i\ D\mathbf{m}'\times B\mathbf{m}+m'_0\ D\mathbf{m}+\mathbf{m}'\ tm_0+i\ \mathbf{m}'\times D\mathbf{m}\ .
\end{aligned} \qquad (4.2b)$$

Требуем

$$n''_0 = \alpha\, m''_0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\beta m'_0\, \alpha m_0 + B\mathbf{m}'\, A\mathbf{m} + \alpha m'_0\, m_0 + A\mathbf{m}'\, \mathbf{m} =$$

$$\alpha m'_0\, m_0 + \alpha \mathbf{m}'\, \mathbf{m} + \alpha t m'_0\, \alpha m_0 + \alpha D\mathbf{m}'\, A\mathbf{m} \qquad \Longrightarrow$$

$$\alpha(\beta+1) = \alpha(1+\alpha t)\;, \qquad A(B+1) = \alpha(1+AD)\;;$$

требуем

$$k''_0 = \beta\, m''_0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\beta m'_0\, \beta m_0 + B\mathbf{m}'\, B\mathbf{m} + \alpha m'_0\, t m_0 + A\mathbf{m}'\, D\mathbf{m} =$$

$$\beta m'_0\, m_0 + \beta \mathbf{m}'\, \mathbf{m} + \beta t m'_0\, \alpha m_0 + \beta D\mathbf{m}'\, A\mathbf{m} \qquad \Longrightarrow$$

$$\beta^2 + \alpha t = \beta(1+\alpha t)\;, \qquad B^2 + AD = \beta(1+AD)\;;$$

требуем

$$l''_0 = t\, m''_0 \qquad \Longrightarrow$$

$$t m'_0\, \beta m_0 + D\mathbf{m}'\, B\mathbf{m} + m'_0\, t m_0 + \mathbf{m}'\, D\mathbf{m} =$$

$$t m'_0\, m_0 + t \mathbf{m}'\, \mathbf{m} + t^2 m'_0\, \alpha m_0 + t D\mathbf{m}'\, A\mathbf{m} \qquad \Longrightarrow$$

$$t(\beta+1) = t(1+\alpha t)\;, \qquad D(B+1) = t(1+AD)\;;$$

требуем

$$\mathbf{k}'' = B\, \mathbf{m}'' \qquad \Longrightarrow$$

$$\beta m'_0\, B\mathbf{m} + B\mathbf{m}'\, \beta m_0 + i\, B\mathbf{m}' \times B\mathbf{m} + \alpha m'_0\, D\mathbf{m} + A\mathbf{m}'\, t m_0 + i\, A\mathbf{m}' \times D\mathbf{m} =$$

$$B m'_0\, \mathbf{m} + B\mathbf{m}'\, m_0 + i\, B\mathbf{m}' \times \mathbf{m} + B t m'_0\, A\mathbf{m} + BD\mathbf{m}'\, \alpha m_0 + i\, BD\mathbf{m}' \times A\mathbf{m} \qquad \Longrightarrow$$

$$\beta B + \alpha D = B(1+tA)\;, \qquad \beta B + tA = B(1+\alpha D), \qquad B^2 + AD = B(1+AD)\;;$$

требуем

$$\mathbf{n}'' = A\, \mathbf{m}'' \qquad \Longrightarrow$$

$$\beta m'_0\, A\mathbf{m} + B\mathbf{m}'\, \alpha m_0 + i\, B\mathbf{m}' \times A\mathbf{m} + \alpha m'_0\, \mathbf{m} + A\mathbf{m}'\, m_0 + i\, A\mathbf{m}' \times \mathbf{m} =$$

$$A m'_0\, \mathbf{m} + A\mathbf{m}'\, m_0 + i\, A\mathbf{m}' \times \mathbf{m} + A t m'_0\, A\mathbf{m} + AD\mathbf{m}'\, \alpha m_0 + i\, AD\mathbf{m}' \times A\mathbf{m} \qquad \Longrightarrow$$

$$\beta A + \alpha = A(1+tA)\;, \qquad B\alpha + A = A(1+\alpha D)\;, \qquad A(1+B) = A(1+AD)\;;$$

требуем

$$\mathbf{l}'' = D\, \mathbf{m}'' \qquad \Longrightarrow$$

$$t m'_0\, B\mathbf{m} + D\mathbf{m}'\, \beta m_0 + i\, D\mathbf{m}' \times B\mathbf{m} + m'_0\, D\mathbf{m} + \mathbf{m}'\, t m_0 + i\, \mathbf{m}' \times D\mathbf{m} =$$

$$D m'_0\, \mathbf{m} + D\mathbf{m}'\, m_0 + i\, D\mathbf{m}' \times \mathbf{m} + D t m'_0\, A\mathbf{m} + DD\mathbf{m}'\, \alpha m_0 + i\, DD\mathbf{m}' \times A\mathbf{m} \qquad \Longrightarrow$$

$$tB + D = D(1+tA)\;, \qquad D\beta + t = D(1+\alpha D)\;, \qquad D(1+B) = D(1+AD)\;.$$

Собираем полученные уравнения вместе:

$$\begin{gathered}\alpha(\beta+1)=\alpha(1+\alpha t)\ ,\qquad A(B+1)=\alpha(1+AD)\ ,\\ \beta^2+\alpha t=\beta(1+\alpha t)\ ,\qquad B^2+AD=\beta(1+AD)\ ,\\ t(\beta+1)=t(1+\alpha t)\ ,\qquad D(B+1)=t(1+AD)\ ,\\ \beta B+\alpha D=B(1+tA)\ ,\qquad \beta B+tA=B(1+\alpha D),\qquad B^2+AD=B(1+AD)\ ,\\ \beta A+\alpha=A(1+tA)\ ,\qquad B\alpha+A=A(1+\alpha D)\ ,\qquad A(1+B)=A(1+AD)\ ,\\ tB+D=D(1+tA)\ ,\qquad D\beta+t=D(1+\alpha D)\ ,\qquad D(1+B)=D(1+AD)\ .\end{gathered} \tag{4.3}$$

У системы (4.3) есть тривиальное решение, когда все параметры нулевые. Это приводит к матрицам с тремя нулевыми блоками:

решение $(M-1)$,

$$A=\alpha=0\ ,\ B=\beta=0\ ,\ D=t=0\ ,\qquad G=\begin{vmatrix}0&0\\0&M\end{vmatrix}. \tag{4.4}$$

Построим решения при двух нулевых блоках. Здесь возможны 3 варианта.

Первый вариант:

$$A=\alpha=0\ ,\qquad D=t=0\ ; \tag{4.5a}$$

система уравнений (4.3) дает

$$\begin{gathered}0=0\ ,\qquad 0=0\ ,\\ \beta^2=\beta\ ,\qquad B^2=\beta\ ,\\ 0=0\ ,\qquad 0=0\ ,\\ \beta B=B\ ,\qquad \beta B=B\ ,\qquad B^2=B\ ,\\ 0=0\ ,\qquad 0=0\ ,\qquad 0=0\ ,\\ 0=0\ ,\qquad 0=0\ ,\qquad 0=0\ ;\end{gathered} \tag{4.5b}$$

т. е.

$$\beta^2=\beta\ ,\qquad B^2=\beta\ ,\qquad \beta B=B\ ,\qquad B^2=B\ . \tag{4.5c}$$

У уравнений (4.5c) есть только два уже известных решения:

решение $(M-1)$,

$$A=\alpha=0\ ,\ B=\beta=0\ ,\ D=t=0\ ,\qquad G=\begin{vmatrix}0&0\\0&M\end{vmatrix}; \tag{4.6}$$

решение $(M-2)$,

$$A=\alpha=0\ ,\ B=\beta=1\ ,\ D=t=0\ ,\qquad G=\begin{vmatrix}M&0\\0&M\end{vmatrix}. \tag{4.7}$$

Рассматриваем следующий вариант с двумя нулевыми блоками:

$$A=\alpha=0\ ,\qquad B=\beta=0\ ; \tag{4.8a}$$

система (4.3) дает

$$
\begin{gathered}
t = 0\,, \qquad D = 0\,, \\
0 = 0\,, \qquad 0 = 0\,, \\
0 = 0\,, \qquad D = t\,, \\
0 = 0\,, \qquad 0 = 0\,, \qquad 0 = 0\,, \\
0 = 0\,, \qquad 0 = 0\,, \qquad 0 = 0\,, \\
0 = 0\,, \qquad t = D\,, \qquad 0 = D\,,
\end{gathered} \tag{4.8b}
$$

т. е.

решение $(M-3)$,

$$
A = \alpha = 0\ ,\ B = \beta = 0\ ,\ D = t\ ,\ G = \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ DM & M \end{array} \right| ,\ G'G = \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ DM'M & M'M \end{array} \right| . \tag{4.8c}
$$

Это полугруппа матриц ранга 2.

Следующий вариант с двумя нулевыми блоками:

$$
D = t = 0\,, \qquad B = \beta = 0\,; \tag{4.9a}
$$

система (4.3) дает

$$
\begin{gathered}
0 = 0\,, \qquad A = \alpha\,, \\
0 = 0\,, \qquad 0 = 0\,, \\
0 = 0\,, \qquad 0 = 0\,, \\
0 = 0\,, \qquad 0 = 0, \qquad 0 = 0\,, \\
\alpha = A\,, \qquad 0 = 0\,, \qquad 0 = 0\,, \\
0 = 0\,, \qquad 0 = 0\,, \qquad 0 = 0\,,
\end{gathered} \tag{4.9b}
$$

т. е.

решение $(M-4)$,

$$
A = \alpha\ ,\ B = \beta = 0\ ,\ D = t = 0\ , \qquad G = \left| \begin{array}{cc} 0 & AM \\ 0 & M \end{array} \right| . \tag{4.9c}
$$

Строим решения при одном нулевом блоке. Здесь возможны 3 варианта. Первый вариант:

$$
A = \alpha = 0\,; \tag{4.10a}
$$

система (4.3) дает

$$
\begin{gathered}
0 = 0, \quad 0 = 0, \\
\beta^2 = \beta, \quad B^2 = \beta, \\
t\beta = 0, \quad D(B+1) = t, \\
\beta B = B, \quad \beta B = B, \quad B^2 = B, \\
0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \\
tB = 0, \quad D\beta + t = D, \quad DB = 0.
\end{gathered} \tag{4.10b}
$$

У этой системы есть только два решения:

решение $(M-2)$,

$$A = \alpha = 0\ ,\ B = \beta = +1,\ D = t = 0\ , \qquad G = \begin{vmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{vmatrix}; \tag{4.10c}$$

решение $(M-3)$,

$$A = \alpha = 0\ ,\ B = \beta = 0\ ,\ D = t\ ,\ G = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ DM & M \end{vmatrix},\ G'G = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ DM'M & M'M \end{vmatrix}. \tag{4.10d}$$

Строим решения с другим нулевым блоком:

$$B = \beta = 0\ ; \tag{4.11a}$$

система (4.3) дает

$$\begin{gathered} 0 = \alpha^2 t, \quad A = \alpha, \\ \alpha t = 0, \quad AD = 0, \\ 0 = \alpha t^2, \quad D = t, \\ \alpha D = 0, \quad tA = 0, \quad AD = 0, \\ 0 = tA^2, \quad 0 = A^2 D, \quad 0 = A^2 D, \\ 0 = tDA, \quad 0 = \alpha D^2, \quad 0 = AD^2. \end{gathered} \tag{4.11b}$$

У системы (4.11b) есть только два решения:

решение $(M-3)$,

$$A = \alpha = 0\ ,\ B = \beta = 0\ ,\ D = t\ ,\ G = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ DM & M \end{vmatrix},\ G'G = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ DM'M & M'M \end{vmatrix}; \tag{4.11c}$$

решение $(M-4)$,

$$A = \alpha\ ,\ B = \beta = 0\ ,\ D = t = 0\ ,\ G = \begin{vmatrix} 0 & AM \\ 0 & M \end{vmatrix}. \tag{4.11d}$$

Рассмотрим последний вариант с одним нулевым блоком:

$$D = t = 0\ ; \tag{4.12a}$$

система (4.3) дает

$$\begin{gathered} \alpha\beta = 0, \quad A(B+1) = \alpha, \\ \beta^2 = \beta, \quad B^2 = \beta, \\ 0 = 0, \quad 0 = 0, \\ \beta B = B, \quad \beta B = B, \quad B^2 = B, \\ \beta A + \alpha = A, \quad B\alpha = 0, \quad AB = 0, \\ 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0. \end{gathered} \tag{4.12b}$$

У этой системы существует только два решения:

решение $(M-2)$,

$$A=\alpha=0\ ,\ B=\beta=1\ ,\ D=t=0\ ,\ G=\left|\begin{array}{cc} M & 0 \\ 0 & M \end{array}\right|; \tag{4.12c}$$

решение $(M-4)$,

$$A=\alpha\ ,\ B=\beta=0\ ,\ D=t=0\ ,\ G=\left|\begin{array}{cc} 0 & AM \\ 0 & M \end{array}\right|. \tag{4.12d}$$

Таким образом, построены все решения с одним, двумя, тремя нулевыми блоками. Осталось исследовать случай возможных решений, когда все три блока ненулевые:

$$A\ ,\ \alpha\neq 0\ ,\qquad B\ ,\ \beta\neq 0\ ,\qquad D\ ,\ t\neq 0\ ; \tag{4.13a}$$

при этих допущениях предстоит построить все решения системы (4.3). При условиях (4.13a) система (4.3) упрощается:

$$\begin{gathered}
\beta=\alpha t,\quad A(B+1)=\alpha(1+AD),\\
\beta^2+\alpha t=\beta(1+\alpha t),\quad B^2+AD=\beta(1+AD),\\
\beta=\alpha t,\quad D(B+1)=t(1+AD),\\
\beta B+\alpha D=B(1+tA),\quad \beta B+tA=B(1+\alpha D),\quad B^2+AD=B(1+AD),\\
\beta A+\alpha=A(1+tA),\quad B=AD),\quad B=AD,\\
B=AD,\quad D\beta+t=D(1+\alpha D),\quad B=AD,
\end{gathered} \tag{4.13b}$$

что эквивалентно следующему:

$$\begin{gathered}
\beta=\alpha t,\quad B=AD,\\
(D-t)(1+AD)=0,\quad (A-\alpha)(1+AD)=0,\quad (\alpha t-AD)(1+AD)=0,\\
(A-\alpha)(1+tA)=0,\quad (D-t)(1+\alpha D)=0.
\end{gathered} \tag{4.13c}$$

Можно выделить две возможности:

$$\begin{gathered}
\beta=\alpha t,\quad B=AD,\\
D=-\frac{1}{A},\quad (A-\alpha)(1+tA)=0;
\end{gathered} \tag{4.14a}$$

решение $(M-5)$ (см. $(K-6)$)

$$A=\alpha\ ,\qquad B=-1,\qquad D=-\frac{1}{A}\ ,\qquad \beta=At\ ,$$

$$G=\left|\begin{array}{cc} (Atm_0-\vec{m}\vec{\sigma}) & (Am_0+A\vec{m}\vec{\sigma}) \\ (tm_0-A^{-1}\vec{m}\vec{\sigma}) & (m_0+\vec{m}\vec{\sigma}) \end{array}\right|; \tag{4.14b}$$

решение $(M-6)$ (см. $(K-7)$)

$$A \, , \alpha \neq 0 \; , \qquad D = t = -\frac{1}{A} \; , \qquad B = -1 \; , \; \beta = -\frac{\alpha}{A} \; ,$$

$$G = \begin{vmatrix} (-\alpha A^{-1} t m_0 - \vec{m}\vec{\sigma}) & (\alpha m_0 + A\vec{m}\vec{\sigma}) \\ (A^{-1} m_0 + A^{-1}\vec{m}\vec{\sigma}) & (m_0 + \vec{m}\vec{\sigma}) \end{vmatrix} . \tag{4.14c}$$

Возможность

$$\beta = \alpha t \; , \qquad B = AD \; , \qquad D = t \; , \qquad A = \alpha \tag{4.15a}$$

приводит к единственному классу решений:

решение $(M-7)$,

$$A = \alpha \neq 0, \qquad D = t \neq 0, \qquad B = \beta = AD,$$

$$G = \begin{vmatrix} ADM & AM \\ DM & M \end{vmatrix} ,$$

$$G'G = \begin{vmatrix} ADM' & AM' \\ DM' & M' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ADM & AM \\ DM & M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AD(1+DA)M'M & A(1+DA)M'M \\ D(1+DA)M'M & (1+DA)M'M \end{vmatrix} . \tag{4.15b}$$

5 Один независимый вектор: вариант I(n)

Теперь предстоит исследовать **варианты I(n)** и **I(l)**. Едва ли следует ожидать эквивалентности этих вариантов предыдущим. Скорее всего, здесь будет также много вырожденных случаев.

