О ПОЛИАДИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЯХ НА МНОЖЕСТВЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МАТРИЦ

А.М. Гальмак

Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев, Белоруссия

mgup@mogilev.by

Для любого целого $m \geq 1$ и любой подстановки на m символах на множестве всех пространственных матриц, у которых число сечений какой-либо фиксированной ориентации равно m, определяются частичные многоместные операции. Устанавливается связь между этими операциями и многоместными операциями на множестве m-компонентных вектор-матриц. Найдены условия, при которых построенные многоместные операции являются ассоциативными. Изучаются транспонированные пространственные матрицы.

Ключевые слова: матрица, операция, кольцо.

Введение

Термин "пространственные матрицы" употребляют как в широком смысле — для многомерных матриц любого размера, так и в узком смысле — для трехмерных матриц. В данной работе пространственные матрицы — это всегда трехмерные матрицы. Для обозначения множества всех пространственных матриц фиксированного размера $m \times n \times p$ над кольцом P в статье используется символ $\mathbf{M}_{m \times n \times p}(P)$. Необходимые в дальнейшем сведения о пространственных матрицах можно найти в [1, 2].

В [3] для фиксированных $n \geq 1$, $m \geq 1$, $l \geq 2$, подстановки $\sigma \in S_m$ и ассоциативного кольца P были определены и изучались многоместные операции $[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}$, $[\ ]^{(j)}_{l,\sigma,m}$ и $[\ ]^{(k)}_{l,\sigma,m}$, действующие соответственно на множествах $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$ всех пространственных матриц размера $m \times n \times n$ над P, $\mathbf{M}_{n \times m \times n}(P)$ всех пространственных матриц размера $n \times m \times n$ над P, $\mathbf{M}_{n \times n \times m}(P)$ всех пространственных матриц размера $n \times n \times m$ над P. Как видно, указанные многоместные операции определены на множествах пространственных матриц, у которых, по крайней мере, два размера совпадают. Если $m < n$ $(m > n)$, то такие пространственные матрицы называют сжатыми (расширенными) в соответствующем направлении [2].

При $m = 1$ множества $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$, $\mathbf{M}_{n \times m \times n}(P)$ и $\mathbf{M}_{n \times n \times m}(P)$ совпадают с множеством $M_n(P)$ всех квадратных матриц порядка n над P, а операции $[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}$, $[\ ]^{(j)}_{l,\sigma,m}$ и $[\ ]^{(k)}_{l,\sigma,m}$ для $l = 2$ и тождественной подстановки σ — с бинарной операцией умножения обычных матриц. А так как умножать можно не только квадратные матрицы, то естественно ожидать, что указанные выше многоместные операции из [3] могут быть в некоторых случаях применимы и к пространственным матрицам, у которых все три размера различны. Выяснению именно этого обстоятельства и посвящена данная работа. При этом используется существующая между пространственными матрицами и вектор-матрицами связь, установленная в [4]. Информация о вектор-матрицах имеется также в [5].

1 Частичные полиадические операции $[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,m}$, $[\ ]^{(j)}_{l,\sigma,m}$ и $[\ ]^{(k)}_{l,\sigma,m}$

Зафиксируем целое $m \geq 1$ и выделим во множестве всех пространственных матриц над кольцом P три подмножества:

- множество $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$ всех пространственных матриц, у которых число сечений ориентации (i) равно m;

- множество $\mathbf{M}^{(j)}(m, P)$ всех пространственных матриц, у которых число сечений ориентации (j) равно m;
- множество $\mathbf{M}^{(k)}(m, P)$ всех пространственных матриц, у которых число сечений ориентации (k) равно m.

Ясно, что для любых целых $s \geq 1$, $t \geq 1$ справедливы строгие включения

$$\mathbf{M}_{m\times s\times t}(P) \subset \mathbf{M}^{(i)}(m, P), \quad \mathbf{M}_{s\times m\times t}(P) \subset \mathbf{M}^{(j)}(m, P), \quad \mathbf{M}_{s\times t\times m}(P) \subset \mathbf{M}^{(k)}(m, P).$$

В частности, для любого целого $n \geq 1$ верно

$$\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P) \subset \mathbf{M}^{(i)}(m, P), \quad \mathbf{M}_{n\times m\times n}(P) \subset \mathbf{M}^{(j)}(m, P), \quad \mathbf{M}_{n\times n\times m}(P) \subset \mathbf{M}^{(k)}(m, P).$$

Зафиксируем целое $l \geq 2$, подстановку $\sigma \in S_m$ и пусть P — ассоциативное кольцо. Если

$$A_1 = (a_{ijk})_1, \quad A_2 = (a_{ijk})_2, \quad \ldots\ , \quad A_l = (a_{ijk})_l$$

такие пространственные матрицы из $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$, что число сечений ориентации (k) предыдущей пространственной матрицы равно числу сечений ориентации (j) последующей пространственной матрицы, то определены произведения

$$(a_{1jk})_1(a_{\sigma(1)jk})_2\ \ldots\ (a_{\sigma^{l-2}(1)jk})_{l-1}(a_{\sigma^{l-1}(1)jk})_l = U_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(a_{mjk})_1(a_{\sigma(m)jk})_2\ \ldots\ (a_{\sigma^{l-2}(m)jk})_{l-1}(a_{\sigma^{l-1}(m)jk})_l = U_m.$$

Полагая $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{M}^{(i)}(m, P)$, где

$$(a_{1jk}) = U_1,\ \ldots\ , (a_{mjk}) = U_m,$$

видим, что на $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$ определена частичная l-арная операция

$$[A_1A_2\ \ldots\ A_l]^{(i)}_{l,\,\sigma,\,m} = A = (a_{ijk}), \tag{1.1}$$

где

$$(a_{rjk}) = (a_{rjk})_1(a_{\sigma(r)jk})_2\ \ldots\ (a_{\sigma^{l-2}(r)j\,k})_{l-1}(a_{\sigma^{l-1}(r)jk})_l, \quad r = 1, \ldots, m. \tag{1.2}$$

