ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НА ДЕКАРТОВЫХ СТЕПЕНЯХ СМЕЖНЫХ КЛАССОВ ГРУППЫ

А.М. Гальмак[1], Г.Н. Воробьев[1], В.Д. Балан[2]

[1] *Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев, Белоруссия*
[2] *Политехнический университет, Бухарест, Румыния*
mgup@mogilev.by, vbalan@mathem.pub.ro

Для любых $\ell \geq 3$, $k \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in S_k$ на декартовой степени A^k группы A, обладающей нормальной подгруппой B такой, что факторгруппа A/B – циклическая порядка, делящего $\ell - 1$, определяется ℓ-арная группа $< A^k, [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ с ℓ-арной операцией $[\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k}$. Изучаются свойства этой ℓ-арной операции на декартовых степенях смежных классов группы A по ее подгруппе B.

Ключевые слова: n-арная операция, полиадические матрицы, нормальная подгруппа, декартова степень, полуабелева, полуинвариант, полугруппа.

1 Введение

Напомним некоторые понятия теории n-арных групп, используемые в работе.

Согласно В. Дернте [1], универсальная алгебра $< A, [\ ] >$ с одной n-арной ($n \geq 2$) операцией $[\ ] : A^n \to A$ называется *n-арной группой*, если выполняются следующие условия:

1. n-арная операция $[\ ]$ на множестве A *ассоциативна*, то есть

$$[[a_1 \ldots a_n]a_{n+1} \ldots a_{2n-1}] = [a_1 \ldots a_i[a_{i+1} \ldots a_{i+n}]a_{i+n+1} \ldots a_{2n-1}],$$

   для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$ и всех $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1} \in A$;

2. каждое из уравнений

$$[a_1 \ldots a_{i-1}x_i a_{i+1} \ldots a_n] = b, i = 1, 2, \ldots, n$$

   однозначно разрешимо в A относительно x_i для всех $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$, $b \in A$.

Э. Пост заметил [2], что требование однозначной разрешимости уравнений в определении Дернте можно ослабить, потребовав только их разрешимость, а число уравнений уменьшить с n до двух ($i = 1, n$), а при $n \geq 3$ даже до одного (i – фиксированное из $\{2, \ldots, n-1\}$).

n-Арную группу $< A,\ [\ ] >$ называют [1, 2]: *абелевой*, если

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = [a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \ldots a_{\sigma(n)}]$$

для всех $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ и любой подстановки σ множества $\{1, \ldots, n\}$; *полуабелевой,* если

$$[aa_1 \ldots a_{n-2}b] = [ba_1 \ldots a_{n-2}a]$$

для всех $a, a_1, \ldots, a_{n-2}, b \in A$.

n-Арную подгруппу $< B,\ [\ ] >$ n-арной группы $< A,\ [\ ] >$ называют [1,2] *инвариантной* в ней, если

$$[x\underbrace{B\ \ldots\ B}_{n-1}] = [Bx\underbrace{B\ \ldots\ B}_{n-2}] = \cdots = [\underbrace{B\ \ldots\ B}_{n-2}xB] = [\underbrace{B\ \ldots\ B}_{n-1}x]$$

для любого $x \in A$. Если же

$$[x\underbrace{B\ \ldots\ B}_{n-1}] = [\underbrace{B\ \ldots\ B}_{n-1}x]$$

для любого $x \in A$, то $< B, \ [\ ] >$ называют [1, 2] *полуинвариантной* в $< A, \ [\ ] >$.

Согласно Э. Посту [2] (см. также [3]), группа A называется обертывающей для n-арной группы $< H, \ [\ ] >$, если она порождается множеством H, а бинарная операция в группе A и n-арная операция $[\ ]$ связаны условием

$$[x_1 x_2 \ldots x_n] = x_1 x_2 \ldots x_n$$

для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$. Множество

$$B = \{a_1 \ldots a_{n-1} | a_1, \ldots, a_{n-1} \in H\}$$

является нормальной подгруппой в A, факторгруппа A/B по которой – циклическая, имеющая порядок, делящий $n-1$. Группу B называют *соответствующей* для n-арной группы $< \ , \ [\ ] >$.

Обратная теорема Поста о смежных классах [2, 3] утверждает, что если факторгруппа A/B группы A по ее нормальной подгруппе B является циклической с образующим элементом aB и имеет порядок, делящий $n-1$, то $< aB, \ [\ ] >$ n-арная группа с n-арной операцией

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Обертывающей группой для $< aB, \ [\ ] >$ является A, а соответствующей группой – подгруппа B.