Рассмотрим **вариант I(n)**:

$$\mathbf{k} = A \, \mathbf{n} \; , \; k_0 = \alpha \, n_0 \; , \; \mathbf{m} = B \, \mathbf{n} \; , \; m_0 = \beta \, n_0 \; , \; \mathbf{l} = D \, \mathbf{n} \; , \; l_0 = t \, n_0 \; . \tag{5.1}$$

Закон умножения дает

$$\begin{aligned} k_0'' &= \alpha^2 \, n_0' n_0 + A^2 \mathbf{n}'\mathbf{n} + t \, n_0' n_0 + D \, \mathbf{n}'\mathbf{n} \; , \\ m_0'' &= \beta^2 \, n_0' n_0 + B^2 \mathbf{n}'\mathbf{n} + t \, n_0' n_0 + D \, \mathbf{n}'\mathbf{n} \; , \\ n_0'' &= \alpha \, n_0' n_0 + A \, \mathbf{n}'\mathbf{n} + \beta \, n_0' n_0 + B \, \mathbf{n}'\mathbf{n} \; , \\ l_0'' &= t\alpha \, n_0' n_0 + DA \, \mathbf{n}'\mathbf{n} + \beta t \, n_0' n_0 + BD \, \mathbf{n}'\mathbf{n} \; , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'' &= \alpha A \, n_0' \mathbf{n} + \alpha A \, \mathbf{n}' n_0 + iA^2 \, \mathbf{n}' \times \mathbf{n} + D \, n_0' \mathbf{n} + t \, \mathbf{n}' n_0 + iD \, \mathbf{n}' \times \mathbf{n} \; , \\ \mathbf{m}'' &= \beta B \, n_0' \mathbf{n} + \beta B \, \mathbf{n}' n_0 + iB^2 \, \mathbf{n}' \times \mathbf{n} + t \, n_0' \mathbf{n} + D \, \mathbf{n}' n_0 + iD \, \mathbf{n}' \times \mathbf{n} \; , \\ \mathbf{n}'' &= \alpha \, n_0' \mathbf{n} + A \, \mathbf{n}' n_0 + iA \, \mathbf{n}' \times \mathbf{n} + B \, n_0' \mathbf{n} + \beta \, \mathbf{n}' n_0 + iB \, \mathbf{n}' \times \mathbf{n} \; , \\ \mathbf{l}'' &= tA \, n_0' \mathbf{n} + D\alpha \, \mathbf{n}' n_0 + iDA \, \mathbf{n}' \times \mathbf{n} + \beta D \, n_0' \mathbf{n} + Bt \, \mathbf{n}' n_0 + iBD \, \mathbf{n}' \times \mathbf{n} \; . \end{aligned}$$

Требуем

$k_0'' = \alpha \, n_0''$:

$$(\alpha^2 + t) \, n_0' n_0 + (A^2 + D) \, \mathbf{n}'\mathbf{n} = \alpha(\alpha + \beta) \, n_0' n_0 + \alpha(A + B) \, \mathbf{n}'\mathbf{n} \; ,$$

$$(\alpha^2 + t) = \alpha(\alpha + \beta) \; , \qquad (A^2 + D) = \alpha(A + B) \; ; \tag{5.2a}$$

$\underline{m''_0 = \beta\, n''_0 :}$

$$(\beta^2 + t)\; n'_0 n_0 + (B^2 + D)\; \mathbf{n}'\mathbf{n} = \beta\;(\alpha + \beta)\; n'_0 n_0 + \beta(A + B)\; \mathbf{n}'\mathbf{n}\;,$$

$$(\beta^2 + t) = \beta\;(\alpha + \beta)\;, \qquad (B^2 + D) = \beta(A + B)\;; \tag{5.2b}$$

$\underline{l''_0 = t\, n''_0 :}$

$$(t\alpha + \beta t)\; n'_0 n_0 + (DA + BD)\; \mathbf{n}'\mathbf{n} = t\;(\alpha + \beta)\; n'_0 n_0 + t(A + B)\; \mathbf{n}'\mathbf{n}\;,$$

$$(t\alpha + \beta t) = t\;(\alpha + \beta)\;, \qquad (DA + BD) = t(A + B)\;; \tag{5.2c}$$

$\underline{\mathbf{k}'' = A\, \mathbf{n}'' :}$

$$\begin{gathered}(\alpha A + D)\; n'_0\mathbf{n} + (\alpha A + t)\; \mathbf{n}' n_0 + i(A^2 + D)\; \mathbf{n}' \times \mathbf{n} = \\ A(\alpha + B)\; n'_0\mathbf{n} + A(A + \beta)\; \mathbf{n}' n_0 + iA(A + B)\; \mathbf{n}' \times \mathbf{n}\;, \\ (\alpha A + D) = A(\alpha + B), \qquad (\alpha A + t) = A(A + \beta)\;, \qquad (A^2 + D) = A(A + B)\;;\end{gathered} \tag{5.3a}$$

$\underline{\mathbf{m}'' = B\, \mathbf{n}'' :}$

$$\begin{gathered}(\beta B + t)\; n'_0\mathbf{n} + (\beta B + D)\; \mathbf{n}' n_0 + i(B^2 + D)\; \mathbf{n}' \times \mathbf{n} = \\ B(\alpha + B)\; n'_0\mathbf{n} + B(A + \beta)\; \mathbf{n}' n_0 + iB(A + B)\; \mathbf{n}' \times \mathbf{n}\;, \\ (\beta B + t) = B(\alpha + B)\;, \qquad (\beta B + D) = B(A + \beta)\;, \qquad (B^2 + D) = B(A + B)\;;\end{gathered} \tag{5.3b}$$

$\underline{\mathbf{l}'' = D\, \mathbf{n}'' :}$

$$\begin{gathered}(tA + \beta D)\; n'_0\mathbf{n} + (D\alpha + Bt)\; \mathbf{n}' n_0 + i(DA + BD)\; \mathbf{n}' \times \mathbf{n} = \\ D(\alpha + B)\; n'_0\mathbf{n} + D(A + \beta)\; \mathbf{n}' n_0 + iD(A + B)\; \mathbf{n}' \times \mathbf{n}\;, \\ (tA + \beta D) = D(\alpha + B)\;, \quad (D\alpha + Bt) = D(A + \beta)\;, \quad (DA + BD) = D(A + B)\;.\end{gathered} \tag{5.3c}$$

Таким образом, инвариантность формул (5.1) относительно умножения матриц требует выполнения уравнений:

$$\begin{gathered}(\alpha^2 + t) = \alpha(\alpha + \beta)\;, \qquad (A^2 + D) = \alpha(A + B)\;, \\ (\beta^2 + t) = \beta\;(\alpha + \beta)\;, \qquad (B^2 + D) = \beta(A + B)\;, \\ t(\alpha + \beta) = t\;(\alpha + \beta)\;, \qquad D(A + B) = t(A + B)\;,\end{gathered} \tag{5.4a}$$

$$\begin{gathered}(\alpha A + D) = A(\alpha + B)\;, \qquad (\alpha A + t) = A(A + \beta)\;, \qquad (A^2 + D) = A(A + B)\;, \\ (\beta B + t) = B(\alpha + B)\;, \qquad (\beta B + D) = B(A + \beta)\;, \qquad (B^2 + D) = B(A + B)\;, \\ (tA + \beta D) = D(\alpha + B)\;, \qquad (D\alpha + Bt) = D(A + \beta)\;, \qquad D(A + B) = D(A + B)\;.\end{gathered}$$

Эта система эквивалентна следующей:

$$\begin{gathered}t = \alpha\beta\;, \qquad (A^2 + D) = \alpha(A + B)\;, \\ (B^2 + D) = \beta(A + B)\;, \\ (D - t)(A + B) = 0\;, \\ D = AB, \qquad (\alpha A + t) = A(A + \beta)\;, \\ (\beta B + t) = B(\alpha + B)\;, \\ (tA + \beta D) = D(\alpha + B)\;, \qquad (D\alpha + Bt) = D(A + \beta)\;.\end{gathered} \tag{5.4b}$$

Исключим переменные D и t:

$$D = AB\ , \qquad t = \alpha\beta\ ; \tag{5.5a}$$

выпишем оставшиеся уравнения:

$$\begin{gathered}(A-\alpha)(A+B)=0\ ,\\ (B-\beta)(B+A)=0\ ,\\ (AB-\alpha\beta)(A+B)=0\ ,\\ (A-\alpha)(A+\beta)=0\ ,\\ (B-\beta)(B+\alpha)=0\ ,\\ A(\beta-B)(\alpha+B)=0\ ,\\ B(\alpha-A)(A+\beta)=0\ .\end{gathered} \tag{5.5b}$$

Предположим

$$A+B\neq 0\ , \tag{5.6a}$$

тогда (5.5b) дает

$$A=\alpha\ , \qquad B=\beta\ , \qquad B(A-B)=0\ . \tag{5.6b}$$

Здесь возникают два решения:

решение $(N-1)$,

$$A=\alpha\ ,\ B=\beta=0,\ D=t=0, \qquad G=\begin{vmatrix} AN & N\\ 0 & 0\end{vmatrix}; \tag{5.7}$$

решение $(N-2)$,

$$A=\alpha\ ,\ B=\beta=A,\ D=t=A^2, \qquad G=\begin{vmatrix} AN & N\\ A^2N & AN\end{vmatrix},$$

$$G'G=\begin{vmatrix} AN' & N'\\ A^2N' & AN'\end{vmatrix}\begin{vmatrix} AN & N\\ A^2N & AN\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A\,2AN'N & 2AN'N\\ A^2\,2AN'N & A\,2AN'N\end{vmatrix}. \tag{5.8}$$

Теперь рассмотрим случай

$$A+B=0\ , \qquad B=-A\ ; \tag{5.9a}$$

при этом из (5.5b) получаем

$$\begin{gathered}B=-A\ , \qquad D=-A^2\ , \qquad t=\alpha\beta\ ,\\ (A-\alpha)(A+\beta)=0\ ,\\ A(\beta+A)(\alpha-A)=0\ ,\\ A(\alpha-A)(A+\beta)=0\ .\end{gathered} \tag{5.9b}$$

Возможны два решения:

<u>решение $(N-3)$</u>,

$$\beta = B = -A \;, \qquad D = -A^2 \;, \qquad t = -\alpha A \;,$$

$$G = \left| \begin{array}{cc} \alpha n_0 + A\mathbf{n}\vec{\sigma} & n_0 + \mathbf{n}\vec{\sigma} \\ -\alpha A n_0 - A^2\mathbf{n}\vec{\sigma} & -An_0 - A\mathbf{n}\vec{\sigma} \end{array} \right| , \qquad \det G = 0 \;; \tag{5.10}$$

<u>решение $(N-4)$</u>,

$$A = +\alpha \;, \qquad B = -A \;, \qquad D = -A^2 \;, \qquad t = A\beta \;,$$

$$G = \left| \begin{array}{cc} An_0 + A\mathbf{n}\vec{\sigma} & n_0 + \mathbf{n}\vec{\sigma} \\ \beta A n_0 - A^2\mathbf{n}\vec{\sigma} & \beta n_0 - A\mathbf{n}\vec{\sigma} \end{array} \right| , \qquad \det G = 0 \;. \tag{5.11}$$

6 Один независимый вектор: вариант I(l)

Теперь предстоит исследовать **вариант I(l)**:

$$\mathbf{k} = A\,\mathbf{l}\;,\; k_0 = \alpha\, l_0\;,\; \mathbf{m} = B\,\mathbf{l}\;,\; m_0 = \beta\, l_0\;,\; \mathbf{n} = D\,\mathbf{l}\;,\; n_0 = t\, l_0\;. \tag{6.1}$$

Закон умножения $(2.2a, b)$ принимает вид:

$$\begin{gathered} k_0'' = \alpha^2 l_0'\, l_0 + A^2\mathbf{l}'\,\mathbf{l} + tl_0'\, l_0 + D\mathbf{l}'\,\mathbf{l}\;, \\ m_0'' = \beta^2 l_0'\, l_0 + B^2\mathbf{l}'\,\mathbf{l} + tl_0'\, l_0 + D\mathbf{l}'\,\mathbf{l}\;, \\ n_0'' = \alpha t l_0'\, l_0 + AD\mathbf{l}'\,\mathbf{l} + \beta t l_0'\, l_0 + BD\mathbf{l}'\,\mathbf{l}\;, \\ l_0'' = \alpha l_0'\, l_0 + A\mathbf{l}'\,\mathbf{l} + \beta l_0'\, l_0 + B\mathbf{l}'\,\mathbf{l}\;, \end{gathered} \tag{6.2a}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{k}'' = A\alpha l_0'\,\mathbf{l} + A\alpha\mathbf{l}'\, l_0 + i\, A^2\mathbf{l}'\times\mathbf{l} + tl_0'\,\mathbf{l} + D\mathbf{l}'\, l_0 + i\, D\mathbf{l}'\times\mathbf{l}\;, \\ \mathbf{m}'' = B\beta l_0'\,\mathbf{l} + B\beta\mathbf{l}'\, l_0 + i\, B^2\mathbf{l}'\times\mathbf{l} + Dl_0'\,\mathbf{l} + t\mathbf{l}'\, l_0 + i\, D\mathbf{l}'\times\mathbf{l}\;, \\ \mathbf{n}'' = \alpha D l_0'\,\mathbf{l} + At\mathbf{l}'\, l_0 + i\, AD\mathbf{l}'\times\mathbf{l} + Btl_0'\,\mathbf{l} + \beta D\mathbf{l}'\, l_0 + i\, BD\mathbf{l}'\times\mathbf{l}\;, \\ \mathbf{l}'' = Al_0'\,\mathbf{l} + \alpha\mathbf{l}'\, l_0 + i\, A\mathbf{l}'\times\mathbf{l} + \beta l_0'\,\mathbf{l} + B\mathbf{l}'\, l_0 + i\, B\mathbf{l}'\times\mathbf{l}\;. \end{gathered} \tag{6.2b}$$

Требуем, чтобы линейные ограничения сохранялись при перемножении матриц:

$$k_0'' = \alpha\, l_0'' \qquad \Longrightarrow$$

$$\begin{gathered} (\alpha^2 + t)l_0'\, l_0 + (A^2 + D)\mathbf{l}'\,\mathbf{l} = \alpha(\alpha+\beta)l_0'\, l_0 + \alpha(A+B)\mathbf{l}'\,\mathbf{l} \;\;\Longrightarrow \\ (\alpha^2 + t) = \alpha(\alpha+\beta)\;, \qquad (A^2 + D) = \alpha(A+B)\;; \end{gathered}$$

$$m_0'' = \beta\, l_0'' \qquad \Longrightarrow$$

$$\begin{gathered} (\beta^2 + t)l_0'\, l_0 + (B^2 + D)\mathbf{l}'\,\mathbf{l} = \beta(\alpha+\beta)l_0'\, l_0 + \beta(A+B)\mathbf{l}'\,\mathbf{l}] \;\;\Longrightarrow \\ (\beta^2 + t) = \beta(\alpha+\beta)\;, \qquad (B^2 + D) = \beta(A+B)\;; \end{gathered}$$

$$n_0'' = t\, l_0'' \qquad \Longrightarrow$$

$$\begin{gathered} (\alpha t + \beta t)l_0'\, l_0 + (AD + BD)\mathbf{l}'\,\mathbf{l} = t(\alpha+\beta)l_0'\, l_0 + t(A+B)\mathbf{l}'\,\mathbf{l} \;\;\Longrightarrow \\ (\alpha t + \beta t) = t(\alpha+\beta)\;, \qquad (AD + BD) = t(A+B)\;; \end{gathered}$$

$$\mathbf{k}'' = A\,\mathbf{l}'' \qquad \Longrightarrow$$
$$(A\alpha + t)l'_0\,\mathbf{l} + (A\alpha + D)\mathbf{l}'\,l_0 + i\,(A^2 + D)\mathbf{l}' \times \mathbf{l} =$$
$$A(A + \beta)l'_0\,\mathbf{l} + A(\alpha + B)\mathbf{l}'\,l_0 + i\,A(A + B)\mathbf{l}' \times \mathbf{l} \Longrightarrow$$
$$(A\alpha + t) = A(A + \beta)\,, \qquad (A\alpha + D) = A(\alpha + B)\,, \qquad (A^2 + D) = A(A + B)\,;$$

$$\mathbf{m}'' = B\,\mathbf{l}'' \qquad \Longrightarrow$$
$$(B\beta + D)l'_0\,\mathbf{l} + (B\beta + t)\mathbf{l}'\,l_0 + i\,(B^2 + D)\mathbf{l}' \times \mathbf{l} =$$
$$B(A + \beta)l'_0\,\mathbf{l} + B(\alpha + B)\mathbf{l}'\,l_0 + i\,B(A + B)\mathbf{l}' \times \mathbf{l} \Longrightarrow$$
$$(B\beta + D) = B(A + \beta)\,, \qquad (B\beta + t) = B(\alpha + B)\,, \qquad (B^2 + D) = B(A + B)\,;$$

$$\mathbf{n}'' = D\,\mathbf{l}'' \qquad \Longrightarrow$$
$$(\alpha D + Bt)l'_0\,\mathbf{l} + (At + \beta D)\mathbf{l}'\,l_0 + i\,(AD + BD)\mathbf{l}' \times \mathbf{l} =$$
$$D(A + \beta)l'_0\,\mathbf{l} + D(\alpha + B)\mathbf{l}'\,l_0 + i\,D(A + B)\mathbf{l}' \times \mathbf{l} \Longrightarrow$$
$$(\alpha D + Bt) = D(A + \beta)\,, \qquad (At + \beta D) = D(\alpha + B)\,, \qquad (AD + BD) = D(A + B)\,.$$

Соберем вместе полученные уравнения:

$$\begin{gathered}
(\alpha^2 + t) = \alpha(\alpha + \beta)\,, \qquad (A^2 + D) = \alpha(A + B)\,,\\
(\beta^2 + t) = \beta(\alpha + \beta)\,, \qquad (B^2 + D) = \beta(A + B)\,,\\
(\alpha t + \beta t) = t(\alpha + \beta)\,, \qquad (AD + BD) = t(A + B)\,,\\
\\
(A\alpha + t) = A(A + \beta)\,, \quad (A\alpha + D) = A(\alpha + B)\,, \qquad (A^2 + D) = A(A + B)\,,\\
(B\beta + D) = B(A + \beta)\,, \quad (B\beta + t) = B(\alpha + B)\,, \qquad (B^2 + D) = B(A + B)\,,\\
(\alpha D + Bt) = D(A + \beta)\,, \quad (At + \beta D) = D(\alpha + B)\,, \qquad (AD + BD) = D(A + B)\,.
\end{gathered} \tag{6.3}$$

Система уравнений (6.3) эквивалентна следующей:

$$\begin{gathered}
t = \alpha\beta\,, \qquad (A^2 + D) = \alpha(A + B)\,,\\
t = \beta\alpha\,, \qquad (B^2 + D) = \beta(A + B)\,,\\
0 = 0\,, \qquad (D - t)(A + B) = 0\,,\\
\\
(A\alpha + t) = A(A + \beta)\,, \qquad (A\alpha + D) = A(\alpha + B)\,, \qquad D = AB\,,\\
(B\beta + D) = B(A + \beta)\,, \qquad (B\beta + t) = B(\alpha + B)\,, \qquad D = AB\,,\\
(\alpha D + Bt) = D(A + \beta)\,, \qquad (At + \beta D) = D(\alpha + B)\,, \qquad 0 = 0\,.
\end{gathered} \tag{6.4}$$

Исключаем переменные t и D:

$$t = \alpha\beta\,, \qquad D = AB\,; \tag{6.5a}$$

приходим к уравнениям:

$$
\begin{gathered}
(A-\alpha)(A+B)=0\ ,\\
(B-\beta)(A+B)=0\ ,\\
(AB-\alpha\beta)(A+B)=0\ ,\\
(A-\alpha)(A+\beta)=0\ ,\\
(B-\beta)(\alpha+B)=0\ ,\\
A(\beta-B)(\alpha+B)=0\ ,\\
B(\alpha-A)(A+\beta)=0\ .
\end{gathered}
\tag{6.5b}
$$

Поскольку они совпадают с уравнениями (5.5b), то можно воспользоваться уже готовыми результатами:

решение $(L-1)$,

$$
A=\alpha\ ,\ B=\beta=0\ ,\ D=t=0\ ,\qquad G=\left|\begin{array}{cc} AL & 0\\ L & 0\end{array}\right|,
$$

$$
G'G=\left|\begin{array}{cc} AL & 0\\ L & 0\end{array}\right|\left|\begin{array}{cc} AL' & L'\\ 0 & 0\end{array}\right|=\left|\begin{array}{cc} AL'L & 0\\ L'L & 0\end{array}\right|; \tag{6.6}
$$

решение $(L-2)$,

$$
A=\alpha\ ,\ B=\beta=A\ ,\ D=t=A^2\ ,\qquad G=\left|\begin{array}{cc} AL & A^2L\\ L & AL\end{array}\right|,
$$

$$
G'G=\left|\begin{array}{cc} AL' & A^2L'\\ L' & AL'\end{array}\right|\left|\begin{array}{cc} AL & A^2L\\ L & AL\end{array}\right|=\left|\begin{array}{cc} A\,2AL'L & A^2\,2AL'L\\ 2AL'L & A\,2AL'L\end{array}\right|; \tag{6.7}
$$