Таким образом, для любых целых $p_0 \geq 1, \ldots, p_l \geq 1$ и любых пространственных матриц

$$A_1 = (a_{ijk})_1 \in \mathbf{M}_{m\times p_0\times p_1}(P), \quad A_2 = (a_{ijk})_2 \in \mathbf{M}_{m\times p_1\times p_2}(P), \quad \ldots$$

$$\ldots \quad , A_{l-1} = (a_{ijk})_{l-1} \in \mathbf{M}_{m\times p_{l-2}\times p_{l-1}}(P), \quad A_l = (a_{ijk})_l \in M_{m\times p_{l-1}\times p_l}(P)$$

определена пространственная матрица (1.1) из $\mathbf{M}_{m\times p_0\times p_l}$, у которой для любого $r = 1, \ldots, m$ r-ое сечение ориентации (i) определяется равенством (1.2). Все сечения ориентации (i) пространственной матрицы A являются матрицами размера $p_0 \times p_l$. Ясно, что на множестве $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ частичная l-арная операция $[\ ]^{(i)}_{l,\,\sigma,\,m}$ совпадает с обычной l-арной операцией $[\ ]^{(i)}_{l,\,\sigma,\,m}$ из [3].

Если в определении частичной l-арной операции $[\ ]^{(i)}_{l,\,\sigma,\,m}$ заменить ориентацию (i) ориентацией (j), а множество $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$ — множеством $\mathbf{M}^{(j)}(m, P)$, то получим определение частичной l-арной операции $[\ ]^{(j)}_{l,\,\sigma,\,m}$. А именно, если

$$B_1 = (b_{ijk})_1 \in M_{p_0\times m\times p_1}(P), \quad B_2 = (b_{ijk})_2 \in M_{p_1\times m\times p_2}(P), \quad \ldots$$
$$\ldots \quad B_{l-1} = (b_{ijk})_{l-1} \in M_{p_{l-2}\times m\times p_{l-1}}(P), \quad B_l = (b_{ijk})_l \in M_{p_{l-1}\times m\times p_l}(P),$$

то

$$[B_1B_2\,\ldots\,B_l]^{(j)}_{l,\,\sigma,\,k} = B = (b_{ijk}) \in M_{p_0\times m\times p_l}(P),$$

где

$$(b_{irk}) = (b_{irk})_1(b_{i\sigma(r)k})_2\,\ldots\,(b_{i\sigma^{l-2}(r)k})_{l-1}(b_{i\sigma^{l-1}(r)k})_l.$$

Ясно, что на множестве $\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$ частичная l-арная операция $[\ ]^{(j)}_{l,\,\sigma,\,m}$ совпадает с обычной l-арной операцией $[\ ]^{(j)}_{l,\,\sigma,\,m}$ из [3].

Если в определении частичной l-арной операции $[\ ]^{(i)}_{l,\,\sigma,\,m}$ заменить ориентацию (i) ориентацией (k), а множество $\mathbf{M}^{(i)}(m,P)$ — множеством $\mathbf{M}^{(k)}(m,P)$, то получим определение частичной l-арной операции $[\ ]^{(k)}_{l,\,\sigma,\,m}$. А именно, если

$$C_1 = (c_{ijk})_1 \in \mathbf{M}_{p_0\times p_1\times m}(P), \quad C_2 = (c_{ijk})_2 \in \mathbf{M}_{p_1\times p_2\times m},\ \ldots$$
$$\ldots\ ,C_{l-1} = (c_{ijk})_{l-1} \in \mathbf{M}_{p_{l-2}\times p_{l-1}\times m}(P), \quad C_l = (c_{ijk})_l \in \mathbf{M}_{p_{l-1}\times p_l\times m_1}(P),$$

то

$$[C_1C_2\,\ldots\,C_l]^{(k)}_{l,\,\sigma,\,m} = C = (c_{ijk}) \in \mathbf{M}_{p_0\times p_l\times m}(P),$$

где

$$(c_{ijr}) = (c_{ijr})_1(c_{ij\sigma(r)})_2\,\ldots\,(c_{ij\sigma^{l-2}(r)})_{l-1}(c_{ij\sigma^{l-1}(r)})_l.$$

Ясно, что на множестве $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$ частичная l-арная операция $[\ ]^{(k)}_{l,\,\sigma,\,m}$ совпадает с обычной l-арной операцией $[\ ]^{(k)}_{l,\,\sigma,\,m}$ из [3].

2 Отображения $\phi_{(i)}$, $\phi_{(j)}$, $\phi_{(k)}$, $\psi_{(i)}$, $\psi_{(j)}$, $\psi_{(k)}$.

Зафиксируем целое $m \geq 1$ и выделим во множестве $\mathbf{M}(m,P)$ всех m-компонентных вектор-матриц над кольцом P множество $\mathbf{K}(m,\ P)$ всех вектор-матриц, у которых все компоненты имеют один и тот же размер. Заметим, что у разных вектор-матриц из $\mathbf{K}(m,P)$ размеры компонент не обязаны совпадать.

Ясно, что для любых целых $s \geq 1, t \geq 1$

$$\mathbf{M}_{s\times t}(m,P) \subset \mathbf{K}(m,P),$$

где $\mathbf{M}_{s\times t}(m,P)$ — множество всех m-компонентных вектор-матриц размера $s\times t$ над P. В частности

$$\mathbf{M}_n(m,P) \subset \mathbf{K}(m,P),$$

где $\mathbf{M}_n(m,P)$ — множество всех m-компонентных вектор-матриц порядка n над P.