решение $(L-3)$,

$$
\beta=B=-A\ ,\qquad D=-A^2\ ,\qquad t=-\alpha A\ ,
$$

$$
G=\left|\begin{array}{cc} \alpha l_0+A\mathbf{l}\vec{\sigma} & -\alpha A l_0-A^2\mathbf{l}\\ l_0+\mathbf{l}\vec{\sigma}\vec{\sigma} & -Al_0-A\mathbf{l}\vec{\sigma}\end{array}\right|,\qquad \det G=0\ ; \tag{6.8}
$$

решение $(L-4)$,

$$
A=+\alpha\ ,\qquad B=-A\ ,\qquad D=-A^2\ ,\qquad t=A\beta\ ,
$$

$$
G=\left|\begin{array}{cc} Al_0+A\mathbf{l}\vec{\sigma} & \beta A l_0-A^2\mathbf{l}\vec{\sigma}\\ l_0+\mathbf{l}\vec{\sigma} & \beta l_0-A\mathbf{l}\vec{\sigma}\end{array}\right|,\qquad \det G=0\ . \tag{6.9}
$$

7 Два независимых вектора: вариант II(k,m)

Рассмотрим теперь случай двух независимых векторов. Исследуем **вариант II(k,m)**:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n}&=A\mathbf{k}+B\mathbf{m}\ ,\quad n_0=\alpha k_0+\beta m_0\ ,\\
\mathbf{l}&=C\mathbf{k}+D\mathbf{m}\ ,\quad l_0=sk_0+tm_0\ .
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

Формулы умножения параметров принимают вид:

$$
\begin{aligned}
&k_0'' = k_0'\ k_0 + \mathbf{k}'\ \mathbf{k} + (\alpha k_0' + \beta m_0')(s k_0 + t m_0) + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}')(C\mathbf{k} + D\mathbf{m})\ ,\\
&m_0'' = m_0'\ m_0 + \mathbf{m}'\ \mathbf{m} + (s k_0' + t m_0')(\alpha k_0 + \beta m_0 + (C\mathbf{k}' + D\mathbf{m}')(A\mathbf{k} + B\mathbf{m})\ ,\\
&n_0'' = k_0'(\alpha k_0 + \beta m_0) + \mathbf{k}'(A\mathbf{k} + B\mathbf{m}) + (\alpha k_0' + \beta m_0')m_0 + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}')\mathbf{m}\ ,\\
&l_0'' = (s k_0' + t m_0')k_0 + (C\mathbf{k}' + D\mathbf{m}')\mathbf{k} + m_0'(s k_0 + t m_0) + \mathbf{m}'(C\mathbf{k} + D\mathbf{m})\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{k}'' = k_0'\ \mathbf{k} + \mathbf{k}'\ k_0 + i\ \mathbf{k}' \times \mathbf{k} +
$$

$$
(\alpha k_0' + \beta m_0')(C\mathbf{k} + D\mathbf{m}) + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}')(s k_0 + t m_0) + i\ (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}') \times (C\mathbf{k} + D\mathbf{m})\ ,
$$

$$
\mathbf{m}'' = m_0'\ \mathbf{m} + \mathbf{m}'\ m_0 + i\ \mathbf{m}' \times \mathbf{m} +
$$

$$
(s k_0' + t m_0')(A\mathbf{k} + B\mathbf{m}) + (C\mathbf{k}' + D\mathbf{m}')(\alpha k_0 + \beta m_0) + i\ (C\mathbf{k}' + D\mathbf{m}') \times (A\mathbf{k} + B\mathbf{m})\ ,
$$

$$
\mathbf{n}'' = k_0'(A\mathbf{k} + B\mathbf{m}) + \mathbf{k}'(\alpha k_0 + \beta m_0) + i\ \mathbf{k}' \times (A\mathbf{k} + B\mathbf{m}) +
$$

$$
(\alpha k_0' + \beta m_0')\mathbf{m} + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}')m_0 + i\ (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}') \times \mathbf{m}\ ,
$$

$$
\mathbf{l}'' = (s k_0' + t m_0')\mathbf{k} + (C\mathbf{k}' + D\mathbf{m}')k_0 + i\ (C\mathbf{k}' + D\mathbf{m}') \times \mathbf{k} +
$$

$$
m_0'(C\mathbf{k} + D\mathbf{m}) + \mathbf{m}'(s k_0 + t m_0) + i\ \mathbf{m}' \times (C\mathbf{k} + D\mathbf{m})\ .
$$

Требуем выполнения равенства:

$$
\alpha k_0'' + \beta m_0'' = n_0''\ , \tag{7.2a}
$$

т. е.

$$
\alpha\ [\ k_0'\ k_0 + \mathbf{k}'\ \mathbf{k} + (\alpha k_0' + \beta m_0')(s k_0 + t m_0) + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}')(C\mathbf{k} + D\mathbf{m})\ ] +
$$

$$
\beta\ [\ m_0'\ m_0 + \mathbf{m}'\ \mathbf{m} + (s k_0' + t m_0')(\alpha k_0 + \beta m_0 + (C\mathbf{k}' + D\mathbf{m}')(A\mathbf{k} + B\mathbf{m})\ ] =
$$

$$
k_0'(\alpha k_0 + \beta m_0) + \mathbf{k}'(A\mathbf{k} + B\mathbf{m}) + (\alpha k_0' + \beta m_0')m_0 + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}')\mathbf{m}\ ,
$$

отсюда приходим к уравнениям

$$
\begin{aligned}
&k_0'k_0: && \alpha + \alpha^2 s + \alpha\beta s = \alpha\ ,\\
&m_0'm_0: && \alpha\beta t + \beta + t\beta^2 = \beta\ ,\\
&k_0'm_0: && \alpha^2 t + \beta^2 s = \beta + \alpha\ ,\\
&m_0'k_0: && \alpha\beta s + \alpha\beta t = 0\ ,\\
&\mathbf{m}'\mathbf{k}: && \alpha BC + \beta AD = 0\ ,\\
&\mathbf{k}'\mathbf{m}: && \alpha AD + \beta CB = B + A\ ,\\
&\mathbf{k}'\mathbf{k}: && \alpha + \alpha AC + \beta AC = A\ ,\\
&\mathbf{m}'\mathbf{m}: && \alpha BD + \beta + \beta DB = B\ .
\end{aligned} \tag{7.2b}
$$

Требуем

$$sk_0'' + tm_0'' = l_0'' \ , \tag{7.3a}$$

$$s \ [\ k_0' \ k_0 + \mathbf{k}' \ \mathbf{k} + (\alpha k_0' + \beta m_0')(sk_0 + tm_0) + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}')(C\mathbf{k} + D\mathbf{m}) \ ] +$$

$$t \ [\ m_0' \ m_0 + \mathbf{m}' \ \mathbf{m} + (sk_0' + tm_0')(\alpha k_0 + \beta m_0 + (C\mathbf{k}' + D\mathbf{m}')(A\mathbf{k} + B\mathbf{m}) \ ] =$$

$$(sk_0' + tm_0')k_0 + (C\mathbf{k}' + D\mathbf{m}')\mathbf{k} + m_0'(sk_0 + tm_0) + \mathbf{m}'(C\mathbf{k} + D\mathbf{m}) \, ,$$

отсюда приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}
k_0'k_0 : \quad & s + s^2\alpha + ts\alpha = s \ , \\
m_0'm_0 : \quad & \beta st + t + \beta t^2 = t \ , \\
k_0'm_0 : \quad & st\alpha + st\beta = 0 \ , \\
m_0'k_0 : \quad & \beta s^2 + \alpha t^2 = t + s \ , \\
\mathbf{k}'\mathbf{m} : \quad & sAD + tCB = 0, \\
\mathbf{m}'\mathbf{k} : \quad & sBC + tAD = C + D \ , \\
\mathbf{k}'\mathbf{k} : \quad & s + sAC + tAC = C \ , \\
\mathbf{m}'\mathbf{m} : \quad & sBD + t + tBD = D \ .
\end{aligned} \tag{7.3b}$$

Требуем

$$A\mathbf{k}'' + B\mathbf{m}'' = \mathbf{n}'' \ , \tag{7.4a}$$

т. е.

$$A \ [\ k_0' \ \mathbf{k} + \mathbf{k}' \ k_0 + i \ \mathbf{k}' \times \mathbf{k} +$$

$$(\alpha k_0' + \beta m_0')(C\mathbf{k} + D\mathbf{m}) + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}')(sk_0 + tm_0) + i \ (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}') \times (C\mathbf{k} + D\mathbf{m}) \ ] +$$

$$B \ [\ m_0' \ \mathbf{m} + \mathbf{m}' \ m_0 + i \ \mathbf{m}' \times \mathbf{m} +$$

$$(sk_0' + tm_0')(A\mathbf{k} + B\mathbf{m}) + (C\mathbf{k}' + D\mathbf{m}')(\alpha k_0 + \beta m_0) + i \ (C\mathbf{k}' + D\mathbf{m}') \times (A\mathbf{k} + B\mathbf{m}) \ ] =$$

$$k_0'(A\mathbf{k} + B\mathbf{m}) + \mathbf{k}'(\alpha k_0 + \beta m_0) + i \ \mathbf{k}' \times (A\mathbf{k} + B\mathbf{m}) +$$

$$(\alpha k_0' + \beta m_0')\mathbf{m} + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}')m_0 + i \ (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}') \times \mathbf{m} \ .$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
k_0'\mathbf{k} : \quad & A + \alpha AC + sBA = A \ , \\
\mathbf{m}'m_0 : \quad & tAB + B + \beta BD = B \ , \\
\mathbf{k}'k_0 : \quad & A + sA^2 + \alpha BC = \alpha \ , \\
m_0'\mathbf{m} : \quad & \beta AD + B + tB^2 = \beta \ , \\
k_0'\mathbf{m} : \quad & \alpha AD + sB^2 = B + \alpha \ , \\
\mathbf{k}'m_0 : \quad & tA^2 + \beta CB = \beta + A \ ,
\end{aligned} \tag{7.4b}$$

$$
\begin{aligned}
m_0'\mathbf{k}: &\quad \beta AC + tAB = 0\ ,\\
\mathbf{m}'k_0: &\quad sAB + \alpha BD = 0\ ,\\
\mathbf{k}'\times\mathbf{k}: &\quad A + A^2C + BCA = A\ ,\\
\mathbf{m}'\times\mathbf{m}: &\quad ABD + B + DB^2 = B\ ,\\
\mathbf{k}'\times\mathbf{m}: &\quad A^2D + CB^2 = B + A\ ,\\
\mathbf{m}'\times\mathbf{k}: &\quad ABC + ADB = 0\ .
\end{aligned}
$$

Теперь требуем

$$
C\mathbf{k}'' + D\mathbf{m}'' = \mathbf{l}''\ , \tag{7.5a}
$$

т. е.

$$
C\ [\ k_0'\ \mathbf{k} + \mathbf{k}'\ k_0 + i\ \mathbf{k}'\times\mathbf{k} +
$$

$$
(\alpha k_0' + \beta m_0')(C\mathbf{k} + D\mathbf{m}) + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}')(sk_0 + tm_0) + i\ (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}')\times(C\mathbf{k} + D\mathbf{m})] +
$$

$$
D\ [\ m_0'\ \mathbf{m} + \mathbf{m}'\ m_0 + i\ \mathbf{m}'\times\mathbf{m} +
$$

$$
(sk_0' + tm_0')(A\mathbf{k} + B\mathbf{m}) + (C\mathbf{k}' + D\mathbf{m}')(\alpha k_0 + \beta m_0) + i\ (C\mathbf{k}' + D\mathbf{m}')\times(A\mathbf{k} + B\mathbf{m}) =
$$

$$
(sk_0' + tm_0')\mathbf{k} + (C\mathbf{k}' + D\mathbf{m}')k_0 + i\ (C\mathbf{k}' + D\mathbf{m}')\times\mathbf{k} +
$$

$$
m_0'(C\mathbf{k} + D\mathbf{m}) + \mathbf{m}'(sk_0 + tm_0) + i\ \mathbf{m}'\times(C\mathbf{k} + D\mathbf{m})\ .
$$

Отсюда

$$
\begin{aligned}
k_0'\mathbf{k}: &\quad C + \alpha C^2 + sAD = s\ ,\\
\mathbf{m}'m_0: &\quad tCB + D + \beta D^2 = t\ ,\\
\mathbf{k}'k_0: &\quad C + sAC + \alpha CD = C\ ,\\
m_0'\mathbf{m}: &\quad \beta CD + D + tBD = D\ ,\\
k_0'\mathbf{m}: &\quad \alpha DC + sBD = 0\ ,\\
\mathbf{k}'m_0: &\quad tAC + \beta CD = 0\ ,\\
m_0'\mathbf{k}: &\quad \beta C^2 + tAD = t + C\ ,\\
+\mathbf{m}'k_0: &\quad sCB + \alpha D^2 = D + s\ ,\\
\mathbf{k}'\times\mathbf{k}: &\quad C + AC^2 + DCA = C\ ,\\
\mathbf{m}'\times\mathbf{m}: &\quad CBD + D + BD^2 = D\ ,\\
\mathbf{k}'\times\mathbf{m}: &\quad ACD + CBD = 0\ ,\\
\mathbf{m}'\times\mathbf{k}: &\quad BC^2 + AD^2 = D + C\ .
\end{aligned} \tag{7.5b}
$$

Соберем полученные уравнения:

$$
\begin{aligned}
&\alpha s(\alpha+\beta)=0\ , && \beta t(\alpha+\beta)=0\ ,\\
&\alpha^2 t+\beta^2 s=\beta+\alpha\ , && \alpha\beta(s+t)=0\ ,\\
&\alpha BC+\beta AD=0\ , && \alpha AD+\beta BC=B+A\ ,\\
&\alpha+(\alpha+\beta)AC=A\ , && \beta+(\alpha+\beta)BD=B\ ,\\
&s\alpha(s+t)=0\ , && \beta t(s+t)=0\ ,\\
&st(\alpha+\beta)=0\ , && \beta s^2+\alpha t^2=t+s\ ,\\
&sAD+tCB=0, && sBC+tAD=C+D\ ,\\
&s+AC(s+t)=C\ , && t+BD(t+s)=D\ ,\\
&A(\alpha C+sB)=0\ , && B(\beta D+tA)=0\ ,\\
&A+sA^2+\alpha BC=\alpha\ , && B+tB^2+\beta AD=\beta\ ,\\
&\alpha AD+sB^2=B+\alpha\ , && \beta BC+tA^2=A+\beta\ ,\\
&\beta AC+tAB=0\ , && \alpha BD+sAB=0\ ,\\
&A+AC(A+B)=A\ , && B+BD(B+A)=B\ ,\\
&A^2D+B^2C=A+B\ , && AB(C+D)=0\ ,\\
&C+\alpha C^2+sAD=s\ , && D+\beta D^2+tBC=t\ ,\\
&C(sA+\alpha D)=0\ , && D(tB+\beta C)=0\ ,\\
&D(\alpha C+sB)=0\ , && C(\beta D+tA)=0\ ,\\
&\beta C^2+tAD=t+C\ , && \alpha D^2+sBC=D+s\ ,\\
&AC(C+D)=0\ , && BD(D+C)=0\ ,\\
&DC(A+B)=0\ , && BC^2+AD^2=D+C\ .
\end{aligned}
\qquad (7.6)
$$

Напоминаем, что речь идет о решении уравнений для коэффициентов в формулах:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{n}=A\mathbf{k}+B\mathbf{m}\ , && n_0=\alpha k_0+\beta m_0\ ,\\
&\mathbf{l}=D\mathbf{m}+C\mathbf{k}\ , && l_0=tm_0+sk_0\ .
\end{aligned}
\qquad (7.7a)
$$

Система уравнений достаточно сложная и может иметь не одно решение. При анализе мы будем предполагать, что блоки

$$
(A,\alpha)\ ,\qquad (B,\beta)\ ,\qquad (D,t)\ ,\qquad (C,s) \qquad (7.7b)
$$

могут быть нулевыми или ненулевыми целиком.

Самым простым представляется случай с 4 нулевыми блоками:

$$
(A,\alpha)=0\ ,\qquad (B,\beta)=0\ ,\qquad (D,t)=0\ ,\qquad (C,s)=0\ ; \qquad (7.8a)
$$

он приводит к очевидному решению:

решение $(KM-1)$,

$$
G=\left|\begin{array}{cc} K & 0\\ 0 & M\end{array}\right|\ . \qquad (7.8b)
$$

Можно выделить 4 случая с тремя нулевыми блоками:

$$\begin{array}{llll} (A,\alpha)\neq 0\,, & (B,\beta)=0\,, & (D,t)=0\,, & (C,s)=0\,; \\ (A,\alpha)=0\,, & (B,\beta)\neq 0\,, & (D,t)=0\,, & (C,s)\neq 0\,; \\ (A,\alpha)=0\,, & (B,\beta)=0\,, & (D,t)\neq 0\,, & (C,s)=0\,; \\ (A,\alpha)=0\,, & (B,\beta)=0\,, & (D,t)=0\,, & (C,s)\neq 0\,. \end{array} \tag{7.9a}$$

Можно выделить 6 случаев с двумя нулевыми блоками (два из них отмечены звездочками – они исследованы в предыдущих разделах):

$$\begin{array}{llll} (A,\alpha)=0\,, & (B,\beta)=0\,, & (D,t)\neq 0\,, & (C,s)\neq 0\,; \\ (A,\alpha)=0\,, & (B,\beta)\neq 0\,, & (D,t)=0\,, & (C,s)\neq 0\,; \\ (A,\alpha)=0\,, & (B,\beta)\neq 0\,, & (D,t)\neq 0\,, & (C,s)=0\,; \\ (A,\alpha)\neq 0\,, & (B,\beta)=0\,, & (D,t)\neq 0\,, & (C,s)=0\,; \\ (A,\alpha)\neq 0\,, & (B,\beta)=0\,, & (D,t)=0\,, & (C,s)\neq 0\,; \\ (A,\alpha)\neq 0\,, & (B,\beta)\neq 0\,, & (D,t)=0\,, & (C,s)=0\,. \end{array} \tag{7.9b}$$

Можно выделить 4 случая с одним нулевым блоком:

$$\begin{array}{llll} (A,\alpha)=0\,, & (B,\beta)\neq 0\,, & (D,t)\neq 0\,, & (C,s)\neq 0\,; \\ (A,\alpha)\neq 0\,, & (B,\beta)=0\,, & (D,t)\neq 0\,, & (C,s)\neq 0\,; \\ (A,\alpha)\neq 0\,, & (B,\beta)\neq 0\,, & (D,t)=0\,, & (C,s)\neq 0\,; \\ (A,\alpha)\neq 0\,, & (B,\beta)\neq 0\,, & (D,t)\neq 0\,, & (C,s)=0\,. \end{array} \tag{7.9c}$$

И возможен случай, когда все 4 блока ненулевые – он представляется самым сложным.

Начинаем с более простых случаев. Пусть (см. (7.9a))

$$(A,\alpha)\neq 0\,, \qquad (B,\beta)=0\,, \qquad (D,t)=0\,, \qquad (C,s)=0\,; \tag{7.10}$$

система уравнений (7.6) принимает простой вид и дает решение (7.8).

Пусть (см. (7.9a))

$$(A,\alpha)=0\,, \qquad (B,\beta)\neq 0\,, \qquad (D,t)=0\,, \qquad (C,s)=0\,; \tag{7.11}$$

система уравнений (7.6) дает решение(7.8).