Для каждой вектор-матрицы

$$\mathbf{A} = (A_1,\,\ldots\,,A_k) \in \mathbf{K}(m,P) \tag{2.1}$$

положим

$$A_1 = (a_{1jk}),\,\ldots\,,A_m = (a_{mjk}), \tag{2.2}$$

то есть отождествим компоненты вектор-матрицы (2.1) с соответствующими сечениями ориентации (i) пространственной матрицы

$$(a_{ijk}) \in \mathbf{M}^{(i)}(m,P). \tag{2.3}$$

В этом случае отображение

$$\phi_{(i)}: \ ((a_{1jk}), \ldots, (a_{mjk})) \to (a_{ijk})$$

является биекцией множества $\mathbf{K}(m, P)$ на множество $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$. Если для вектор-матриц (2.1) положить

$$A_1 = (a_{i1k}), \ldots, A_m = (a_{1mk}), \tag{2.4}$$

то есть отождествить компоненты вектор-матрицы (2.1) с соответствующими сечениями ориентации (j) пространственной матрицы

$$(a_{ijk}) \in \mathbf{M}^{(j)}(m, P), \tag{2.5}$$

то получим биекцию

$$\phi_{(j)}: \ ((a_{i1k}), \ldots, (a_{1mk})) \to (a_{ijk})$$

множества $\mathbf{K}(m, P)$ на множество $\mathbf{M}^{(j)}(m, P)$.

Если для вектор-матриц (2.1) положить

$$A_1 = (a_{ij1}), \ldots, A_m = (a_{ijm}), \tag{2.6}$$

то есть отождествить компоненты вектор-матрицы (2.1) с соответствующими сечениями ориентации (k) пространственной матрицы

$$(a_{ijk}) \in \mathbf{M}^{(k)}(m, P), \tag{2.7}$$

то получим биекцию

$$\phi_{(k)}: \ ((a_{ij1}), \ldots, (a_{ijm})) \to (a_{ijk})$$

множества $\mathbf{K}(m, P)$ на множество $\mathbf{M}^{(k)}(m, P)$.

Ясно, что сужения отображений $\phi_{(i)}$, $\phi_{(j)}$, и $\phi_{(k)}$ на множество $\mathbf{M}_{s\times t}(m, P)$ совпадают с биекциями

$$\phi_{(i)}: \ \mathbf{M}_{s\times t}(m, P) \to \mathbf{M}_{m\times s\times t}(P),$$
$$\phi_{(j)}: \ \mathbf{M}_{s\times t}(m, P) \to \mathbf{M}_{s\times m\times t}(P),$$
$$\phi_{(k)}: \ \mathbf{M}_{s\times t}(m, P) \to \mathbf{M}_{s\times t\times m}(P)$$

из [4].

Ясно, что отображение $\psi_{(i)}$, ставящее в соответствие каждой пространственной матрице (2.3) вектор-матрицу (2.1) с компонентами (2.2) является биекцией $\mathbf{M}^{(i)}(m, P)$ на $\mathbf{K}(m, P)$. Аналогично, отображение $\psi_{(j)}$, ставящее в соответствие каждой пространственной матрице (2.5) вектор-матрицу (2.1) с компонентами (2.4), является биекцией $\mathbf{M}^{(j)}(m, P)$ на $\mathbf{K}(m, P)$; отображение $\psi_{(k)}$, ставящее в соответствие каждой пространственной матрице (2.7) вектор-матрицу (2.1) с компонентами (2.6), является биекцией $\mathbf{M}^{(k)}(m, P)$ на $\mathbf{K}(m, P)$.

Для любого $r \in \{i, j, k\}$ отображения $\phi_{(r)}$ и $\psi_{(r)}$ являются взаимообратными, то есть справедлива

Лемма 2.1 Для любых

$$r \in \{i, j, k\}, \quad \mathbf{A} \in \mathbf{K}(m, P), \quad A \in \mathbf{M}^{(r)}(m, P)$$

верно

$$\psi_{(r)}(\phi_{(r)}(\mathbf{A})) = \mathbf{A}, \quad \phi_{(r)}(\psi_{(r)}(A)) = A.$$

Лемма 2.2 Если для вектор-матриц

$$\mathbf{A}_1 = (A_{11}, \ldots, A_{1m}), \ldots, \mathbf{A}_l = (A_{l1}, \ldots, A_{lm}) \in \mathbf{K}(m, P) \tag{2.8}$$

определена вектор-матрица $[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\,\sigma,\,m}$, то определена пространственная матрица

$$\left[\phi_i(\mathbf{A}_1) \ldots \phi_{(i)}(\mathbf{A}_l)\right]^{(i)}_{l,\,\sigma,\,m} \tag{2.9}$$

и верно равенство

$$\phi_{(i)}\left([\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\,\sigma,\,m}\right) = \left[\phi_{(i)}(\mathbf{A}_1) \ldots \phi_{(l)}(\mathbf{A}_l)\right]^{(i)}_{l,\,\sigma,\,m}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Существование пространственной матрицы (2.9) является следствием равенства размеров компонент каждой вектор-матрицы (2.8) и размеров сечений ориентации (i) ее образа при отображении $\phi_{(i)}$.

Положим

$$\phi_{(i)}\left([\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\,\sigma,\,m}\right) = U = (u_{ijk}),$$

$$\left[\phi_{(i)}(\mathbf{A}_1) \ldots \phi_{(i)}(\mathbf{A}_l)\right]^{(i)}_{l,\,\sigma,\,m} = V = (v_{ijk}).$$

Так как

$$[\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\,\sigma,\,m} = (X_1, \ldots, X_m),$$

где

$$X_r = A_{1r}A_{2\sigma(r)} \ldots A_{l\sigma^{l-1}(r)}, \quad r = 1, \ldots, m,$$

то r-ое сечение ориентации (i) пространственной матрицы U имеет вид

$$(U_{rjk}) = A_{1r}A_{2\sigma(r)} \ldots A_{l\sigma^{l-1}(r)}, \quad r = 1, \ldots, m. \tag{2.11}$$

Так как

$$\phi_{(i)}(\mathbf{A}_1) = B_1 = (b_{ijk})_1, \ldots, \phi_{(i)}(\mathbf{A}_l) = B_l = (b_{ijk})_l,$$