Пусть (см. (7.9a))

$$(A,\alpha)=0\,, \qquad (B,\beta)=0\,, \qquad (D,t)\neq 0\,, \qquad (C,s)=0\,; \tag{7.12}$$

система уравнений (7.6) дает решение (7.8).

Пусть (см. (7.9a))

$$(A,\alpha)=0\,, \qquad (B,\beta)=0\,, \qquad (D,t)=0\,, \qquad (C,s)\neq 0\,; \tag{7.13}$$

система уравнений (7.6) дает решение (7.8).

Рассмотрим ситуации с двумя нулевыми блоками. Пусть (см. (7.9b))

$$(A,\alpha)=0\;,\qquad (B,\beta)=0\;,\qquad (D,t)\neq 0\;,\qquad (C,s)\neq 0\;; \tag{7.14a}$$

система уравнений (7.6) принимает вид:

$$\begin{array}{ll}
0=0\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & 0=t+s\;,\\
0=0\;, & 0=C+D\;,\\
s=C\;, & t=D\;,\\
0=0\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & 0=0\;,\\
C=s\;, & D=t\;,\\
0=0\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & 0=0\;,\\
0=t+C\;, & 0=D+s\;,\\
0=0\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & 0=D+C
\end{array}$$

с решением

$$t=D\;,\qquad s=C=-D\;,\qquad (A,\alpha)=0\;,\qquad (B,\beta)=0\;. \tag{7.14b}$$

В результате из (7.7a) получаем

$$\mathbf{n}=0\;,\qquad n_0=0\;,\qquad \mathbf{l}=D(\mathbf{m}-\mathbf{k})\;,\qquad l_0=D(m_0-k_0)\;. \tag{7.14c}$$

Таким образом,

<u>решение $(KM-2)$</u>,

$$G=\left|\begin{array}{cc} K & 0\\ D(M-K) & M\end{array}\right|,$$

$$G'G=\left|\begin{array}{cc} K' & 0\\ D(M'-K') & M'\end{array}\right|\left|\begin{array}{cc} K'K & 0\\ D(M'M-K'K) & M'M\end{array}\right|. \tag{7.14d}$$

Рассматриваем случай (см. (7.9b))

$$(A,\alpha)=0\;,\qquad (B,\beta)\neq 0\;,\qquad (D,t)=0\;,\qquad (C,s)\neq 0\;; \tag{7.15a}$$

система уравнений (7.6) принимает вид:

$$\begin{array}{ll}
0=0\;, & 0=0\;,\\
\beta s=1\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & \beta C=1\;,\\
0=0\;, & \beta=B\;,\\
0=0\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & \beta s=1\;,\\
0=0\;, & sB=1\;,\\
s=C\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & B=\beta\;,\\
sB=1\;, & BC=1\;,\\
0=0\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & B=B\;,\\
BC=1\;, & 0=0\;,\\
C=s\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & 0=0\;,\\
\beta C=1\;, & BC=1\;,\\
0=0\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & BC=1\;,
\end{array}$$

что эквивалентно уравнениям:

$$s=C\;,\qquad \beta=B\;,\qquad BC=1\;. \tag{7.15b}$$

Таким образом, приходим к следующему решению:

решение $(KM-3)$,

$$(A,\alpha)=0\;,\qquad \beta=B\;,\qquad (D,t)=0\;,\qquad C=s=\frac{1}{B}\;;$$

$$\mathbf{n}=B\mathbf{m}\;,\qquad n_0=Bm_0\;,\qquad \mathbf{l}=\frac{1}{B}\mathbf{k}\;,\qquad l_0=\frac{1}{B}k_0\;; \tag{7.15c}$$

$$G = \left| \begin{array}{cc} K & BM \\ B^{-1}K & M \end{array} \right| ,$$

$$G'G = \left| \begin{array}{cc} K' & BM' \\ B^{-1}K' & M' \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} K & BM \\ B^{-1}K & M \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} (K'+M')K & B(K'+M')M \\ B^{-1}(K'+M')K & (K'+M')M \end{array} \right| . \qquad (7.15d)$$

Рассматриваем вариант (см. (7.9b))

$$(A,\alpha) \neq 0 \; , \qquad (B,\beta) = 0 \; , \qquad (D,t) = 0 \; , \qquad (C,s) \neq 0 \; ; \qquad (7.16a)$$

система уравнений (7.6) принимает вид:

$$\begin{array}{ll}
\alpha s \alpha = 0 \; , & 0 = 0 \; , \\
0 = \alpha \; , & 0 = 0 \; , \\
0 = 0 \; , & 0 = A \; , \\
\alpha + \alpha A C = A \; , & 0 = 0 \; , \\
s \alpha s = 0 \; , & 0 = 0 \; , \\
0 = 0 \; , & 0 = s \; , \\
0 = 0 \; , & 0 = C \; , \\
s + ACs = C \; , & 0 = 0 \; , \\
A \alpha C = 0 \; , & 0 = 0 \; , \\
A + sA^2 = \alpha \; , & 0 = 0 \; , \\
0 = \alpha \; , & 0 = A \; , \\
0 = 0 \; , & 0 = 0 \; , \\
A + ACA = A \; , & 0 = 0 \; , \\
0 = A \; , & 0 = 0 \; , \\
C + \alpha C^2 = s \; , & 0 = 0 \; , \\
CsA = 0 \; , & 0 = 0 \; , \\
0 = 0 \; , & 0 = 0 \; , \\
0 = C \; , & 0 = s \; , \\
AC^2 = 0 \; , & 0 = 0 \; , \\
0 = 0 \; , & 0 = C \; ,
\end{array} \qquad (7.16b)$$

т. е. приходим к уже известному решению:

<u>решение $(KM-1)$</u>,

$$(B,\beta) = 0 \; , \; (D,t) = 0 \; , \; (A,\alpha) = 0 \; , \; (C,s) = 0 \; , \qquad G = \left| \begin{array}{cc} K & 0 \\ 0 & M \end{array} \right| . \qquad (7.16c)$$

Рассматриваем случай (см. (7.9b))

$$(A, \alpha) \neq 0 \ , \qquad (B, \beta) \neq 0 \ , \qquad (D, t) = 0 \ , \qquad (C, s) = 0 \ , \tag{7.17a}$$

система (7.6) дает

$$\begin{array}{ll}
0 = 0 \ , & 0 = 0 \ , \\
0 = \beta + \alpha \ , & 0 = 0 \ , \\
0 = 0 \ , & 0 = B + A \ , \\
\alpha = A \ , & \beta = B \ , \\
0 = 0 \ , & 0 = 0 \ , \\
0 = 0 \ , & 0 = 0 \ , \\
0 = 0 \ , & 0 = 0 \ , \\
0 = 0 \ , & 0 = D \ , \\
0 = 0 \ , & 0 = 0 \ , \\
A = \alpha \ , & B = \beta \ , \\
0 = B + \alpha \ , & 0 = A + \beta \ , \\
0 = 0 \ , & 0 = 0 \ , \\
A = A \ , & B = B \ , \\
0 = A + B \ , & 0 = 0 \ , \\
0 = 0 \ , & 0 = 0 \ , \\
0 = 0 \ , & 0 = 0 \ , \\
0 = 0 \ , & 0 = 0 \ , \\
0 = 0 \ , & 0 = 0 \ , \\
0 = 0 \ , & 0 = 0 \ , \\
0 = 0 \ , & 0 = 0 \ ,
\end{array} \tag{7.17b}$$

т. е. приходим к решению:

<u>решение $(KM - 4)$</u>,

$$A = \alpha \ , \qquad B = \beta = -A \ , \qquad (D, t) = 0 \ , \qquad (C, s) = 0 \ ,$$

$$\mathbf{n} = A(\mathbf{k} - \mathbf{m}) \ , \ n_0 = A(k_0 - m_0) \ , \qquad \mathbf{l} = 0 \ , \ \ l_0 = 0 \ , \tag{7.17c}$$

$$G = \left| \begin{array}{cc} K & A(K - M) \\ 0 & M \end{array} \right| ,$$

$$G'G = \left| \begin{array}{cc} K' & A(K' - M') \\ 0 & M' \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} K & A(K - M) \\ 0 & M \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} K'K & A(K'K - M'M) \\ 0 & M'M \end{array} \right| . \tag{7.17d}$$

Теперь предстоит исследовать 4 возможности с тремя ненулевыми блоками (см. (7.9c)). Пусть

$$(A,\alpha)=0\;, \qquad (B,\beta)\neq 0\;, \qquad (D,t)\neq 0\;, \qquad (C,s)\neq 0\;, \tag{7.18a}$$

система (7.6) дает

$$\begin{array}{ll}
0=0\;, & \beta t\beta=0\;,\\
\beta^2 s=\beta\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & \beta CB=B\;,\\
0=0\;, & \beta+\beta BD=B\;,\\
0=0\;, & \beta t(s+t)=0\;,\\
st\beta=0\;, & \beta s^2=t+s\;,\\
tCB=0\;, & sBC=C+D\;,\\
s=C\;, & t+BD(t+s)=D\;,\\
0=0\;, & B\beta D=0\;,\\
0=0\;, & B+tB^2=\beta\;,\\
sB^2=B\;, & \beta BC=\beta\;,\\
0=0\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & B+BDB=B\;,\\
B^2C=B\;, & 0=0\;,\\
C=s\;, & D+\beta D^2+tBC=t\;,\\
0=0\;, & (tB+\beta C)=0\;,\\
DsB=0\;, & C\beta D=0\;,\\
\beta C^2=t+C\;, & sBC=D+s\;,\\
0=0\;, & BD(D+C)=0\;,\\
DCB=0\;, & BC^2=D+C\;.
\end{array} \tag{7.18b}$$

Эта система приводит к уже известному тривиальному решению $(KM-1)$.

Пусть

$$(A,\alpha)\neq 0\;, \qquad (B,\beta)=0\;, \qquad (D,t)\neq 0\;, \qquad (C,s)\neq 0\;; \tag{7.19a}$$

система (7.6) дает

$$\begin{array}{ll}
\alpha s\alpha=0\;, & 0=0\;,\\
\alpha^2 t=\alpha\;, & 0=0\;,\\
0=0\;, & \alpha AD=A\;,\\
\alpha+\alpha AC=A\;, & 0=0\;,\\
s\alpha(s+t)=0\;, & 0=0\;,\\
st\alpha=0\;, & \alpha t^2=t+s\;,\\
sAD=0\;, & tAD=C+D\;,\\
s+AC(s+t)=C\;, & t=D\;,
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
A\alpha C = 0\ , & 0 = 0\ , \\
A + sA^2 = \alpha\ , & 0 = 0\ , \\
\alpha AD = +\alpha\ , & tA^2 = A\ , \\
\beta AC = 0\ , & 0 = 0\ , \\
A + ACA = A\ , & 0 = 0\ , \\
A^2 D = A\ , & 0 = 0\ , \\
C + \alpha C^2 + sAD = s\ , & D = t\ , \\
C(sA + \alpha D) = 0\ , & 0 = 0\ , \\
D\alpha C = 0\ , & CtA = 0\ , \\
\beta C^2 + tAD = t + C\ , & \alpha D^2 = D + s\ , \\
AC(C + D) = 0\ , & 0 = 0\ , \\
DCA = 0\ , & 0AD^2 = D + C\ .
\end{array}
\tag{7.19b}
$$

Эта система приводит к уже известному тривиальному решению $(KM - 1)$.

Пусть

$$
(A,\alpha) \neq 0\ , \qquad (B,\beta) \neq 0\ , \qquad (D,t) = 0\ , \qquad (C,s) \neq 0\ ; \tag{7.20a}
$$

система (7.6) дает

$$
\begin{array}{ll}
\alpha s(\alpha + \beta) = 0\ , & 0 = 0\ , \\
\beta^2 s = \beta + \alpha\ , & \alpha\beta s = 0\ , \\
\alpha BC = 0\ , & \beta BC = B + A\ , \\
\alpha + (\alpha + \beta)AC = A\ , & \beta = B\ , \\
s\alpha s = 0\ , & 0 = 0\ , \\
0 = 0\ , & \beta s^2 = s\ , \\
0 = 0\ , & sBC = C\ , \\
s + ACs = C\ , & 0 = D\ , \\
A(\alpha C + sB) = 0\ , & 0 = 0\ , \\
A + sA^2 + \alpha BC = \alpha\ , & B = \beta\ , \\
\alpha s B^2 = B + \alpha\ , & \beta BC = A + \beta\ , \\
\beta AC = 0\ , & sAB = 0\ , \\
A + AC(A + B) = A\ , & B = B\ , \\
B^2 C = A + B\ , & ABC = 0\ , \\
C + \alpha C^2 = s\ , & 0 = 0\ , \\
CsA = 0\ , & 0 = 0\ , \\
0 = 0\ , & 0 = 0\ , \\
\beta C^2 = +C\ , & +sBC = s\ , \\
ACC = 0\ , & 0 = 0\ , \\
0 = 0\ , & BC^2 = +C\ .
\end{array}
\tag{7.20b}
$$

Эта система приводит к уже известному тривиальному решению $(KM-1)$.

Наконец, рассматриваем последний случай из этого класса

$$(A,\alpha)\neq 0\ , \qquad (B,\beta)\neq 0\ , \qquad (D,t)\neq 0\ , \qquad (C,s)=0\ ; \tag{7.21a}$$

система (7.6) дает

$$\begin{array}{ll}
0=0\ , & \beta t(\alpha+\beta)=0\ , \\
\alpha^2 t=\beta+\alpha\ , & \alpha\beta t=0\ , \\
\beta AD=0\ , & \alpha AD=B+A\ , \\
\alpha=A\ , & \beta+(\alpha+\beta)BD=B\ , \\
0=0\ , & \beta tt=0\ , \\
0=0\ , & \alpha t^2=t\ , \\
0=0\ , & tAD=D\ , \\
0=0\ , & t+BDt=D\ , \\
0=0\ , & B(\beta D+tA)=0\ , \\
A=\alpha\ , & B+tB^2+\beta AD=\beta\ , \\
\alpha AD=B+\alpha\ , & \beta tA^2=A+\beta\ , \\
tAB=0\ , & \alpha BD=0\ , \\
A=A\ , & B+BD(B+A)=B\ , \\
A^2D=A+B\ , & ABD=0\ , \\
0=0\ , & D+\beta D^2=t\ , \\
0=0\ , & DtB=0\ , \\
0=0\ , & 0=0\ , \\
tAD=t\ , & \alpha D^2=D\ , \\
0=0\ , & BDD=0\ , \\
0=0\ , & AD^2=D\ .
\end{array} \tag{7.21b}$$

Эта система также приводит к уже известному тривиальному решению $(KM-1)$.

Остается исследовать случай трех ненулевых блоков

$$(A,\alpha)\neq 0\ , \qquad (B,\beta)=0\ , \qquad (D,t)=0\ , \qquad (C,s)=0\ . \tag{7.22a}$$

Система (7.6) может быть упрощена (ненулевые множители в равенствах можно сократить):

$$\begin{array}{ll}
(\alpha+\beta)=0\ , & (\alpha+\beta)=0\ , \\
\alpha^2 t+\beta^2 s=\beta+\alpha\ , & (s+t)=0\ , \\
\alpha BC+\beta AD=0\ , & \alpha AD+\beta BC=B+A\ ,
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
\alpha+(\alpha+\beta)AC=A\,, & \beta+(\alpha+\beta)BD=B\,,\\
(s+t)=0\,, & (s+t)=0\,,\\
(\alpha+\beta)=0\,, & \beta s^2+\alpha t^2=t+s\,,\\
sAD+tCB=0, & sBC+tAD=C+D\,,\\
s+AC(s+t)=C\,, & t+BD(t+s)=D\,,\\
(\alpha C+sB)=0\,, & (\beta D+tA)=0\,,\\
A+sA^2+\alpha BC=\alpha\,, & B+tB^2+\beta AD=\beta\,,\\
\alpha AD+sB^2=B+\alpha\,, & \beta BC+tA^2=A+\beta\,,\\
\beta C+tB=0\,, & \alpha D+sA=0\,,\\
(A+B)=0\,, & (B+A)=0\,,\\
A^2D+B^2C=A+B\,, & (C+D)=0\,,\\
C+\alpha C^2+sAD=s\,, & D+\beta D^2+tBC=t\,,\\
(sA+\alpha D)=0\,, & (tB+\beta C)=0\,,\\
(\alpha C+sB)=0\,, & (\beta D+tA)=0\,,\\
\beta C^2+tAD=t+C\,, & \alpha D^2+sBC=D+s\,,\\
(C+D)=0\,, & (D+C)=0\,,\\
(A+B)=0\,, & BC^2+AD^2=D+C\,.
\end{array}
\tag{7.22b}
$$

Исключаем переменные:

$$
B=-A\,,\ \beta=-\alpha\,,\qquad C=-D\,,\ s=-t\,; \tag{7.22c}
$$

в результате приходим к следующей системе:

$$
\begin{array}{ll}
0=0\,, & 0=0\,,\\
0=0\,, & 0=0\,,\\
0=0\,, & 0=0\,,\\
\alpha=A\,, & \beta=-A\,,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
0=0\,, & 0=0\,,\\
0=0\,, & 0=0\,,\\
0=0\,, & 0=0\,,\\
s=-D\,, & t=D\,,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(-\alpha D-sA)=0\,, & (\beta D+tA)=0\,,\\
A+sA^2+\alpha AD=\alpha\,, & -A+tA^2+\beta AD=\beta\,,\\
\alpha AD+sA^2=-A+\alpha\,, & \beta AD+tA^2=A+\beta\,,\\
\beta-D-tA=0\,, & \alpha D+sA=0\,,\\
0=0\,, & 0=0\,,\\
0=0\,, & 0=0\,,\\
-D+\alpha D^2+sAD=s\,, & D+\beta D^2+tAD=t\,,\\
(sA+\alpha D)=0\,, & (-tA-\beta D)=0\,,
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(\alpha C - sA) = 0 \; , & (\beta D + tA) = 0 \; , \\
\beta C^2 + tAD = t + C \; , & \alpha D^2 - sAC = D + s \; , \\
0 = 0 \; , & 0 = 0 \; , \\
0 = 0 \; , & 0 = 0 \; .
\end{array}
$$

Откуда следует

$$
A = \alpha \; , \qquad B = \beta = -A \; , \qquad t = D \; , \qquad C = s = -D \; . \tag{7.22d}
$$

Соотношения (7.22d) описывают решение

$$
\mathbf{n} = A(\mathbf{k} - \mathbf{m}) \; , \qquad n_0 = A(k_0 - m_0) \; ,
$$

$$
\mathbf{l} = D(\mathbf{m} - \mathbf{k}) \; , \qquad l_0 = D(m_0 - k_0) \; ; \tag{7.23a}
$$

решение $(KM - 5)$,

$$
G = \left| \begin{array}{cc} K & A(K-M) \\ C(K-M) & M \end{array} \right| . \tag{7.23b}
$$

Убедимся прямым вычислением, что матрицы такой структуры действительно образуют группу:

$$
\left| \begin{array}{cc} K' & A(K'-M') \\ C(K'-M') & M' \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} K & A(K-M) \\ C(K-M) & M \end{array} \right| =
$$

$$
\left| \begin{array}{cc} K'K + AC(K'-M')(K-M) & A(K'K - M'M) \\ C(K'K - M'M) & M'M + AC(K'-M')(K-M) \end{array} \right| =
$$

$$
\left| \begin{array}{cc} K'' & A(K''-M'') \\ C(K''-M'') & M'' \end{array} \right| .
$$

Эти формулы в то же время содержат в себе правила умножения двух независимых параметров k, m для подгруппы $G_{A,C}(k,m) \; \in GL(4.C)$:

$$
K'' = K'K + AC(K'-M')(K-M) \; ,
$$

$$
M'' = M'M + AC(K'-M')(K-M) \; . \tag{7.23c}
$$

Если хотя бы одна величина из A и C равна нулю, то закон умножения (7.23c) расщепляется в две независимые формулы, отвечающие подгруппе $SL(2.C) \otimes SL(2.C)$.

8 Два независимых вектора: вариант II(l,n)

Рассмотрим случай двух независимых векторов, **вариант II(l,n)**:

$$
\mathbf{k} = (A\mathbf{l} + B\mathbf{n}) \; , \qquad k_0 = (\alpha l_0 + \beta n_0) \; ,
$$

$$
\mathbf{m} = (D\mathbf{l} + C\mathbf{n}) \; , \qquad m_0 = (t l_0 + s n_0) \; . \tag{8.1}
$$

Формулы умножения параметров принимают вид:

$$k_0'' = (\alpha l_0' + \beta n_0')\ (\alpha l_0 + \beta n_0) + (A\mathbf{l}' + B\mathbf{n}')(A\mathbf{l} + B\mathbf{n}) + n_0'\ l_0 + \mathbf{n}'\ \mathbf{l}\ ,$$

$$m_0'' = (tl_0' + sn_0')\ (tl_0 + sn_0) + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{n}')\ (D\mathbf{l} + C\mathbf{n}) + l_0'\ n_0 + \mathbf{l}'\ \mathbf{n}\ ,$$

$$n_0'' = (\alpha l_0' + \beta n_0')\ n_0 + (A\mathbf{l}' + B\mathbf{n}')\ \mathbf{n} + n_0'\ (tl_0 + sn_0) + \mathbf{n}'\ (D\mathbf{l} + C\mathbf{n})\ ,$$

$$l_0'' = l_0'\ (\alpha l_0 + \beta n_0) + \mathbf{l}'\ (A\mathbf{l} + B\mathbf{n}) + (tl_0' + sn_0')\ l_0 + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{n}')\ \mathbf{l}\ , \tag{8.2}$$

$$\mathbf{k}'' = (\alpha l_0'+\beta n_0')\ (A\mathbf{l}+B\mathbf{n})+(A\mathbf{l}'+B\mathbf{n}')\ (\alpha l_0+\beta n_0)+i\ (A\mathbf{l}'+B\mathbf{n}')\times(A\mathbf{l}+B\mathbf{n})+n_0'\ \mathbf{l}+\mathbf{n}'\ l_0+i\ \mathbf{n}'\times\mathbf{l}\ ,$$

$$\mathbf{m}'' = (tl_0'+sn_0')\ (D\mathbf{l}+C\mathbf{n})+(D\mathbf{l}'+C\mathbf{n}')\ (tl_0+sn_0)+i\ (D\mathbf{l}'+C\mathbf{n}')\times(D\mathbf{l}+C\mathbf{n})+l_0'\ \mathbf{n}+\mathbf{l}'\ n_0+i\ \mathbf{l}'\times\mathbf{n}\ ,$$

$$\mathbf{n}'' = (\alpha l_0'+\beta n_0')\ \mathbf{n}+(A\mathbf{l}'+B\mathbf{n}')\ n_0+i\ (A\mathbf{l}'+B\mathbf{n}')\times\mathbf{n}+n_0'\ (D\mathbf{l}+C\mathbf{n})+\mathbf{n}'\ (tl_0+sn_0)+i\ \mathbf{n}'\times(D\mathbf{l}+C\mathbf{n})\ ,$$

$$\mathbf{l}'' = l_0'\ (A\mathbf{l}+B\mathbf{n})+\mathbf{l}'\ (\alpha l_0+\beta n_0)+i\ \mathbf{l}'\times(A\mathbf{l}+B\mathbf{n})+(tl_0'+sn_0')\ \mathbf{l}+(D\mathbf{l}'+C\mathbf{n}')\ l_0+i\ (D\mathbf{l}'+C\mathbf{n}')\times\mathbf{l}\ .$$

Требуем выполнения условий

$$\mathbf{k}'' = A\mathbf{l}'' + B\mathbf{n}''\ , \qquad k_0'' = \alpha l_0'' + \beta n_0''\ ,$$

$$\mathbf{m}'' = D\mathbf{l}'' + C\mathbf{n}''\ , \qquad m_0'' = tl_0'' + sn_0''\ .$$

Уравнение

$$\mathbf{k}'' = A\mathbf{l}'' + B\mathbf{n}'' \tag{8.3a}$$

принимает вид:

$$(\alpha l_0' + \beta n_0')(A\mathbf{l} + B\mathbf{n}) + (A\mathbf{l}' + B\mathbf{n}')(\alpha l_0 + \beta n_0) + i(A\mathbf{l}' + B\mathbf{n}') \times (A\mathbf{l} + B\mathbf{n}) + n_0'\mathbf{l} + \mathbf{n}'l_0 + i\mathbf{n}' \times \mathbf{l} =$$

$$A\ [l_0'(A\mathbf{l} + B\mathbf{n}) + \mathbf{l}'(\alpha l_0 + \beta n_0) + i\mathbf{l}' \times (A\mathbf{l} + B\mathbf{n}) + (tl_0' + sn_0')\mathbf{l} + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{n}')l_0 + i(D\mathbf{l}' + C\mathbf{n}') \times \mathbf{l}] +$$
$$B\ [(\alpha l_0'+\beta n_0')\mathbf{n}+(A\mathbf{l}'+B\mathbf{n}')n_0+i(A\mathbf{l}'+B\mathbf{n}')\times\mathbf{n}+n_0'(D\mathbf{l}+C\mathbf{n})+\mathbf{n}'\ (tl_0+sn_0)+i\mathbf{n}'\times(D\mathbf{l}+C\mathbf{n})]\ ;$$

откуда следуют равенства

$$\begin{array}{ll}
l_0'\mathbf{l}: & \alpha A = A^2 + At\ , \\
n_0'\mathbf{n}: & \beta B = \beta B + BC\ , \\
n_0'\mathbf{l}: & \beta A + 1 = As + BD\ , \\
l_0'\mathbf{n}: & \alpha B = AB + \alpha B\ , \\
n_0\mathbf{l}': & \beta A = \beta A + BA\ , \\
l_0\mathbf{n}': & \alpha B + 1 = AC + Bt\ , \\
l_0\mathbf{l}': & \alpha A = \alpha A + AD\ , \\
n_0\mathbf{n}': & \beta B = B^2 + Bs\ , \\
\mathbf{l}' \times \mathbf{l}: & A^2 = A^2 + AD\ , \\
\mathbf{n}' \times \mathbf{n}: & B^2 = B^2 + BC\ , \\
\mathbf{n}' \times \mathbf{l}: & BA + 1 = AC + BD\ , \\
\mathbf{l}' \times \mathbf{n}: & AB = AB + AB\ .
\end{array} \tag{8.3b}$$

Уравнение

$$\mathbf{m}'' = D\mathbf{l}'' + C\mathbf{n}'' \tag{8.4a}$$

принимает вид:

$$(tl_0'+sn_0')(D\mathbf{l}+C\mathbf{n})+(D\mathbf{l}'+C\mathbf{n}')(tl_0+sn_0)+i(D\mathbf{l}'+C\mathbf{n}')\times(D\mathbf{l}+C\mathbf{n})+l_0'\mathbf{n}+\mathbf{l}'n_0+i\,\mathbf{l}'\times\mathbf{n}=$$

$$D\,[l_0'(A\mathbf{l}+B\mathbf{n})+\mathbf{l}'(\alpha l_0+\beta n_0)+i\mathbf{l}'\times(A\mathbf{l}+B\mathbf{n})+(tl_0'+sn_0')\mathbf{l}+(D\mathbf{l}'+C\mathbf{n}')l_0+i(D\mathbf{l}'+C\mathbf{n}')\times\mathbf{l}]+$$
$$C\,[\alpha l_0'+\beta n_0')\,\mathbf{n}+(A\mathbf{l}'+B\mathbf{n}')\,n_0+i\,(A\mathbf{l}'+B\mathbf{n}')\times\mathbf{n}+n_0'\,(D\mathbf{l}+C\mathbf{n})+\mathbf{n}'\,(tl_0+sn_0)+i\,\mathbf{n}'\times(D\mathbf{l}+C\mathbf{n})\,;$$

отсюда следуют равенства

$$\begin{array}{ll}
l_0'\mathbf{l}: & tD=DA+tD\,,\\
n_0'\mathbf{n}: & sC=C\beta+C^2\,,\\
n_0'\mathbf{l}: & sD=sD+CD\,,\\
l_0'\mathbf{n}: & tC+1=DB+\alpha C\,,\\
n_0\mathbf{l}': & sD+1=\beta D+CA\,,\\
l_0\mathbf{n}': & tC=DC+tC\,,\\
l_0\mathbf{l}': & tD=\alpha D+D^2\,,\\
n_0\mathbf{n}': & sC=CB+sC\,,\\
\mathbf{l}'\times\mathbf{l}: & D^2=DA+D^2\,,\\
\mathbf{n}'\times\mathbf{n}: & C^2=CB+C^2\,,\\
\mathbf{n}'\times\mathbf{l}: & CD=CD+CD\,,\\
\mathbf{l}'\times\mathbf{n}: & CD+1=DB+CA\,.
\end{array} \qquad (8.4b)$$

Уравнение

$$k_0''=\alpha l_0''+\beta n_0'' \qquad (8.5a)$$

принимает вид:

$$(\alpha l_0'+\beta n_0')\,(\alpha l_0+\beta n_0)+(A\mathbf{l}'+B\mathbf{n}')(A\mathbf{l}+B\mathbf{n})+n_0'\,l_0+\mathbf{n}'\,\mathbf{l}=$$

$$\alpha\,[\,l_0'\,(\alpha l_0+\beta n_0)+\mathbf{l}'\,(A\mathbf{l}+B\mathbf{n})+(tl_0'+sn_0')\,l_0+(D\mathbf{l}'+C\mathbf{n}')\,\mathbf{l}]+$$
$$\beta\,[\,(\alpha l_0'+\beta n_0')\,n_0+(A\mathbf{l}'+B\mathbf{n}')\,\mathbf{n}+n_0'\,(tl_0+sn_0)+\mathbf{n}'\,(D\mathbf{l}+C\mathbf{n}]\,;$$

отсюда следуют равенства

$$\begin{array}{ll}
l_0'l_0: & \alpha^2=\alpha^2+\alpha t\,,\\
n_0'n_0: & \beta^2=\beta^2+s\beta\,,\\
l_0'n_0: & \alpha\beta=\alpha\beta+\alpha\beta\,,\\
n_0'l_0: & \alpha\beta+1=\alpha s+\beta t\,,\\
\mathbf{l}'\mathbf{l}: & A^2=\alpha A+\alpha D\,,\\
\mathbf{n}'\mathbf{n}: & B^2=\beta B+\beta C\,,\\
\mathbf{l}'\mathbf{n}: & AB=\alpha B+\beta A\,,\\
\mathbf{n}'\mathbf{l}: & AB+1=\alpha C+\beta D\,.
\end{array} \qquad (8.5b)$$

Уравнение

$$m_0''=tl_0''+sn_0'' \qquad (8.6a)$$

принимает вид:

$$(tl_0' + sn_0')\ (tl_0 + sn_0) + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{n}')\ (D\mathbf{l} + C\mathbf{n}) + l_0'\ n_0 + \mathbf{l}'\ \mathbf{n} =$$

$$t\ [\ l_0'\ (\alpha l_0 + \beta n_0) + \mathbf{l}'\ (A\mathbf{l} + B\mathbf{n}) + (tl_0' + sn_0')\ l_0 + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{n}')\ \mathbf{l}\ ] +$$
$$s\ [\ (\alpha l_0' + \beta n_0')\ n_0 + (A\mathbf{l}' + B\mathbf{n}')\ \mathbf{n} + n_0'\ (tl_0 + sn_0) + \mathbf{n}'\ (D\mathbf{l} + C\mathbf{n})\ ]\ ;$$

отсюда следуют равенства

$$\begin{aligned}
l_0' l_0 : &\quad t^2 = t\alpha + t^2\ , \\
n_0' n_0 : &\quad s^2 = s\beta + s^2\ , \\
l_0' n_0 : &\quad ts + 1 = t\beta + s\alpha\ , \\
n_0' l_0 : &\quad st = st + st\ , \\
\mathbf{l}'\mathbf{l} : &\quad D^2 = tA + tD\ , \\
\mathbf{n}'\mathbf{n} : &\quad C^2 = sB + sC\ , \\
\mathbf{l}'\mathbf{n} : &\quad DC + 1 = tB + sA\ , \\
\mathbf{n}'\mathbf{l} : &\quad CD = tC + sD\ .
\end{aligned} \tag{8.6b}$$

Собираем уравнения вместе:

$$\alpha A = A^2 + At\ ,$$
$$0 = BC\ ,$$
$$\beta A + 1 = As + BD\ ,$$
$$0 = AB\ ,$$
$$0 = +BA\ ,$$
$$\alpha B + 1 = AC + Bt\ ,$$
$$0 = AD\ ,$$
$$\beta B = B^2 + Bs\ ,$$
$$0 = AD\ ,$$
$$0 = BC\ ,$$
$$BA + 1 = AC + BD\ ,$$
$$0 = AB;$$
$$0 = DA\ ,$$
$$sC = C\beta + C^2\ ,$$
$$0 = CD\ ,$$
$$tC + 1 = DB + \alpha C\ ,$$
$$sD + 1 = \beta D + CA\ ,$$
$$0 = DC\ ,$$
$$tD = \alpha D + D^2\ ,$$
$$0 = CB\ ,$$
$$0 = DA\ ,$$

$$0 = CB \ ,$$
$$0 = CD \ ,$$
$$CD + 1 = DB + CA \ ;$$
$$0 = \alpha t \ ,$$
$$0 = s\beta \ ,$$
$$0 = \alpha\beta \ ,$$
$$\alpha\beta + 1 = \alpha s + \beta t \ ,$$
$$A^2 = \alpha A + \alpha D \ ,$$
$$B^2 = \beta B + \beta C \ ,$$
$$AB = \alpha B + \beta A \ ,$$
$$AB + 1 = \alpha C + \beta D \ ;$$
$$0 = t\alpha \ ,$$
$$0 = s\beta \ ,$$
$$ts + 1 = t\beta + s\alpha \ ,$$
$$0 = st \ ,$$
$$D^2 = tA + tD \ ,$$
$$C^2 = sB + sC \ ,$$
$$DC + 1 = tB + sA \ ,$$
$$CD = tC + sD \ .$$

Сразу же отметим, что тривиальный набор всех нулевых значений параметров не является решением системы уравнений.

Выделяем наиболее простые уравнения:

$$\begin{array}{ll} BC = 0 \ , & \beta s = 0 \ , \\ AB = 0 \ , & \alpha\beta = 0 \ , \\ AD = 0 \ , & \alpha t = 0 \ , \\ CD = 0 \ , & st = 0 \ ; \end{array} \tag{8.7a}$$

они удовлетворяются шестью способами:

$$\begin{array}{llll} 1) & B, \beta = 0 \ , & D, t = 0 \ ; & \\ 2) & A, \alpha = 0 \ , & C, s = 0 \ ; & \\ 3) & B, \beta = 0 \ , & A, \alpha = 0 \ , & C, s = 0 \ ; \\ 4) & A, \alpha = 0 \ , & B, \beta = 0 \ , & D, t = 0 \ ; \\ 5) & C, s = 0 \ , & B, \beta = 0 \ , & D, t = 0 \ ; \\ 6) & D, t = 0 \ , & C, s = 0 \ , & A, \alpha = 0 \ . \end{array} \tag{8.7b}$$

Выпишем остальные уравнения:

$$\alpha A = A^2 + At \ ,$$
$$\beta A + 1 = As + BD \ ,$$

$$\alpha B + 1 = AC + Bt \ ,$$
$$\beta B = B^2 + Bs \ ,$$
$$BA + 1 = AC + BD \ ; \tag{8.8a}$$
$$sC = C\beta + C^2 \ ,$$
$$tC + 1 = DB + \alpha C \ ,$$
$$sD + 1 = \beta D + CA \ ,$$
$$tD = \alpha D + D^2 \ ,$$
$$CD + 1 = DB + CA ; \tag{8.8b}$$
$$\alpha\beta + 1 = \alpha s + \beta t \ ,$$
$$A^2 = \alpha A + \alpha D \ ,$$
$$B^2 = \beta B + \beta C \ ,$$
$$AB = \alpha B + \beta A \ ,$$
$$AB + 1 = \alpha C + \beta D \ ; \tag{8.8c}$$
$$ts + 1 = t\beta + s\alpha \ ,$$
$$D^2 = tA + tD \ ,$$
$$C^2 = sB + sC \ ,$$
$$DC + 1 = tB + sA \ ,$$
$$CD = tC + sD \ . \tag{8.8d}$$

Видим, что варианты 3), 4), 5), 6) несовместимы с уравнениями (8.8). Таким образом, предстоит исследовать только случаи 1) и 2).

В случае 1) имеем

$$1) \qquad B, \beta = 0 \ , \qquad D, t = 0 \ ;$$

уравнения (8.8) дают

$$\alpha A = A^2 \ , \qquad 1 = As \ , \qquad 1 = AC \ , \tag{8.9a}$$
$$sC = C^2 \ , \qquad 1 = \alpha C \ , \qquad 1 = CA \ , \tag{8.9b}$$
$$1 = \alpha s \ , \qquad A^2 = \alpha A \ , \qquad 1 = \alpha C \ , \tag{8.9c}$$
$$1 = s\alpha \ , \qquad C^2 = sC \ , \qquad 1 = sA \ . \tag{8.9d}$$

Единственное решение системы выглядит так:

$$B, \beta = 0 \ , \qquad D, t = 0 \ , \qquad \alpha = A \neq 0 \ , \qquad C = s = \frac{1}{A} \ ; \tag{8.10a}$$

при этом соотношения (8.1) дают

$$\mathbf{k} = A\mathbf{l} \ , \qquad k_0 = Al_0 \ , \qquad \mathbf{m} = A^{-1}\mathbf{n} \ , \qquad m_0 = A^{-1}n_0 \ , \tag{8.10b}$$

<u>решение $(LN-1)$</u>,

$$G = \left| \begin{array}{cc} AL & N \\ L & A^{-1}N \end{array} \right| , \tag{8.10c}$$

$$G'G = \left| \begin{array}{cc} AL' & N' \\ L' & A^{-1}N' \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} AL & N \\ L & A^{-1}N \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} A(AL'L + A^{-1}N'L) & (AL'N + A^{-1}N'N) \\ (AL'L + A^{-1}N'L) & A^{-1}(AL'N + A^{-1}N'N) \end{array} \right| .$$

Это вырожденные матрицы ранга 2 со структурой полугруппы.