где

$$(b_{1jk})_1 = A_{11}, \ldots, (b_{mjk})_1 = A_{1m},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(b_{1jk})_l = A_{l1}, \ldots, (b_{mjk})_l = A_{lm},$$

то r-ое сечение ориентации (i) пространственной матрицы V имеет вид

$$(V_{rjk}) = (b_{rjk})_1(b_{\sigma(r)jk})_2 \ldots (b_{\sigma^{l-1}(r)jk})_l = A_{1r}A_{2\sigma(r)} \ldots A_{l\sigma^{l-1}(r)},$$

то есть

$$(V_{rjk}) = A_{1r}A_{2\sigma(r)} \ldots A_{l\sigma^{l-1}(r)}, r = 1, \ldots, m. \tag{2.12}$$

Из (2.11) и (2.12) вытекает $U = V$, то есть верно равенство (2.10).
Лемма доказана.

Для ориентаций (j) и (k) справедливы утверждения, аналогичные лемме 2.2.

Сформулируем все три утверждения в виде одной леммы.

Лемма 2.3. Если для вектор-матриц

$$\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_l \in \mathbf{K}(m, P)$$

определена вектор-матрица $[\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_l]_{l,\,\sigma,\,m}$, то для любого $r \in \{i, j, k\}$ определена пространственная матрица

$$\left[\phi_{(r)}(\mathbf{A}_1) \ldots \phi_{(r)}(\mathbf{A}_l)\right]^{(r)}_{l,\,\sigma,\,m}$$

и верно равенство

$$\phi_{(r)}([\mathbf{A}_1 \ldots \mathbf{A}_l]_{l,\,\sigma,\,m}) = \left[\phi_{(r)}(\mathbf{A}_1) \ldots \phi_{(r)}(\mathbf{A}_l)\right]^{(r)}_{l,\,\sigma,\,m}.$$

Аналогичная лемма справедлива для отображений $\psi_{(i)}$, $\psi_{(j)}$ и $\psi_{(k)}$.

Лемма 2.4. Если для пространственных матриц

$$A_1, \ldots, A_l \in \mathbf{M}^{(r)}(m, P), \quad r \in \{i, j, k\}$$

определена пространственная матрица $[A_1 \ldots A_l]^{(r)}_{l,\,\sigma,\,m}$, то для любого $r \in \{i, j, k\}$ определена вектор-матрица

$$[\psi_{(r)}(A_1) \ldots \psi_{(r)}(A_l)]_{l,\,\sigma,\,m}$$

и верно равенство

$$\psi_{(r)}\left([A_1 \ldots A_l]^{(r)}_{l,\,\sigma,\,m}\right) = \left[\psi_{(r)}(A_1 \ldots \psi_{(r)}(A_l)\right]_{l,\,\sigma,\,m}.$$

3 Ассоциативность частичных l-арных операций $[\ ]^{(i)}_{l,\sigma,\,m}$, $[\ ]^{(j)}_{l,\,\sigma,\,m}$, $[\ ]^{(k)}_{l,\,\sigma,\,m}$

Теорема 3.1 Пусть P — ассоциативное кольцо,

$$A_1 = (a_{ijk})_1 \in M_{m\times p_0\times p_1}(P), A_2 = (a_{ijk})_2 \in M_{m\times p_1\times p_2}(P), \ldots$$

$$\ldots, A_{2l-2} = (a_{ijk})_{2l-2} \in M_{m\times p_{2l-3}\times p_{2l-2}}(P), A_{2l-1} = (a_{ijk})_{2l-1} \in M_{m\times p_{2l-2}\times p_{2l-1}}(P).$$

Если подстановка $\sigma \in S_m$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то

$$\begin{aligned} &\left[A_1 \ldots A_s\,[A_{s+1} \ldots A_{s+l}]^{(i)}_{l,\,\sigma,\,m}\,A_{s+l+1} \ldots A_{2l-1}\right]^{(i)}_{l,\,\sigma,\,m} = \\ &= \left[A_1 \ldots A_t\,[A_{t+1} \ldots A_{t+l}]^{(i)}_{l,\,\sigma,\,m}\,A_{t+l+1} \ldots A_{2l-1}\right]^{(i)}_{l,\,\sigma,\,m} \end{aligned} \tag{3.1}$$

для любых $s, t = 0, 1, \ldots, l-1$.

Доказательство. Обозначим левую и правую части в (3.1) соответственно через U и V. Ясно, что обе пространственные матрицы U и V определены. Применяя вначале лемму 2.4, затем теорему 1 из [5] и снова лемму 2.4, получим

$$\psi_{(i)}(U) = \left[\psi_{(i}(A_1) \ldots \psi_{(i)}(A_s)\left[\psi_{(i)}(A_{s+1}) \ldots \psi_{(i)}(A_{s+l})\right]_{l,\sigma,m} \psi_{(i)}(A_{s+l+1}) \ldots \psi_{(i)}(A_{2l-1})\right]_{l,\sigma,m} =$$

$$= \left[\psi_{(i)}(A_1) \ldots \psi_{(i)}(A_t)\left[\psi_{(i)}(A_{t+1}) \ldots \psi_{(i)}(A_{t+l})\right]_{l,\sigma,m} \psi_{(i)}(A_{t+l+1}) \ldots \psi_{(i)}(A_{2l-1})\right]_{l,\sigma,m} = \psi_{(i)}(V),$$

то есть $\psi_{(i)}(U) = \psi_{(i)}(V)$, откуда

$$\phi_{(i)}(\psi_i(U)) = \phi_{(i)}(\psi_{(i)}(V)).$$

Применяя к последнему равенству лемму 2.1, получим $U=V$, то есть верно равенство (3.1). Теорема доказана.

Для ориентаций (j) и (k) справедливы теоремы, аналогичные теореме 3.1. Все три теоремы можно объединить в виде одной теоремы.