В случае

$$2) \qquad A, \alpha = 0 \; , \qquad C, s = 0$$

уравнения (8.8) дают

$$1 = BD \; , \qquad 1 = Bt \; , \qquad \beta B = B^2 \; , \tag{8.11a}$$

$$1 = DB \; , \qquad 1 = \beta D \; , \qquad tD = D^2 \; , \tag{8.11b}$$

$$1 = \beta t \; , \qquad B^2 = \beta B \; , \qquad 1 = \beta D \; , \tag{8.11c}$$

$$1 = t\beta \; , \qquad D^2 = tD, \qquad 1 = tB \; . \tag{8.11d}$$

Они имеют единственное решение

$$A, \alpha = 0 \; , \qquad C, s = 0 \; , \qquad \beta = \beta \neq 0 \; , \qquad D = t = B^{-1} \; ; \tag{8.12a}$$

при этом соотношения (8.1) принимают вид:

$$\mathbf{k} = B\mathbf{n} \; , \qquad k_0 = Bn_0 \; , \qquad \mathbf{m} = B^{-1}\mathbf{l} \; , \qquad m_0 = B^{-1}l_0 \; , \tag{8.12b}$$

<u>решение $(LN-2)$</u>,

$$G = \left| \begin{array}{cc} BN & N \\ L & B^{-1}L \end{array} \right| , \tag{8.12c}$$

$$G'G = \left| \begin{array}{cc} BN' & N' \\ L' & B^{-1}L' \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} BN & N \\ L & B^{-1}L \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} B(BN'N + B^{-1}N'L) & (BN'N + B^{-1}N'L) \\ (BL'N + B^{-1}L'L) & B^{-1}(BL'N + B^{-1}L'L) \end{array} \right| .$$

Это вырожденные матрицы ранга 2 со структурой полугруппы.

Анализ этого варианта двух независимых векторов **I(ln)** завершен.

9 Два независимых вектора: вариант II(k,l)

Рассмотрим следующий случай двух независимых векторов, **вариант II(k,l)**:

$$\mathbf{n} = A\mathbf{k} + B\mathbf{l} \; , \qquad n_0 = \alpha k_0 + \beta l_0 \; ,$$

$$\mathbf{m} = D\mathbf{l} + C\mathbf{k} \; , \qquad m_0 = t l_0 + s k_0 \; . \tag{9.1}$$

Формулы умножения параметров принимают вид:

$$k_0'' = k_0' \, k_0 + \mathbf{k}' \, \mathbf{k} + (\alpha k_0' + \beta l_0') \, l_0 + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') \, \mathbf{l} \; ,$$

$$m_0'' = (tl_0' + sk_0')(tl_0 + sk_0) + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}') \, (D\mathbf{l} + C\mathbf{k}) +$$
$$l_0' \, (\alpha k_0 + \beta l_0) + \mathbf{l}'(A\mathbf{k} + B\mathbf{l}) \; ,$$
$$n_0'' = k_0' \, (\alpha k_0 + \beta l_0) + \mathbf{k}' \, (A\mathbf{k} + B\mathbf{l}) +$$
$$(\alpha k_0' + \beta l_0') \, (tl_0 + sk_0) + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') \, (D\mathbf{l} + C\mathbf{k}) \; ,$$

$$
\begin{gathered}
l''_0 = l'_0\, k_0 + \mathbf{l}'\, \mathbf{k} + (tl'_0 + sk'_0) l_0 + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}')\, \mathbf{l}\, , \\
\mathbf{k}'' = k'_0\, \mathbf{k} + \mathbf{k}'\, k_0 + i\, \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + \\
(\alpha k'_0 + \beta l'_0)\, \mathbf{l} + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}')\, l_0 + i\, (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') \times \mathbf{l}\, , \\
\mathbf{m}'' = (tl'_0 + sk'_0)(D\mathbf{l} + C\mathbf{k}) + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}')\, (tl_0 + sk_0) + i\, (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}') \times (D\mathbf{l} + C\mathbf{k}) + \\
l'_0\, (A\mathbf{k} + B\mathbf{l}) + \mathbf{l}'\, (\alpha k_0 + \beta l_0) + i\, \mathbf{l}' \times (A\mathbf{k} + B\mathbf{l})\, , \\
\mathbf{n}'' = k'_0\, (A\mathbf{k} + B\mathbf{l}) + \mathbf{k}'\, (\alpha k_0 + \beta l_0) + i\, \mathbf{k}' \times (A\mathbf{k} + B\mathbf{l}) + \\
(\alpha k'_0 + \beta l'_0)\, (D\mathbf{l} + C\mathbf{k}) + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}')\, (tl_0 + sk_0) + i\, (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') \times (D\mathbf{l} + C\mathbf{k})\, , \\
\mathbf{l}'' = l'_0\, \mathbf{k} + \mathbf{l}'\, k_0 + i\, \mathbf{l}' \times \mathbf{k} + \\
(tl'_0 + sk'_0)\mathbf{l} + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}')\, l_0 + i\, (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}') \times \mathbf{l}\, .
\end{gathered} \tag{9.2}
$$

Требуем выполнения равенств

$$
\begin{gathered}
\mathbf{n}'' = A\mathbf{k}'' + B\mathbf{l}''\, , \qquad n''_0 = \alpha k''_0 + \beta l''_0\, , \\
\mathbf{m}'' = D\mathbf{l}'' + C\mathbf{k}''\, , \qquad m''_0 = tl''_0 + sk''_0\, .
\end{gathered} \tag{9.3}
$$

Уравнение

$$
\mathbf{n}'' = A\mathbf{k}'' + B\mathbf{l}'' \tag{9.4a}
$$

дает

$$
\begin{gathered}
k'_0\, (A\mathbf{k} + B\mathbf{l}) + \mathbf{k}'\, (\alpha k_0 + \beta l_0) + i\, \mathbf{k}' \times (A\mathbf{k} + B\mathbf{l}) + \\
(\alpha k'_0 + \beta l'_0)\, (D\mathbf{l} + C\mathbf{k}) + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}')\, (tl_0 + sk_0) + i\, (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') \times (D\mathbf{l} + C\mathbf{k}) = \\
A\, [\, k'_0\, \mathbf{k} + \mathbf{k}'\, k_0 + i\, \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + (\alpha k'_0 + \beta l'_0)\, \mathbf{l} + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}')\, l_0 + i\, (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') \times \mathbf{l}\,] + \\
B\, [\, l'_0\, \mathbf{k} + \mathbf{l}'\, k_0 + i\, \mathbf{l}' \times \mathbf{k} + (tl'_0 + sk'_0)\mathbf{l} + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}')\, l_0 + i\, (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}') \times \mathbf{l}\,].
\end{gathered} \tag{9.4b}
$$

Приравнивая коэффициенты при подобных членах, приходим к уравнениям

$$
\begin{aligned}
& k'_0\, \mathbf{k} : && \alpha C = 0\, , \\
& k_0\, \mathbf{k}' : && \alpha + As = A\, , \\
& k'_0\, \mathbf{l} : && B + \alpha D = A\alpha + Bs\, , \\
& k_0\, \mathbf{l}' : && sB = B\, , \\
& l'_0\, \mathbf{l} : && \beta D = A\beta + Bt\, , \\
& l_0\, \mathbf{l}' : && Bt = AB + BD\, , \\
& l'_0\, \mathbf{k} : && \beta C = B\, , \\
& l_0\, \mathbf{k}' : && \beta + At = A^2 + BC\, , \\
& \mathbf{k}' \times \mathbf{k} : && AC = 0\, , \\
& \mathbf{l}' \times \mathbf{l} : && AB = 0\, , \\
& \mathbf{k}' \times \mathbf{l} : && B + AD = A^2 + BC\, , \\
& \mathbf{l}' \times \mathbf{k} : && BC = B\, .
\end{aligned} \tag{9.4c}
$$

Уравнение

$$
n''_0 = \alpha k''_0 + \beta l''_0 \tag{9.5a}
$$

принимает вид:

$$
\begin{gathered}
k_0' \; (\alpha k_0 + \beta l_0) + \mathbf{k}' \; (A\mathbf{k} + B\mathbf{l}) + \\
(\alpha k_0' + \beta l_0') \; (t l_0 + s k_0) + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') \; (D\mathbf{l} + C\mathbf{k}) = \\
\alpha \; [\; k_0' \; k_0 + \mathbf{k}' \; \mathbf{k} + (\alpha k_0' + \beta l_0') \; l_0 + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') \; \mathbf{l} \;] + \\
\beta \; [\; l_0' \; k_0 + \mathbf{l}' \; \mathbf{k} + (t l_0' + s k_0') l_0 + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}') \; \mathbf{l} \;] \; ;
\end{gathered}
\tag{9.5b}
$$

откуда следуют уравнения

$$
\begin{aligned}
k_0' k_0 : &\qquad \alpha s = 0 \; , \\
l_0' l_0 : &\qquad 0 = \alpha\beta \; , \\
k_0' l_0 : &\qquad \beta + \alpha t = \alpha^2 + \beta s \; , \\
l_0' k_0 : &\qquad \beta s = \beta \; , \\
\mathbf{k}'\mathbf{k} : &\qquad A + AC = \alpha \; , \\
\mathbf{l}'\mathbf{l} : &\qquad BD = \alpha B + \beta D \; , \\
\mathbf{k}'\mathbf{l} : &\qquad B + AD = \alpha A + \beta C \; , \\
\mathbf{k}\mathbf{l}' : &\qquad BC = \beta \; .
\end{aligned}
\tag{9.5c}
$$

Уравнение

$$
\mathbf{m}'' = D\mathbf{l}'' + C\mathbf{k}'' \tag{9.6a}
$$

дает

$$
\begin{gathered}
(t l_0' + s k_0')(D\mathbf{l} + C\mathbf{k}) + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}') \; (t l_0 + s k_0) + i \; (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}') \times (D\mathbf{l} + C\mathbf{k}) + \\
l_0' \; (A\mathbf{k} + B\mathbf{l}) + \mathbf{l}' \; (\alpha k_0 + \beta l_0) + i \; \mathbf{l}' \times (A\mathbf{k} + B\mathbf{l}) = \\
D \; [\; l_0' \; \mathbf{k} + \mathbf{l}' \; k_0 + i \; \mathbf{l}' \times \mathbf{k} + \\
(t l_0' + s k_0')\mathbf{l} + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}') \; l_0 + i \; (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}') \times \mathbf{l} \;] + \\
C \; [\; k_0' \; \mathbf{k} + \mathbf{k}' \; k_0 + i \; \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + \\
(\alpha k_0' + \beta l_0') \; \mathbf{l} + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') \; l_0 + i \; (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}') \times \mathbf{l} \;] \; ;
\end{gathered}
\tag{9.6b}
$$

откуда следуют уравнения

$$
\begin{aligned}
k_0' \; \mathbf{k} : &\qquad sC = C \; , \\
k_0 \; \mathbf{k}' : &\qquad sC = C \; , \\
k_0' \; \mathbf{l} : &\qquad sD = sD + C\alpha \; , \\
k_0 \; \mathbf{l}' : &\qquad Ds + \alpha = D \; , \\
l_0' \; \mathbf{l} : &\qquad tD + B = Dt + C\beta \; , \\
l_0 \; \mathbf{l}' : &\qquad Dt + \beta = D^2 + CB \; , \\
l_0' \; \mathbf{k} : &\qquad tC + A = D \; , \\
l_0 \; \mathbf{k}' : &\qquad tC = DC + CA \; , \\
\mathbf{k}' \times \mathbf{k} : &\qquad C^2 = C \; , \\
\mathbf{l}' \times \mathbf{l} : &\qquad D^2 + B = D^2 + CB \; , \\
\mathbf{k}' \times \mathbf{l} : &\qquad CD = CD + CA \; , \\
\mathbf{l}' \times \mathbf{k} : &\qquad DC + A = D \; .
\end{aligned}
\tag{9.6c}
$$

Уравнение

$$m_0'' = tl_0'' + sk_0'' \tag{9.7a}$$

дает

$$\begin{gathered}(tl_0' + sk_0')(tl_0 + sk_0) + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}')\ (D\mathbf{l} + C\mathbf{k}) + \\ l_0'\ (\alpha k_0 + \beta l_0) + \mathbf{l}'(A\mathbf{k} + B\mathbf{l}) = \\ t\ [\ l_0'\ k_0 + \mathbf{l}'\ \mathbf{k} + (tl_0' + sk_0')l_0 + (D\mathbf{l}' + C\mathbf{k}')\ \mathbf{l}\ ] + \\ s\ [\ k_0'\ k_0 + \mathbf{k}'\ \mathbf{k} + (\alpha k_0' + \beta l_0')\ l_0 + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{l}')\ \mathbf{l}\ ]\ ;\end{gathered} \tag{9.7b}$$

откуда следуют уравнения

$$\begin{aligned} k_0'k_0 : &\quad s^2 = s\ , \\ l_0'l_0 : &\quad t^2 + \beta = t^2 + s\beta\ , \\ k_0'l_0 : &\quad st = ts + s\alpha\ , \\ l_0'k_0 : &\quad ts + \alpha = t\ , \\ \mathbf{k}'\mathbf{k} : &\quad C^2 = s\ , \\ \mathbf{l}'\mathbf{l} : &\quad D^2 + B = tD + sB\ , \\ \mathbf{k}'\mathbf{l} : &\quad CD = tC + sA\ , \\ \mathbf{k}\mathbf{l}' : &\quad DC + A = t\ . \end{aligned} \tag{9.7c}$$

Собираем уравнения вместе:

$$\alpha C = 0\ , \qquad AC = 0\ , \qquad AB = 0\ ,$$

$$\begin{gathered}(s-1)B = 0\ , \qquad \beta C = B\ , \qquad (C-1)B = 0\ , \\ \alpha + A(s-1) = 0\ , \qquad (A-D)\alpha + B(s-1) = 0\ , \\ (A-D)\beta + Bt = 0\ , \qquad AB + B(D-t) = 0\ , \\ \beta + At = A^2 + BC\ , \qquad B + AD = A^2 + BC\ ,\end{gathered} \tag{9.8a}$$

$$\begin{gathered}\alpha s = 0\ , \qquad \alpha\beta = 0\ , \\ (s-1)\beta = 0\ , \qquad BC = \beta\ , \\ \alpha t = \alpha^2 + \beta(s-1)\ , \qquad A + AC = \alpha\ , \\ (B-\beta)D = \alpha B\ , \qquad B + AD = \alpha A + \beta C\ ,\end{gathered} \tag{9.8b}$$

$$\begin{gathered}C\alpha = 0\ , \qquad CA = 0\ , \\ (s-1)C = 0\ , \qquad B = C\beta\ , \qquad C(C-1) = 0\ , \qquad (C-1)B = 0\ , \\ D(s-1) + \alpha = 0\ , \\ Dt + \beta = D^2 + CB\ , \\ tC + A = D\ , \qquad (D-t)C + CA = 0\ , \qquad DC + A = D\ ;\end{gathered} \tag{9.8c}$$

$$\begin{gathered}0 = s\alpha\ , \qquad s(s-1) = 0\ , \qquad (s-1)\beta = 0\ , \\ t(s-1) + \alpha = 0\ , \qquad C^2 = s\ , \\ D(D-t) = (s-1)B\ , \qquad C(D-C) = sA\ , \qquad DC + A = t\ .\end{gathered} \tag{9.8d}$$

Для s возможны только два значения: $s = 0, 1$. При $s = 0$ система имеет единственное решение:

решение $(KL-1)$,

$$\alpha = A \;, \qquad B = \beta = 0 \;, \qquad C = s = 0 \;, \qquad D = t = A \;,$$

$$\mathbf{n} = A\mathbf{k} \;, \qquad n_0 = Ak_0 \;, \qquad \mathbf{m} = A\mathbf{l} \;, \qquad m_0 = Al_0 \;,$$

$$G = \left| \begin{array}{cc} K & AK \\ L & AL \end{array} \right| . \tag{9.9a}$$

Проверкой убеждаемся в выполнимости закона умножения для этого класса матриц:

$$G'G = \left| \begin{array}{cc} K' & AK' \\ L' & AL' \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} K & AK \\ L & AL \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} (K'K + AK'L) & A(K'K + AK'L) \\ (L'K + AL'L) & A(L'K + AL'L) \end{array} \right| . \tag{9.9b}$$

При $s=1$ система имеет единственное решение:

решение $(KL-2)$,

$$C = s = +1 \;, \qquad A = \alpha = 0 \;, \qquad D = t = +1 \;, \qquad B = \beta = 1 \;,$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{l} \;, \qquad n_0 = l_0 \;, \qquad \mathbf{m} = \mathbf{l} + \mathbf{k} \;, \qquad m_0 = l_0 + k_0 \;,$$

$$G = \left| \begin{array}{cc} K & L \\ L & K+L \end{array} \right| . \tag{9.10a}$$

Убеждаемся в выполнимости группового закона умножения для таких матриц:

$$G'G = \left| \begin{array}{cc} K' & L' \\ L' & (K'+L') \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} K & L \\ L & (K+L) \end{array} \right| =$$

$$\left| \begin{array}{cc} (K'K + L'L) & (L'K + K'L + L'L) \\ (L'K + K'L + L'L) & [(K'K + L'L) + (L'K + K'L + L'L)] \end{array} \right| . \tag{9.10b}$$

10 Два независимых вектора: вариант I(n,m)

Рассмотрим следующий случай двух независимых векторов, **вариант II(n,m)**:

$$\mathbf{l} = A\mathbf{m} + B\mathbf{n} \;, \qquad n_0 = \alpha m_0 + \beta n_0 \;,$$

$$\mathbf{k} = D\mathbf{n} + C\mathbf{m} \;, \qquad k_0 = tn_0 + sm_0 \;. \tag{10.1}$$

Здесь возникают два решения:

решение $(NM-1)$,

$$G = \left| \begin{array}{cc} AN & N \\ AM & M \end{array} \right| ; \tag{10.2}$$

решение $(NM-2)$,

$$G = \left| \begin{array}{cc} M+N & N \\ N & M \end{array} \right| . \tag{10.3}$$

11 Два независимых вектора: вариант I(kn)

Рассмотрим следующий случай двух независимых векторов, **вариант II(k,n)**:

$$\mathbf{l} = (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}) \;, \qquad l_0 = (\alpha k_0 + \beta n_0) \;,$$

$$\mathbf{m} = (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) \;, \qquad m_0 = (t n_0 + s k_0) \;. \tag{11.1}$$