Теорема 3.2. Пусть P — ассоциативное кольцо, $r \in \{i,j,k\}$, σ — подстановка из S_m, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, $A_1, A_2, \ldots, A_{2l-1}$ — пространственные матрицы из $\mathbf{M}^{(r)}(m,P)$. Тогда, если для некоторого $s = 0,1,\ldots,l-1$ определена пространственная матрица

$$\Big[A_1 \ldots A_s [A_{s+1} \ldots A_{s+l}]^{(r)}_{l,\,\sigma,\,m} A_{s+l+1} \ldots A_{2l-1}\Big]^{(r)}_{l,\,\sigma,\,m} \in \mathbf{M}^{(r)}(m,P), \tag{3.2}$$

то для любого $t = 0,1,\ldots,l-1$ определена пространственная матрица

$$\Big[A_1 \ldots A_t\, [A_{t+1} A_{t+l}]^{(r)}_{l,\,\sigma,\,m}\, A_{t+l+1} \ldots A_{2l-1}\Big]^{(r)}_{l,\,\sigma,\,m} \in \mathbf{M}^{(r)}(m,P) \tag{3.3}$$

и верно равенство

$$\Big[A_1 \ldots A_s [A_{s+1} \ldots A_{s+l}]^{(r)}_{l,\,\sigma,\,m} A_{s+l+1} \ldots A_{2l-1}\Big]^{(r)}_{l,\,\sigma,\,m} =$$
$$= \Big[A_1 \ldots A_t [A_{t+1} \ldots A_{t+l}]^{(r)}_{l,\,\sigma,\,m} A_{t+l+1} \ldots A_{2l-1}\Big]^{(r)}_{l,\,\sigma,\,m}. \tag{3.4}$$

Следствие 3.1. Пусть P — ассоциативное кольцо, $r \in \{i,j,k\}$, m делит $l-1$, σ — цикл длины m из S_m, $A_1, \ldots, A_{2l-1}$ — пространственные матрицы из $\mathbf{M}^{(r)}(m,P)$. Тогда, если для некоторого $s = 0,1,\ldots,l-1$ определена пространственная матрица (3.2), то для любого $t = 0,1,\ldots,l-1$ определена пространственная матрица (3.3) и верно равенство (3.4).

Полагая в следствии 3.1 $l = m+1$, получим

Следствие 3.2. Пусть P — ассоциативное кольцо, $r \in \{i,j,k\}$, σ — цикл длины m из S_m, $A_1, \ldots, A_{2m+1}$ — пространственные матрицы из $\mathbf{M}^{(r)}(m,P)$. Тогда, если для некоторого $s = 0,1,\ldots,m$ определена пространственная матрица

$$\Big[A_1 \ldots A_s\, [A_{s+1} \ldots A_{s+m+1}]^{(r)}_{m+1,\,\sigma,\,m}\, A_{s+m+2} \ldots A_{2m+1}\Big]^{(r)}_{m+1,\,\sigma,\,m},$$

то для любого $t = 0,1,\ldots,m$ определена пространственная матрица

$$\Big[A_1 \ldots A_t\, [A_{t+1} \ldots A_{t+m+1}]^{(r)}_{m+1,\,\sigma,\,m}\, A_{t+m+2} \ldots A_{2m+1}\Big]^{(r)}_{m+1,\,\sigma,\,m},$$

и верно равенство

$$\Big[A_1 \ldots A_s\, [A_{s+1} \ldots A_{s+m+1}]^{(r)}_{m+1,\,\sigma,\,m}\, A_{s+m+2} \ldots A_{2m+1}\Big]^{(r)}_{m+1,\,\sigma,\,m} =$$
$$= \Big[A_1 \ldots A_t\, [A_{t+1} \ldots A_{t+m+1}]^{(r)}_{m+1,\,\sigma,\,m}\, A_{t+m+2} \ldots A_{2m+1}\Big]^{(r)}_{m+1,\,\sigma,\,m}.$$

Следствие 3.3. Пусть P — ассоциативное кольцо, $r \in \{i,j,k\}$, σ — подстановка порядка 2 из S_m, A, B, C, D и E — пространственные матрицы из $\mathbf{M}^{(r)}(m,P)$. Тогда, если определена одна из пространственных матриц

$$\Big[[ABC]^{(r)}_{3,\,\sigma,\,m}\, DE\Big]^{(r)}_{3,\,\sigma,\,m},\ \Big[A\,[BCD]^{(r)}_{3,\,\sigma,\,m}\, E\Big]^{(r)}_{3,\,\sigma,\,m},\ \Big[AB\,[CDE]^{(r)}_{3,\,\sigma,\,m}\Big]^{(r)}_{3,\,\sigma,\,m},$$

то определены две другие пространственные матрицы и верны равенства

$$\Big[[ABC]^{(r)}_{3,\,\sigma,\,m}\,DE\Big]^{(r)}_{3,\,\sigma,\,m}=\Big[A\,[BCD]^{(r)}_{3,\,\sigma,\,m}\,E\Big]^{(r)}_{3,\,\sigma,\,m}=\Big[AB\,[CDE]^{(r)}_{3,\,\sigma,\,m}\Big]^{(r)}_{3,\,\sigma,\,m}.$$

Полагая в следствии 3.3, $m=2,\ \sigma=(12)$, получим

Следствие 3.4. Пусть P — ассоциативное кольцо, $A=(A_1,A_2)$, $B=(B_1,B_2)$, $C=(C_1,C_2)$, $D=(D_1,D_2)$, $E=(E_1,E_2)$ — пространственные матрицы из $\mathbf{M}^{(r)}(2,P)$. Тогда, если определена одна из пространственных матриц

$$\Big[[ABC]^{(r)}_{3,\,(12),\,2}\,DE\Big]^{(r)}_{3,\,(12),\,2},\ \Big[A[BCD]^{(r)}_{3,\,(12),\,2}E\Big]^{(r)}_{3,\,(12),\,2},\ \Big[AB[CDE]^{(r)}_{3,\,(12),\,2}\Big]^{(r)}_{3,\,(12),\,2},$$

то определены две другие пространственные матрицы и верны равенства

$$\Big[[ABC]^{(r)}_{3,\,(12),\,2}DE\Big]^{(r)}_{3,\,(12),\,2}=\Big[A[BCD]^{(r)}_{3,\,(12),\,2}E\Big]^{(r)}_{3,\,(12),\,2}=\Big[AB[CDE]^{(r)}_{3,\,(12),\,2}\Big]^{(r)}_{3,\,(12),\,2}.$$

Ясно, что подмножество $\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P)$ множества $\mathbf{M}^{(i)}(m,P)$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]^{(i)}_{l,\,\sigma,\,m}$. Аналогично множество $\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]^{(j)}_{l,\,\sigma,\,m}$, множество $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]^{(k)}_{l,\,\sigma,\,m}$. Поэтому из теоремы 3.2 вытекает следующая теорема из [3].

Теорема 3.3 [3]. Если подстановка $\sigma\in S_m$ удовлетворяет условию $\sigma^l=\sigma$, то универсальные алгебры $<\mathbf{M}_{m\times n\times n}(P),[\ ]^{(i)}_{l,\,\sigma,\,m}>$, $<\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P),[\ ]^{(j)}_{l,\,\varpi,\,m}>$, $<\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P),[\ ]^{(k)}_{l,\,\sigma,\,m}>$, где P — ассоциативное кольцо, являются изоморфными l-арными полугруппами.

4 Транспонированные пространственные матрицы

Определение 4.1 [4]. Пространственная матрица $B=(b_{ijk})\in\mathbf{M}_{m\times p\times n}(P)$ называется (i)-*транспонированной* для пространственной матрицы $A=(a_{ijk})\in\mathbf{M}_{m\times n\times p}(P)$, если все ее сечения ориентации (i) являются транспонированными матрицами для соответствующих сечений ориентации (i) пространственной матрицы A, то есть

$$(b_{tjk})=(a_{tjk})',\quad t=1,\ldots,m.$$

Аналогично определяются (j)-*транспонированные* пространственные матрицы и (k)-*транспонированные* пространственные матрицы.

Для обозначения (r)-транспонированной пространственной матрицы для пространственной матрицы A, где $r\in\{i,j,k\}$, будем употреблять следующее обозначение: $A^{(',r)}=(a_{ijk})^{(',r)}$.

Можно заметить, что для кубических матриц понятие (i)-транспонируемости совпадает с понятием транспонируемости по индексам j и k [1, 2]. Аналогично, (j)-транспонируемость совпадает с транспонируемостью по индексам i и k, а (k)-транспонируемость совпадает с транспонируемостью по индексам i и j. Поэтому, следуя [1, 2], для транспонированных кубических матриц $A^{(',i)}$, $A^{(',j)}$ и $A^{(',k)}$ можно использовать также соответственно обозначения $A^{(j,k)}$, $A^{(i,k)}$, $A^{(i,j)}$. Следующее предложение является аналогом соответствующего утверждения для обычных матриц.

Теорема 4.1 Пусть σ — подстановка из S_m, удовлетворяющая условию $\sigma^l=\sigma$,

$$A_1=(a_{ijk})_1,\ldots,A_l=(a_{ijk})_l\in M^{(i)}(m,P)\tag{4.1}$$

такие пространственные матрицы над ассоциативным кольцом с единицей, что определена пространственная матрица

$$[A_1A_2\ldots A_{l-1}A_l]^{(i)}_{l,\,\sigma,\,m}\,. \qquad (4.2)$$

Тогда определена пространственная матрица

$$\left[A_l^{(',\,i)}A_{l-1}^{(',\,i)}\,\ldots\,A_2^{(',\,i)}A_1^{(',\,i)}\right]^{(i)}_{l,\,\sigma^{-1},\,m} \qquad (4.3)$$

и верно равенство

$$\Big([A_1A_2\ldots A_{l-1}A_l]^{(i)}_{l,\,\sigma,\,m}\Big)^{(',\,i)}=\left[A_l^{(',\,i)}A_{l-1}^{(',\,i)}\,\ldots\,A_2^{(',\,i)}A_1^{(',\,i)}\right]^{(i)}_{l,\,\sigma^{-1},\,m}. \qquad (4.4)$$

Доказательство. Обозначим пространственную матрицу (4.2) через $A=(a_{ijk})$ и выпишем ее r-ое сечение (a_{rjk}) ориентации (i), которое согласно (1.2), и, ввиду тождественности подстановки σ^{l-1}, принимает вид

$$(a_{rjk})=(a_{rjk})_1(a_{\sigma(r)jk})_2\ldots(a_{\sigma^{l-2}(r)jk})_{l-1}(a_{rjk})_l,\quad r=1,\ldots,m.$$

Если положить $\tau=\sigma^{-1}$, то из условия $\sigma^l=\sigma$ получаем

$$\tau=\sigma^{\,l-2},\tau^2=\sigma^{\,l-3},\ldots,\tau^{\,l-2}=\sigma,\tau^{\,l-1}=\varepsilon,\tau^{\,l}=\tau, \qquad (4.5)$$

где ε — тождественная подстановка.