Закон умножения параметров принимает вид:

$$k_0'' = k_0' \, k_0 + \mathbf{k}' \, \mathbf{k} + n_0' \, (\alpha k_0 + \beta n_0) + \mathbf{n}' \, (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}) \;,$$

$$m_0'' = (t n_0' + s k_0') \, (t n_0 + s k_0) + (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}') \, (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) +$$

$$(\alpha k_0' + \beta n_0') n_0 + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{n}') \, \mathbf{n} \;,$$

$$n_0'' = k_0' \, n_0 + \mathbf{k}' \, \mathbf{n} + n_0' \, (t n_0 + s k_0) + \mathbf{n}' \, (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) \;,$$

$$l_0'' = (\alpha k_0' + \beta n_0') \, k_0 + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{n}') \, \mathbf{k} +$$

$$(t n_0' + s k_0')(\alpha k_0 + \beta n_0) + (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}') \, (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}) \;,$$

$$\mathbf{k}'' = k_0' \, \mathbf{k} + \mathbf{k}' \, k_0 + i \, \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + n_0' \, (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}) + \mathbf{n}' \, (\alpha k_0 + \beta n_0) + i \, \mathbf{n}' \times (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}) \;,$$

$$\mathbf{m}'' = (t n_0' + s k_0')(D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) + (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}') \, (t n_0 + s k_0) + i \, (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}') \times (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) +$$

$$(\alpha k_0' + \beta n_0') \, \mathbf{n} + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{n}') \, n_0 + i \, (A\mathbf{k}' + B\mathbf{n}') \times \mathbf{n} \;,$$

$$\mathbf{n}'' = k_0' \, \mathbf{n} + \mathbf{k}' \, n_0 + i \, \mathbf{k}' \times \mathbf{n} + n_0' \, (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) + \mathbf{n}' \, (t n_0 + s k_0) + i \, \mathbf{n}' \times (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) \;,$$

$$\mathbf{l}'' = (\alpha k_0' + \beta n_0') \, \mathbf{k} + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{n}') \, k_0 + i \, (A\mathbf{k}' + B\mathbf{n}') \times \mathbf{k} +$$

$$(t n_0' + s k_0')(A\mathbf{k} + B\mathbf{n}) + (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}')(\alpha k_0 + \beta n_0) + i \, (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}') \times (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}) \;. \tag{11.2}$$

Требуем выполнения условий

$$\mathbf{l}'' = (A\mathbf{k}'' + B\mathbf{n}'') \;, \qquad l_0'' = (\alpha k_0'' + \beta n_0'') \;,$$

$$\mathbf{m}'' = (D\mathbf{n}'' + C\mathbf{k}'') \;, \qquad m_0'' = t n_0'' + s k_0'' \;.$$

Уравнение

$$\mathbf{l}'' = (A\mathbf{k}'' + B\mathbf{n}'') \tag{11.3a}$$

принимает вид:

$$(\alpha k_0' + \beta n_0') \, \mathbf{k} + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{n}') \, k_0 + i \, (A\mathbf{k}' + B\mathbf{n}') \times \mathbf{k} +$$

$$(t n_0' + s k_0')(A\mathbf{k} + B\mathbf{n}) + (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}')(\alpha k_0 + \beta n_0) + i \, (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}') \times (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}) =$$

$$A \, [\; k_0' \, \mathbf{k} + \mathbf{k}' \, k_0 + i \, \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + n_0' \, (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}) + \mathbf{n}' \, (\alpha k_0 + \beta n_0) + i \, \mathbf{n}' \times (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}) \;] +$$

$$B \, [\; k_0' \, \mathbf{n} + \mathbf{k}' \, n_0 + i \, \mathbf{k}' \times \mathbf{n} + n_0' \, (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) + \mathbf{n}' \, (t n_0 + s k_0) + i \, \mathbf{n}' \times (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) \;] \;;$$

откуда следуют равенства

$$
\begin{aligned}
& k_0'\mathbf{k}: && \alpha + sA = A \ , \\
& k_0\mathbf{k}': && A + \alpha C = A \ , \\
& n_0\mathbf{n}': && \beta D = \beta A + tB \ , \\
& n_0'\mathbf{n}: && tB = AB + BD \ , \\
& k_0'\mathbf{n}: && sB = B \ , \\
& k_0\mathbf{n}': && B + \alpha D = \alpha A + sB \ , \\
& n_0'\mathbf{k}: && \beta + tA = A^2 + BC \ , \\
& n_0\mathbf{k}': && \beta C = B \ , \\
& \mathbf{k}' \times \mathbf{k}: && A + AC = A \ , \\
& \mathbf{n}' \times \mathbf{n}: && BD = AB + BD \ , \\
& \mathbf{n}' \times \mathbf{k}: && B + AD = A^2 + BC \ , \\
& \mathbf{k}' \times \mathbf{n}: && CB = B \ .
\end{aligned}
\tag{11.3b}
$$

Уравнение

$$
\mathbf{m}'' = (D\mathbf{n}'' + C\mathbf{k}'') \tag{11.4a}
$$

принимает вид:

$$
(tn_0' + sk_0')(D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) + (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}')\ (tn_0 + sk_0) + i\ (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}') \times (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) +
$$

$$
(\alpha k_0' + \beta n_0')\ \mathbf{n} + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{n}')\ n_0 + i\ (A\mathbf{k}' + B\mathbf{n}') \times \mathbf{n} =
$$

$$
D\ [\ k_0'\ \mathbf{n} + \mathbf{k}'\ n_0 + i\ \mathbf{k}' \times \mathbf{n} + n_0'\ (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) + \mathbf{n}'\ (tn_0 + sk_0) + i\ \mathbf{n}' \times (D\mathbf{n} + C\mathbf{k})\ ] +
$$

$$
C\ [\ k_0'\ \mathbf{k} + \mathbf{k}'\ k_0 + i\ \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + n_0'\ (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}) + \mathbf{n}'\ (\alpha k_0 + \beta n_0) + i\ \mathbf{n}' \times (A\mathbf{k} + B\mathbf{n})\ ]\ ;
$$

откуда следуют равенства

$$
\begin{aligned}
& k_0'\mathbf{k}: && sC = C \ , \\
& k_0\mathbf{k}': && sC = C \ , \\
& n_0\mathbf{n}': && tD + B = tD + \beta C \ , \\
& n_0'\mathbf{n}: && tD + \beta = D^2 + CB \ , \\
& k_0'\mathbf{n}: && sD + \alpha = D \ , \\
& k_0\mathbf{n}': && sD = sD + \alpha C \ , \\
& n_0'\mathbf{k}: && tC = DC + CA \ , \\
& n_0\mathbf{k}': && tC + A = D \ , \\
& \mathbf{k}' \times \mathbf{k}: && C^2 = C \ , \\
& \mathbf{n}' \times \mathbf{n}: && D^2 + B = D^2 + CB \ , \\
& \mathbf{n}' \times \mathbf{k}: && DC = DC + CA \ , \\
& \mathbf{k}' \times \mathbf{n}: && CD + A = D \ .
\end{aligned}
\tag{11.4b}
$$

Уравнение

$$
l_0'' = (\alpha k_0'' + \beta n_0'') \tag{11.5a}
$$

принимает вид:

$$
\begin{gathered}
(\alpha k_0' + \beta n_0')\, k_0 + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{n}')\, \mathbf{k} + \\
(tn_0' + sk_0')(\alpha k_0 + \beta n_0) + (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}')\, (A\mathbf{k} + B\mathbf{n}) = \\
\alpha\, [\, k_0'\, k_0 + \mathbf{k}'\, \mathbf{k} + n_0'\, (\alpha k_0 + \beta n_0) + \mathbf{n}'\, (A\mathbf{k} + B\mathbf{n})\,] + \\
\beta\, [\, (tn_0' + sk_0')\, (tn_0 + sk_0) + (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}')\, (D\mathbf{n} + C\mathbf{k})\,]\, ;
\end{gathered}
$$

откуда следуют равенства

$$
\begin{aligned}
k_0'k_0 : &\qquad \alpha + \alpha s = \alpha + \beta s^2 \, , \\
n_0'n_0 : &\qquad t\beta = \alpha\beta + \beta t^2 \, , \\
k_0'n_0 : &\qquad s\beta = \beta st \, , \\
k_0 n_0' : &\qquad \beta + t\alpha = \alpha^2 + \beta ts \, , \\
\mathbf{k}'\mathbf{k} : &\qquad A + CA = \alpha + \beta C^2 \, , \\
\mathbf{n}'\mathbf{n} : &\qquad DB = \alpha B + \beta D^2 \, , \\
\mathbf{k}'\mathbf{n} : &\qquad CB = \beta CD \, , \\
\mathbf{k}\mathbf{n}' : &\qquad B + AD = \alpha A + \beta CD \, .
\end{aligned}
\tag{11.5b}
$$

Рассматриваем уравнение

$$
m_0'' = tn_0'' + sk_0'' \tag{11.6a}
$$

оно записывается так:

$$
\begin{gathered}
(tn_0' + sk_0')\, (tn_0 + sk_0) + (D\mathbf{n}' + C\mathbf{k}')\, (D\mathbf{n} + C\mathbf{k}) + \\
(\alpha k_0' + \beta n_0') n_0 + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{n}')\, \mathbf{n} = \\
t\, [\, k_0'\, n_0 + \mathbf{k}'\, \mathbf{n} + n_0'\, (tn_0 + sk_0) + \mathbf{n}'\, (D\mathbf{n} + C\mathbf{k})\, ; + \\
s [\, k_0'\, k_0 + \mathbf{k}'\, \mathbf{k} + n_0'\, (\alpha k_0 + \beta n_0) + \mathbf{n}'\, (A\mathbf{k} + B\mathbf{n})\,]\, ;
\end{gathered}
$$

откуда следуют равенства

$$
\begin{aligned}
k_0'k_0 : &\qquad s^2 = s \, , \\
n_0'n_0 : &\qquad t^2 + \beta = t^2 + s\beta \, , \\
k_0'n_0 : &\qquad st + \alpha = t \, , \\
k_0 n_0' : &\qquad ts = st + \alpha s \, , \\
\mathbf{k}'\mathbf{k} : &\qquad C^2 = s \, , \\
\mathbf{n}'\mathbf{n} : &\qquad D^2 + B = tD + sB \, , \\
\mathbf{k}'\mathbf{n} : &\qquad CD + A = t \, , \\
\mathbf{n}'\mathbf{k} : &\qquad DC = tC + sA \, .
\end{aligned}
\tag{11.6b}
$$

Собираем уравнения вместе:

$$
\begin{gathered}
\alpha + sA = A \, , \\
\alpha C = 0 \, , \\
\beta D = \beta A + tB \, , \\
tB = AB + BD \, , \\
sB = B \, ,
\end{gathered}
$$

$$B + \alpha D = \alpha A + sB \ ,$$
$$\beta + tA = A^2 + BC \ ,$$
$$\beta C = B \ ,$$
$$AC = 0 \ ,$$
$$0 = AB \ ,$$
$$B + AD = A^2 + BC \ ,$$
$$CB = B \ ;$$
$$sC = C \ ,$$
$$sC = C \ ,$$
$$B = \beta C \ ,$$
$$tD + \beta = D^2 + CB \ ,$$
$$sD + \alpha = D \ ,$$
$$0 = \alpha C \ ,$$
$$tC = DC + CA \ ,$$
$$tC + A = D \ ,$$
$$C(C-1) = 0 \ ,$$
$$B = CB \ ,$$
$$0 = CA \ ,$$
$$CD + A = D \ ;$$
$$\alpha s = \beta s^2 \ ,$$
$$t\beta = \alpha\beta + \beta t^2 \ ,$$
$$s\beta = \beta st \ ,$$
$$\beta + t\alpha = \alpha^2 + \beta ts \ ,$$
$$A + CA = \alpha + \beta C^2 \ ,$$
$$DB = \alpha B + \beta D^2 \ ,$$
$$CB = \beta CD \ ,$$
$$B + AD = \alpha A + \beta CD \ ;$$
$$s(s-1) = 0 \ ,$$
$$\beta = s\beta \ ,$$
$$st + \alpha = t \ ,$$
$$0 = \alpha s \ ,$$
$$C^2 = s \ ,$$
$$D^2 + B = tD + sB \ ,$$
$$CD + A = t \ ,$$
$$DC = tC + sA \ .$$

Из полученной системы уравнений следует, что для s, C возможны значения:

$$C = s = 0 \ , \qquad C = s = 1 \ .$$

В случае $C = s = 0$ приходим к единственному решению:
решение $(KN-1)$,

$$\alpha = A \ , \qquad B = \beta = 0 \ , \qquad C = s = 0 \ , \qquad D = t = A \ ,$$

$$\mathbf{l} = A\mathbf{k} \ , \qquad l_0 = Ak_0 \ , \qquad \mathbf{m} = A\mathbf{n} \ , \qquad m_0 = An_0 \ , \tag{11.7a}$$

$$G = \left| \begin{array}{cc} K & N \\ AK & AN \end{array} \right| , \qquad G'G = \left| \begin{array}{cc} K' & N' \\ AK' & AN' \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} K & N \\ AK & AN \end{array} \right| =$$

$$\left| \begin{array}{cc} (K'K + AN'K) & (K'N + AN'N) \\ A(K'K + AN'K) & A(K'N + AN'N) \end{array} \right| . \tag{11.7b}$$

В случае $C = s = +1$ также приходим к единственному решению:
решение $(KN-2)$,

$$A = \alpha = 0 \ , \qquad B = \beta = 0 \ , \qquad C = s = +1 \ , \qquad D = t = 0 \ ,$$

$$\mathbf{l} = 0 \ , \qquad l_0 = 0 \ , \qquad \mathbf{m} = \mathbf{k} \ , \qquad m_0 = k_0 \ , \tag{11.8a}$$

$$G = \left| \begin{array}{cc} K & N \\ 0 & K \end{array} \right| , \qquad \left| \begin{array}{cc} K' & N' \\ 0 & K' \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} K & N \\ 0 & K \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} K'K & (K'N + N'K) \\ 0 & K'K \end{array} \right| . \tag{11.8b}$$

12 Два независимых вектора: вариант I(ml)

Рассмотрим следующий случай двух независимых векторов, **вариант II(m,l)**:

$$\mathbf{n} = A\mathbf{m} + B\mathbf{l} \ , \qquad l_0 = \alpha m_0 + \beta l_0 \ ,$$

$$\mathbf{k} = D\mathbf{l} + C\mathbf{m} \ , \qquad k_0 = tl_0 + sm_0 \ . \tag{12.1}$$

Здесь возникает два решения:
решение $(ML-1)$,

$$G = SG'S^{-1} = \left| \begin{array}{cc} AN' & AK' \\ N' & K' \end{array} \right| \equiv \left| \begin{array}{cc} AL & AM \\ L & M \end{array} \right| ; \tag{12.2}$$

решение $(ML-2)$,

$$G = SG'S^{-1} = \left| \begin{array}{cc} K' & 0 \\ N' & K' \end{array} \right| \equiv \left| \begin{array}{cc} M & 0 \\ L & M \end{array} \right| . \tag{12.3}$$

13 Три независимых вектора: варианты I(k,m,n) и I(m,k,l))

Перейдем к анализу случая трех независимых векторов. Рассмотрим **вариант I(k,m,n)**:

$$\mathbf{l} = A\mathbf{k} + B\mathbf{m} + C\mathbf{n} \;, \qquad l_0 = \alpha k_0 + \beta m_0 + s n_0 \;. \tag{13.1}$$

Сначала исследуем следствия из более простого второго линейного ограничения в (13.1). Формулы для k_0'', m_0'', n_0'', l_0'' принимают вид:

$$k_0'' = k_0' k_0 + \mathbf{k}'\mathbf{k} + n_0'(\alpha k_0 + \beta m_0 + s n_0) + \mathbf{n}'(A\mathbf{k} + B\mathbf{m} + C\mathbf{n}) \;,$$

$$m_0'' = m_0' m_0 + \mathbf{m}'\mathbf{m} + (\alpha k_0' + \beta m_0' + s n_0') n_0 + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}' + C\mathbf{n}')\mathbf{n} \;,$$

$$n_0'' = k_0'\, n_0 + \mathbf{k}'\, \mathbf{n} + n_0'\, m_0 + \mathbf{n}'\, \mathbf{m} \;,$$

$$l_0'' = (\alpha k_0' + \beta m_0' + s n_0') k_0 + (A\mathbf{k} + B\mathbf{m} + C\mathbf{n})\mathbf{k} + m_0'(\alpha k_0 + \beta m_0 + s n_0) + \mathbf{m}'(A\mathbf{k} + B\mathbf{m} + C\mathbf{n}) \;.$$

Требуем

$$l_0'' = \alpha k_0'' + \beta m_0'' + s n_0'' \tag{13.2a}$$

или

$$(\alpha k_0' + \beta m_0' + s n_0') k_0 + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}' + C\mathbf{n}')\mathbf{k} + m_0'(\alpha k_0 + \beta m_0 + s n_0) + \mathbf{m}'(A\mathbf{k} + B\mathbf{m} + C\mathbf{n}) =$$

$$\alpha\; [\; k_0' k_0 + \mathbf{k}'\mathbf{k} + n_0'(\alpha k_0 + \beta m_0 + s n_0) + \mathbf{n}'(A\mathbf{k} + B\mathbf{m} + C\mathbf{n})\;] +$$

$$\beta [\; m_0' m_0 + \mathbf{m}'\mathbf{m} + (\alpha k_0' + \beta m_0' + s n_0') n_0 + (A\mathbf{k}' + B\mathbf{m}' + C\mathbf{n}')\mathbf{n}\;] +$$

$$s\; [\; k_0'\, n_0 + \mathbf{k}'\, \mathbf{n} + n_0'\, m_0 + \mathbf{n}'\, \mathbf{m}\;] \;,$$

в результате приходим к уравнениям

$$\begin{array}{ll}
k_0' k_0 :\; \alpha = \alpha \;, & m_0' m_0 :\; \beta = \beta \;, \\
m_0' k_0 :\; \beta + \alpha = 0 \;, & n_0' n_0 :\; 0 = (\alpha + \beta) s \;, \\
n_0' k_0 :\; s = \alpha^2 \;, & m_0' n_0 :\; s = \beta^2 \;, \\
n_0' m_0 :\; 0 = \beta(\alpha + s) \;, & k_0' n_0 :\; 0 = \beta(\alpha + s) \;, \\
\mathbf{k}'\mathbf{k} :\; A = \alpha \;, & \mathbf{m}'\mathbf{m} :\; B = \beta \;, \\
\mathbf{m}'\mathbf{k} :\; B + A = 0 \;, & \mathbf{n}'\mathbf{n} :\; 0 = (\alpha + \beta) C \;, \\
\mathbf{n}'\mathbf{k} :\; C = \alpha A & \mathbf{m}'\mathbf{n} :\; C = \beta B \;, \\
\mathbf{n}'\mathbf{m} :\; 0 = \alpha B + \beta s \;, & \mathbf{k}'\mathbf{n} :\; 0 = \beta A + \beta s \;.
\end{array} \tag{13.2b}$$

Выпишем только независимые уравнения

$$\alpha = A, \qquad B = \beta = -A, \qquad C = s = A^2, \qquad A(A + s) = 0 \;. \tag{13.2c}$$

Для уравнений (13.2c) возможны два класса решений:

$$(I) \qquad A = \alpha = 0 \;, \qquad B = \beta = 0 \;, \qquad C = s = 0 \;; \tag{13.3a}$$

$$(II) \qquad A = \alpha = -1, \qquad B = \beta = +1 \;, \qquad C = s = +1 \;. \tag{13.3b}$$

Убедимся, что найденные решения удовлетворяют также трем групповым уравнениям

$$\mathbf{l}'' = A\mathbf{k}'' + B\mathbf{m}'' + C\mathbf{n}'' \;; \tag{13.4a}$$

очевидно, что проверять нужно только решение типа II:

$$\mathbf{l} = -\mathbf{k} + \mathbf{m} + \mathbf{n}\ , \qquad l_0 = -k_0 + m_0 + n_0\ . \tag{13.4b}$$

Уравнение

$$\mathbf{l}'' = -\mathbf{k}'' + \mathbf{m}'' + \mathbf{n}''$$

примет вид:

$$(-k_0' + m_0' + n_0')\,\mathbf{k} + (-\mathbf{k}' + \mathbf{m}' + \mathbf{n}')\,k_0 +$$
$$i\,(-\mathbf{k}' + \mathbf{m}' + \mathbf{n}') \times \mathbf{k} + m_0'\,(-\mathbf{k} + \mathbf{m} + \mathbf{n}) +$$
$$\mathbf{m}'(-k_0 + m_0 + n_0) + i\,\mathbf{m}' \times (-\mathbf{k} + \mathbf{m} + \mathbf{n}) =$$

$$-[\,k_0'\,\mathbf{k} + \mathbf{k}'\,k_0 + i\,\mathbf{k}' \times \mathbf{k} + n_0'\,(-\mathbf{k} + \mathbf{m} + \mathbf{n}) +$$
$$\mathbf{n}'\,(-k_0 + m_0 + n_0) + i\,\mathbf{n}' \times (-\mathbf{k} + \mathbf{m} + \mathbf{n})\,] +$$
$$[\,m_0'\,\mathbf{m} + \mathbf{m}'\,m_0 + i\,\mathbf{m}' \times \mathbf{m} + (-k_0' + m_0' + n_0')\,\mathbf{n} +$$
$$(-\mathbf{k}' + \mathbf{m}' + \mathbf{n}')\,n_0 + i\,(-\mathbf{k}' + \mathbf{m}' + \mathbf{n}') \times \mathbf{n}\,] +$$
$$[\,k_0'\,\mathbf{n} + \mathbf{k}'\,n_0 + i\,\mathbf{k}' \times \mathbf{n} + n_0'\,\mathbf{m} + \mathbf{n}'\,m_0 + i\,\mathbf{n}' \times \mathbf{m}\,]\ .$$

Непосредственно видно, что полученное уравнение – это тождество.