Обозначим пространственную матрицу из левой части (4.4) через $B=(b_{ijk})$, то есть $B=A^{(',\,i)}$. Тогда, используя соответствующий бинарный результат и (4.5), выпишем r-ое сечение ориентации (i) матрицы B:

$$(b_{rjk})=(a_{rjk})'=((a_{rjk})_1(a_{\sigma(r)jk})_2\ldots(a_{\sigma^{l-2}(r)jk})_{l-1}(a_{rjk})_l)'=$$

$$=(a_{rjk})_l'(a_{\sigma^{l-2}(r)jk})_{l-1}'\ldots(a_{\sigma(r)jk})_2'(a_{rjk})_1'=(a_{rjk})_l'(a_{\tau(r)jk})_{l-1}'\ldots(a_{\tau^{l-2}(r)jk})_2'(a_{rjk})_1',$$

то есть

$$(b_{rjk})=(a_{rjk})_l'(a_{\tau(r)jk})_{l-1}'\ldots(a_{\tau^{l-2}(r)jk})_2'(a_{rjk})_1'. \qquad (4.6)$$

Так как для любого $t=1,\ldots,l$ сечения ориентации (i) пространственной матрицы $A_t^{(',\,i)}=(a_{ijk})_t^{(',\,i)}$ имеют вид

$$(a_{1jk})_t',\ldots,(a_{mjk})_t',$$

то из (4.6) вытекает, что определена пространственная матрица (4.3), у которой r-ое сечение ориентации (i) совпадает с правой частью (4.6). Таким образом, для любого $r=1,\ldots,m$ r-ые сечения ориентации (i) в левой и правой частях равенства (4.4) совпадают, то есть данное равенство верно.
Теорема доказана.

Для ориентаций (j) и (k) справедливы утверждения, аналогичные теореме 4.1. Сформулируем все три утверждения в виде одной теоремы.

Теорема 4.2. Пусть подстановка σ из S_m, удовлетворяет условию $\sigma^l=\sigma$, $r\in\{i,j,k\}$, P — ассоциативное кольцо с единицей, $A_1,\ldots,A_l$ — такие пространственные матрицы из $M^{(r)}(m,P)$, что определена пространственная матрица

$$[A_1A_2\ldots A_{l-1}A_l]^{(r)}_{l,\,\sigma,\,m}.$$

Тогда определена пространственная матрица

$$\left[A_l^{(',r)}A_{l-1}^{(',\,r)}\ \dots\ A_2^{(',\,r)}A_1^{(',\,r)}\right]^{(r)}_{l,\,\sigma^{-1},\,m}$$

и верно равенство

$$\left([A_1A_2\dots A_{l-1}A_l]^{(r)}_{l,\,\sigma,\,m}\right)^{(',\,r)} = \left[A_l^{(',\,r)}A_{l-1}^{(',\,r)}\dots A_2^{(',\,r)}A_1^{(',\,r)}\right]^{(r)}_{l,\,\sigma^{-1},\,m}.$$

Далее во всех следствиях P — ассоциативное кольцо с единицей

Следствие 4.1. Пусть σ — цикл длины t из S_m, $s \geq 1$, $r \in \{i, j, k\}$, $A_1, \dots, A_{st+1}$ — такие пространственные матрицы из $M^{(r)}(m, P)$, что определена пространственная матрица

$$[A_1A_2\dots A_{st}A_{st+1}]^{(r)}_{st+1,\,\sigma,\,m}.$$

Тогда определена пространственная матрица

$$\left[A_{st+1}^{(',\,r)}A_{st}^{(',\,r)}\ \dots\ A_2^{(',\,r)}A_1^{(',\,r)}\right]^{(r)}_{st+1,\,\sigma^{-1},\,m}$$

и верно равенство

$$\left([A_1A_2\dots A_{st}A_{st+1}]^{(r)}_{st+1,\,\sigma,\,m}\right)^{(',\,r)} = \left[A_{st+1}^{(',\,r)}A_{st}^{(',\,r)}\dots A_2^{(',\,r)}A_1^{(',\,r)}\right]^{(r)}_{st+1,\,\sigma^{-1},\,m}.$$

В частности, если $s = 1$, то

$$\left([A_1A_2\dots A_tA_{t+1}]^{(r)}_{t+1,\,\sigma,\,m}\right)^{(',\,r)} = \left[A_{t+1}^{(',\,r)}A_t^{(',\,r)}\dots A_2^{(',\,r)}A_1^{(',\,r)}\right]^{(r)}_{t+1,\,\sigma^{-1},\,m}.$$

Полагая в следствии 4.1 $t = m$, получим

Следствие 4.2. Пусть σ — цикл длины m из S_m, $s \geq 1$, $r \in \{i, j, k\}$, $A_1, \dots, A_{sm+1}$ — такие пространственные матрицы из $M^{(r)}(m, P)$, что определена пространственная матрица

$$[A_1A_2\dots A_{sm}A_{sm+1}]^{(r)}_{sm+1,\,\sigma,\,m}.$$

Тогда определена пространственная матрица

$$\left[A_{sm+1}^{(',r)} + A_{sm}^{(',r)}\dots A_2^{(',r)} + A_1^{(',r)}\right]^{(r)}_{sm+1,\sigma^{-1},m}$$

и верно равенство

$$\left([A_1A_2\dots A_{sm}A_{sm+1}]^{(r)}_{sm+1,\,\sigma,\,m}\right)^{(',\,r)} = \left[A_{sm+1}^{(',\,r)}A_{sm}^{(',\,r)}\dots A_2^{(',\,r)}A_1^{(',\,r)}\right]^{(r)}_{sm+1,\,\sigma^{-1},\,m}.$$

В частности, если $s = 1$, то

$$\left([A_1A_2\dots A_mA_{m+1}]^{(r)}_{m+1,\,\sigma,\,m}\right)^{(',\,r)} = \left[A_{m+1}^{(',\,r)}A_m^{(',\,r)}\dots A_2^{(',\,r)}A_1^{(',\,r)}\right]^{(r)}_{m+1,\,\sigma^{-1},\,m}.$$

Полагая в следствии 4.2 $\sigma = (12\dots m)$, получим

Следствие 4.3. Пусть $s \geq 1$, $r \in \{i, j, k\}$, $A_1, \dots, A_{sm+1}$ — такие пространственные матрицы из $M^{(r)}(m, P)$, что определена пространственная матрица

$$[A_1A_2\dots A_{sm}A_{sm+1}]^{(r)}_{sm+1,\,(12\dots m),\,m}.$$

Тогда определена пространственная матрица

$$\left[A_{sm+1}^{(',\,r)}A_{sm}^{(',\,r)}\,\ldots\,A_2^{(',\,r)}A_1^{(',\,r)}\right]^{(r)}_{sm+1,\,(m\ldots 21),\,m}$$

и верно равенство

$$\left([A_1A_2\ldots A_{sm}A_{sm+1}]^{(r)}_{sm+1,\,(12\ldots m),\,m}\right)^{(',\,r)}=\left[A_{sm+1}^{(',\,r)}A_{sm}^{(',\,r)}\,\ldots\,A_2^{(',\,r)}A_1^{(',\,r)}\right]^{(r)}_{sm+1,\,(m\ldots 21),\,m}.$$

В частности, если $s=1$, то

$$\left([A_1A_2\ldots A_mA_{m+1}]^{(r)}_{m+1,\,(12\ldots m),\,m}\right)^{(',\,r)}=\left[A_{m+1}^{(',\,r)}A_{m}^{(',\,r)}\,\ldots\,A_2^{(',\,r)}A_1^{(',\,r)}\right]^{(r)}_{m+1,\,(m\ldots 21),\,m}.$$

Так как для любой транспозиции $\sigma\in S_m$ верно $\sigma=\sigma^{-1}$, то, полагая в следствии 4.1 $t=2$, получим

Следствие 4.4. Пусть σ — транспозиция из S_m, $s\geq 1$, $r\in\{i,j,k\}$, $A_1,\ldots,A_{2s+1}$ — такие пространственные матрицы из $M^{(r)}(m,P)$, что определена пространственная матрица

$$[A_1A_2\ldots A_{2s}A_{2s+1}]^{(r)}_{2s+1,\,\sigma,\,m}.$$

Тогда определена пространственная матрица

$$\left[A_{2s+1}^{(',\,r)}A_{2s}^{(',\,r)}\,\ldots\,A_2^{(',\,r)}A_1^{(',\,r)}\right]^{(r)}_{2s+1,\,\sigma,\,m}$$

и верно равенство

$$\left([A_1A_2\ldots A_{2s}A_{2s+1}]^{(r)}_{2s+1,\,\sigma,\,m}\right)^{(',\,r)}=\left[A_{2s+1}^{(',\,r)}A_{2s}^{(',\,r)}\,\ldots\,A_2^{(',\,r)}A_1^{(',\,r)}\right]^{(r)}_{2s+1,\,\sigma,\,m}.$$

В частности, если $s=1$, то

$$\left([A_1A_2A_3]^{(r)}_{2,\,\sigma,\,m}\right)^{(',\,r)}=\left[A_3^{(',\,r)}A_2^{(',\,r)}A_1^{(',\,r)}\right]^{(r)}_{2s+1,\,\sigma,\,m}.$$

Следствие 4.4 можно получить и из следствия 4.2, полагая в нем $m=2$.

Если в следствии 4.4 положить $m=2$, то $\sigma=(12)$ и верно

Следствие 4.5. Пусть $s\geq 1$, $r\in\{i,j,k\}$, $A_1,\,\ldots,A_{2s+1}$ — такие пространственные матрицы из $M^{(r)}(m,P)$, что определена пространственная матрица

$$[A_1A_2\ldots A_{2s}A_{2s+1}]^{(r)}_{2s+1,\,(12),\,2}.$$

Тогда определена пространственная матрица

$$\left[A_{2s+1}^{(',\,r)}A_{2s}^{(',\,r)}\,\ldots\,A_2^{(',\,r)}A_1^{(',\,r)}\right]^{(r)}_{2s+1,\,(12),\,2}$$

и верно равенство

$$\left([A_1A_2\ldots A_{2s}A_{2s+1}]^{(r)}_{2s+1,\,(12),\,2}\right)^{(',\,r)}=\left[A_{2s+1}^{(',\,r)}A_{2s}^{(',\,r)}\,\ldots\,A_2^{(',\,r)}A_1^{(',\,r)}\right]^{(r)}_{2s+1,\,(12),\,2}.$$

В частности, если $s=1$, то

$$\left([A_1A_2A_3]^{(r)}_{2,\,(12),\,2}\right)^{(',\,r)}=\left[A_3^{(',\,r)}A_2^{(',\,r)}A_1^{(',\,r)}\right]^{(r)}_{3,\,(12),\,2}.$$

Следствие 4.5 можно получить и из следствия 4.3, если положить в нем $m=2$

Из теоремы 4.1 вытекает теорема 7.1 из [4], а также все следствия из нее. Кроме того, из теоремы 4.2 вытекают соответствующие утверждения о транспонировании пространственных матриц из $\mathbf{M}_{n\times m\times n}(P)$ и $\mathbf{M}_{n\times n\times m}(P)$.

Литература

[1] Соколов Н.П. Пространственные матрицы и их приложения. М., Наука, 1960, 300 с.

[2] Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. Киев, Наукова думка, 1972, 175 с.

[3] Гальмак А.М. Полиадические операции на множестве пространственных матриц // *Веснік ВДУ ім. П.М. Машэрава*, 2 (62), 2011, с. 15 – 21.

[4] Гальмак А.М. О вектор-матрицах и пространственных матрицах // *Проблемы физики, математики и техники*, 1 (10), 2012, с. 38 – 49.

[5] Гальмак А.М. Вектор-матрицы // *Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова*, 1 (37), серия В, 2011, с. 30 – 37.

ABOUT POLYADIC OPERATIONS ON THE SPACEMATRICES SET

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technology, Mogilev, Belarus

mgup@mogilev.by

For any integer number $m \geqslant 1$ and any substitution on m symbols on all spacematrices sets, which have m section of any fixed orientation, defined partial polyadic operations. Also connection between this operations and polyadic operations on the m-component vector-matrices set is defined. Conditions of associability of defined polyadic operations are found. Transposed spacematrices are studied.

Key Words: matrices, operation, ring.