Установленные решения (13.3) отвечают следующим множествам матриц:

<u>решение $(KMN-1)$</u>,

$$G = \begin{vmatrix} K & N \\ 0 & M \end{vmatrix},$$

$$G'G = \begin{vmatrix} K' & N' \\ 0 & M' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K & N \\ 0 & M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K'K & (K'N + N'M) \\ 0 & M'M \end{vmatrix}; \tag{13.5}$$

<u>решение $(KMN-2)$</u>,

$$\mathbf{l} = -\mathbf{k} + \mathbf{m} + \mathbf{n}\ ,\ l_0 = -k_0 + m_0 + n_0\ , \tag{13.6a}$$

$$G = \begin{vmatrix} K & N \\ -K + M + N & M \end{vmatrix};$$

это множество вырожденных матриц ранга 2. Проверим выполнение закона умножения:

$$\begin{vmatrix} K' & N' \\ -K' + M' + N' & M' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K & N \\ -K + M + N & M \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} K'K + N'(-K + M + N) & K'N + N'M \\ (-K' + M' + N')K + M'(-K + M + N) & (-K' + M' + N')N + M'M \end{vmatrix} = \tag{13.6b}$$

$$\begin{vmatrix} (K'K - N'K + N'M + N'N) & K'N + N'M \\ (-K'K + N'K + M'M + M'N) & (-K'N + M'N + N'N + M'M) \end{vmatrix}.$$

Вводим обозначения

$$K'' = K'K - N'K + N'M + N'N \; ,$$

$$M'' = -K'N + M'N + N'N + M'M \; ,$$

$$N'' = K'N + N'M \; ,$$

вычисляем

$$-K'' + M'' + N'' =$$

$$-K'K + N'K - N'M - N'N - K'N + M'N + N'N + M'M + K'N + N'M =$$

$$-K'K + N'K + M'N + M'M \; ;$$

Таким образом, (13.6b) имеет требуемую структуру полугруппы:

$$G'G = \begin{vmatrix} K'' & N'' \\ -K'' + M'' + N'' & M' \end{vmatrix} . \qquad (13.6c)$$

В силу отмеченной выше симметрии есть аналогичные две возможности типа **I(kml)**:

решение $(KML - 1)$,

$$G = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K' & N' \\ 0 & M' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M' & 0 \\ N & K \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} K & 0 \\ L & M \end{vmatrix} ; \qquad (13.7a)$$

решение $(KML - 2)$,

$$G = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K' & N' \\ -K' + M' + N' & M' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} M' & -K' + M' + N' \\ N' & K' \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} K & -M + K + L \\ L & M \end{vmatrix} . \qquad (13.7b)$$

14 Три независимых вектора: варианты I(n,l,k) и I(n,l,m))

Рассмотрим **вариант I(n,l,k)** (ему изоморфен **вариант I(n,l,m)**):

$$\mathbf{m} = A\mathbf{n} + B\mathbf{l} + C\mathbf{k} \; , \qquad m_0 = \alpha n_0 + \beta l_0 + s k_0 \; . \qquad (14.1)$$

Исследуем сначала более простое второе условие связи. Формулы умножения параметров принимают вид:

$$k_0'' = k_0' \, k_0 + \mathbf{k}' \, \mathbf{k} + n_0' \, l_0 + \mathbf{n}' \, \mathbf{l} \; ,$$

$$m_0'' = (\alpha n_0' + \beta l_0' + s k_0')(\alpha n_0 + \beta l_0 + s k_0) +$$

$$(A\mathbf{n}' + B\mathbf{l}' + C\mathbf{k}')(A\mathbf{n} + B\mathbf{l} + C\mathbf{k}) + l_0' \, n_0 + \mathbf{l}' \, \mathbf{n} \; ,$$

$$n_0'' = k_0' \, n_0 + \mathbf{k}' \, \mathbf{n} + n_0'(\alpha n_0 + \beta l_0 + s k_0) + \mathbf{n}' \, (A\mathbf{n} + B\mathbf{l} + C\mathbf{k}) \; ,$$

$$l_0'' = l_0' \, k_0 + \mathbf{l}' \, \mathbf{k} + (\alpha n_0' + \beta l_0' + s k_0') l_0 + (A\mathbf{n}' + B\mathbf{l}' + C\mathbf{k}')\mathbf{l} \; . \qquad (14.2a)$$

Требуем

$$m_0'' = \alpha n_0'' + \beta l_0'' + s k_0'' \; ,$$

т. е.

$$(\alpha n_0' + \beta l_0' + s k_0')(\alpha n_0 + \beta l_0 + s k_0) +$$
$$(A\mathbf{n}' + B\mathbf{l}' + C\mathbf{k}')(A\mathbf{n} + B\mathbf{l} + C\mathbf{k}) + l_0'\, n_0 + \mathbf{l}'\,\mathbf{n} =$$
$$\alpha\;[\; k_0'\, n_0 + \mathbf{k}'\,\mathbf{n} + n_0'(\alpha n_0 + \beta l_0 + s k_0) + \mathbf{n}'\,(A\mathbf{n} + B\mathbf{l} + C\mathbf{k})\;] +$$
$$\beta\;[\; l_0'\, k_0 + \mathbf{l}'\,\mathbf{k} + (\alpha n_0' + \beta l_0' + s k_0') l_0 + (A\mathbf{n}' + B\mathbf{l}' + C\mathbf{k}')\mathbf{l}\;] +$$
$$s\;[\; k_0'\, k_0 + \mathbf{k}'\,\mathbf{k} + n_0'\, l_0 + \mathbf{n}'\,\mathbf{l}\;]\;.$$

Получаем систему уравнений

$$n_0' n_0 :\; \alpha^2 = \alpha^2\;, \qquad l_0' l_0 :\; \beta^2 = \beta^2\;, \qquad k_0' k_0 :\; s^2 = s\;,$$
$$n_0' l_0 :\; \alpha\beta = \alpha\beta + \alpha\beta + s\;, \qquad n_0' k_0 :\; \alpha s = \alpha s\;,$$
$$l_0' n_0 :\; \beta\alpha + 1 = 0\;, \qquad l_0' k_0 :\; \beta s = \beta\;,$$
$$k_0' n_0 :\; s\alpha = \alpha\;, \qquad k_0' l_0 :\; s\beta = \beta s\;, \tag{14.2b}$$
$$\mathbf{n}'\mathbf{n} :\; A^2 = \alpha A, \qquad \mathbf{l}'\mathbf{l} :\; B^2 = \beta B\;, \qquad \mathbf{k}'\mathbf{k} :\; C^2 = s\;,$$
$$\mathbf{n}'\mathbf{l} :\; AB = \alpha B + \beta A + s\;, \qquad \mathbf{n}'\mathbf{k} :\; AC = \alpha C\;,$$
$$\mathbf{l}'\mathbf{n} :\; BA + 1 = 0\;, \qquad \mathbf{l}'\mathbf{k} :\; BC = \beta\;,$$
$$\mathbf{k}'\mathbf{n} :\; CA = \alpha\;, \qquad \mathbf{k}'\mathbf{l} :\; CB = \beta C\;. \tag{14.2c}$$

Оставляем независимые уравнения:

$$\alpha\beta = -1, \qquad s = -\alpha\beta = +1, \qquad C^2 = s = 1\;,$$
$$A(A-\alpha) = 0, \qquad C(A-\alpha) = 0, \qquad B(B-\beta) = 0,$$
$$AB = \alpha B + \beta A + 1\;, \qquad AC = \alpha C\;,$$
$$BA + 1 = 0\;, \qquad BC = \beta\;,$$
$$CA = \alpha\;, \qquad CB = \beta C\;;$$

отсюда следует единственное решение:

<u>решение $(NLK-1)$</u>,

$$\alpha = A, \qquad B = \beta = -\frac{1}{A}\;, \qquad C = s = +1,$$
$$\mathbf{m} = \mathbf{k} + (A\,\mathbf{n} - A^{-1}\,\mathbf{l})\;, \qquad m_0 = k_0 + (A\,n_0 - A^{-1} l_0)\;; \tag{14.3a}$$

соответствующие матрицы G имеют структуру

$$G = \left| \begin{array}{cc} K & N \\ L & (K + AN - A^{-1}L) \end{array} \right|. \tag{14.3b}$$

Это множество вырожденных матриц с нулевым определителем. Найдем закон умножения для таких матриц:

$$G'G = \left| \begin{array}{cc} K' & N' \\ L' & (K' + AN' - A^{-1}L') \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} K & N \\ L & (K + AN - A^{-1}L) \end{array} \right| =$$
$$\left| \begin{array}{cc} (K'K + N'L) & [\; K'N + N'(K + AN - A^{-1}L)\;] \\ [\; L'K + (K' + AN' - A^{-1}L')L\;] & [\; L'N + (K' + AN' - A^{-1}L')(K + AN - A^{-1}L)\;] \end{array} \right|. \tag{14.4a}$$

Найдем явное выражение для блока (22) в матрице (14.4a):

$$(22) = L'N + (K' + AN' - A^{-1}L')\,(K + AN - A^{-1}L) =$$

$$(K'K - N'L) + A\,(K'N + N'K) -$$

$$A^{-1}\,(K'L + L'K) + A^2 N'N + A^{-2}L'L\;. \qquad (14.4b)$$

Вводим обозначения

$$K'' = K'K + N'L\;,$$

$$N'' = K'N + N'(K + AN - A^{-1}L)\;,$$

$$L'' = L'K + (K' + AN' - A^{-1}L')L\;.$$

Вычислим

$$K'' + AN'' - A^{-1}L'' =$$

$$K'K + N'L + A\,[\;K'N + N'(K + AN - A^{-1}L)\;] -$$

$$A^{-1}\,[\;L'K + (K' + AN' - A^{-1}L')L\;] =$$

$$(K'K - N'L) + A\,(K'N + N'K) -$$

$$A^{-1}\,(L'K + K'L) + (A^2 N'N + A^{-2}L'L)\;. \qquad (14.4c)$$

Выражения, полученные в (14.4b) и (14.4c), совпадают, т. е. выполняется требуемое равенство:

$$(22) = K'' + AN'' - A^{-1}L''\;,$$

следовательно (см. (14.4a))

$$G'G = \begin{vmatrix} K'' & N'' \\ L'' & (K'' + AN'' - A^{-1}L'') \end{vmatrix} = G''\;.$$

Получим описание симметричного **варианта I(n,l,m)** трех независимых векторов. Для этого над матрицами типа (14.3b) совершим преобразование подобия:

решение $(NLM - 1)$,

$$G = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K' & N' \\ L' & (K' + AN' - A^{-1}L') \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} (K' + AN' - A^{-1}L') & L' \\ N' & K' \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} (M + AL - A^{-1}N) & N \\ L & M \end{vmatrix}\;. \qquad (14.5)$$

15 Анализ вырожденных 4-мерных матриц ранга 3

Явный вид матриц (2.1) следующий:

$$G = \begin{vmatrix} k_0 + k_3 & k_1 - ik_2 & n_0 + n_3 & n_1 - in_2 \\ k_1 + ik_2 & k_0 - k_3 & n_1 + in_2 & n_0 - n_3 \\ l_0 + l_3 & l_1 - il_2 & m_0 + m_3 & m_1 - im_2 \\ l_1 + il_2 & l_0 - l_3 & m_1 + im_2 & m_0 - m_3 \end{vmatrix}. \qquad (15.1)$$

Есть 16 простых способов получить подгруппы (3×3)-матриц, зануляя одну i-строку и один j-столбец в исходной 4-мерной матрице. Это следующие варианты:

$$\begin{array}{cccc} (00)\,, & (01)\,, & (02)\,, & (03)\,, \\ (10)\,, & (11)\,, & (12)\,, & (13)\,, \\ (20)\,, & (21)\,, & (22)\,, & (23)\,, \\ (30)\,, & (31)\,, & (32)\,, & (33)\,. \end{array} \tag{15.2}$$

Детализируем один вариант (33)

$$\left| \begin{array}{cccc} k_0+k_3 & k_1-ik_2 & n_0+n_3 & n_1-in_2 \\ k_1+ik_2 & k_0-k_3 & n_1+in_2 & n_0-n_3 \\ l_0+l_3 & l_1-il_2 & m_0+m_3 & m_1-im_2 \\ l_1+il_2 & l_0-l_3 & m_1+im_2 & m_0-m_3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} k_0+k_3 & k_1-ik_2 & 2n_0 & 0 \\ k_1+ik_2 & k_0-k_3 & 2n_1 & 0 \\ 2l_0 & 2l_1 & 2m_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|,$$

$$m_1=0, \qquad m_2=0, \qquad m_0=m_3\,,$$
$$l_0=l_3, \qquad l_1=-il_2, \qquad n_1=in_2, \qquad n_0=n_3\,. \tag{15.3}$$

Заключение

Матрицам G вида (2.1) отвечает естественный инвариант – их определитель (см. [1–3]):

$$\det G = (kk)\,(mm) + (nn)\,(ll) - 2\,(kn)\,(ml) -$$
$$2\,(\,-k_0\,\mathbf{n} + n_0\,\mathbf{k} + i\,\mathbf{k}\times\mathbf{n}\,)\,(\,-m_0\,\mathbf{l} + l_0\,\mathbf{m} + i\,\mathbf{m}\times\mathbf{l}\,)$$

(используется обозначение $(kk) = k_0k_0 - \mathbf{kk}$ и т. п.), который является функцией от четырех 4-мерных величин k, m, l, n с достаточно простой математической структурой

$$\det G = \sum G^{ABCD}_{abcd}\,(k_a)^A (m_b)^B (l_c)^C (n_d)^D\,,$$
$$A \le 2, \qquad B \le 2, \qquad C \le 2, \qquad D \le 2, \qquad A+B+C+D = 4\,.$$

Развитая выше классификация подмножеств вырожденных матриц

$$(n) \longrightarrow 7\,, \quad (m) \longrightarrow 7\,, \quad (n) \longrightarrow 4\,, \quad (l) \longrightarrow 4\,,$$
$$(km) \longrightarrow 5, \qquad (l,n) \longrightarrow 2, \qquad (k,n) \longrightarrow 2,$$
$$(k,l) \longrightarrow 2, \qquad (n,m) \longrightarrow 2, \qquad (m,l) \longrightarrow 2$$
$$(k,m,n) \longrightarrow 2, \qquad (k,m,l) \longrightarrow 2,$$
$$(n,l,k) \longrightarrow 2, \qquad (n,l,m) \longrightarrow 2.$$

фиксирует все существенно разные возможности (14 систем из 16 уравнений привели к 45 решениям; и есть 16 решений – вырожденных матриц ранга 3) зануления этого инварианта, при сохранении структуры полугрупп на соответствующих матрицах

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований: Румынско-Белорусский проект, грант Ф12РА-002.

Авторы благодарны организаторам VIII международной конференции «Финслеровы обобщения теории относительности» за поддержку нашего участия в работе конференции.

Литература

[1] Bogush A.A., Red'kov V.M. On Unique parametrization of the linear group $GL(4.C)$ and its subgroups by using the Dirac algebra basis // *NPCS*, 2008, Vol. 11, № 1, pp. 1 − 24.

[2] Red'kov V.M., Bogush A.A., Tokarevskaya N.G. (4×4)-matrices in Dirac parametrization: inversion problem and determinant // arXiv:0709.3574v2 [hep-th].

[3] Red'kov V.M., Bogush A.A., Tokarevskaya N.G. On Parametrization of the Linear GL(4,C) and Unitary SU(4) Groups in Terms of Dirac Matrices // *SIGMA*, 2008, Vol. 014, 46 pages.

DOES IT POSSIBLE FINSLER GEOMETRIZATION OF THE POLARIZATION OPTICS?

E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov

[1] *Mozyr State Pedagogical University, Mozyr, Belarus*

[2] *Institute of Physics, National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

e.ovsiyuk@mail.ru, v.redkov@dragon.bas-net.by

This paper provides an overview of some of the features of the matrix calculus to analyze the issues of polarization optics. There is reason to believe that methods of Finsler geometry can be of help here. Since the Mueller matrices, acting on real four-dimensional Stokes vectors, are real, then in possible studies of Mueller matrices one can use their parametrization obtained by applying the Dirac basis. The law of multiplication for the elements of the original group is complicated, but it is suitable for analytical study. The explicit form of the determinant of any matrix in this parametrization, provides us with a natural classifying invariant in a variety of the matrices. This parametrization is used to describe the possible classes of Mueller matrices, including the degenerate cases of matrices with zero determinant, described within the structure of semigroups. It turns out that imposing linear relationships on the 16 parameters that are compatible with the group multiplication law, we can specify mostly classes of degenerate matrices with the structure of semigroups. A complete classification of such semigroups of rank 1, 2, 3 is elaborated.

Key Words: polarization optics, Dirac matrices, Mueller matrices, classification, degenerate matrices, semigroup.