2 Предварительные результаты

Определение 2.1 [4,5]**.** Пусть A – группоид, $k \geq 2$, $\ell \geq 2$, σ – подстановка из S_k. Определим на A^k вначале бинарную операцию

$$\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1 y_{\sigma(1)}, x_2 y_{\sigma(2)}, \ldots, x_k y_{\sigma(k)}),$$

а затем ℓ-арную операцию

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_\ell]_{\ell,\sigma,k} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\ldots (\mathbf{x}_{\ell-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{\ell-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_\ell)) \ldots)).$$

Понятно, что операция $[\ ]_{2,\ \sigma,\ k}$ совпадает с операцией $\overset{\sigma}{\circ}$.

Замечание 2.2. Легко заметить, что если $\sigma = (12 \ldots k)$, то операция $\overset{\sigma}{\circ}$ совпадает с операцией

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \circ (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1 y_2, x_2 y_3, \ldots, x_{k-1} y_k, x_k y_1)$$

из [6, определения 2.2.3], а операция $[\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k}$ – с операцией $[\ ]_{\ell,\ k}$ из того же определения. Операции $\circ$ и $[\ ]_{\ell,\ k}$ впервые были определены в [7], где также впервые была определена и операция $[\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k}$ для случая полугруппы A. Заметим также, что операция $[\ ]_{n,\ n-1}$ аналогична n-арной операции, которую Э. Пост определил на множестве всех n-арных подстановок [2].

Теорема 2.3 [4]**.** Пусть A – полугруппа,

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) \in A^k, \quad i = 1, 2, \ldots, \ell.$$

Тогда $[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_\ell]_{\ell,\sigma,k} = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$, где

$$y_j = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \ \ldots \ x_{(\ell-1)\sigma^{\ell-2}(j)} x_{\ell\sigma^{\ell-1}(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Теорема 2.4 [6]**.** Если A – группа, σ – подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\sigma^\ell = \sigma$, то $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\sigma,k} >$ – ℓ-арная группа.

Теорема 2.5 [6]. Если полугруппа A содержит единицу 1, а подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^\ell = \sigma$, то ℓ-арная полугруппа $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ является полуабелевой тогда и только тогда, когда полугруппа A – коммутативна.

Теорема 2.6 [6]**.** Пусть полугруппа A содержит более одного элемента, σ – нетождественная подстановка из S_k. Тогда в ℓ-арном группоиде $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ нет единиц.

Лемма 2.7. Пусть σ – подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\sigma^\ell = \sigma$, B – подгруппа группы A, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A^k$. Тогда:

1. $[\underbrace{B^k \ldots\ B^k}_{i-1}\ \mathbf{x}\ \underbrace{B^k \ldots\ B^k}_{\ell-i}]_{\ell,\ \sigma,\ k} = Bx_{\sigma^{i-1}(1)}B\ \times \ldots \times Bx_{\sigma^{i-1}(k)}B$ для любого $i = 2, \ldots, \ell-1$;
2. $[\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots\ B^k}_{\ell-1}]_{\ell,\ \sigma,\ k}\ =\ x_1B\ \times\ \ldots\ \times\ x_kB$;
3. $[\underbrace{B^k \ldots\ B^k}_{\ell-1}\mathbf{x}]_{\ell,\ \sigma,\ k}\ =\ Bx_1\ \times\ \ldots\ \times\ Bx_k$.

Доказательство.

1. Так как

$$[\underbrace{B^k \ldots\ B^k}_{i-1}\ \mathbf{x}\ \underbrace{B^k \ldots\ B^k}_{\ell-i}]_{\ell,\ \sigma,\ k}\ =$$

$$=\ \{[\mathbf{h}_1\ \ldots\ \mathbf{h}_{i-1}\mathbf{x}\mathbf{h}_{i+1}\ \ldots\ \mathbf{h}_\ell]_{\ell,\ \sigma,\ k}\ |\ \mathbf{h}_1,\ \ldots\ \mathbf{h}_{i-1},\ \mathbf{h}_{i+1},\ \ldots,\ \mathbf{h}_\ell\ \in\ B^k\}\ =$$

$$=\ \{[(b_{11},\ \ldots,\ b_{1k})\ \ldots\ (b_{(i-1)1},\ \ldots,\ b_{(i-1)k})(x_1,\ \ldots,\ x_k)(b_{(i+1)1},\ \ldots$$

$$\ldots,\ b_{(i+1)k})\ \ldots\ (b_{\ell 1},\ \ldots,\ b_{\ell k})]_{\ell,\ \sigma,\ k}\ |\ b_{ij}\ \in\ B\}\ =$$

$$=\ \{(b_{11}b_{2\sigma(1)}\ \ldots\ b_{(i-1)\sigma^{i-2}(1)}x_{\sigma^{i-1}(1)}b_{(i+1)\sigma^i(1)}\ \ldots\ b_{\ell\sigma^{\ell-1}(k)},\ \ldots$$

$$\ldots,\ b_{1k}b_{2\sigma(k)}\ \ldots\ b_{(i-1)\sigma^{i-2}(k)}x_{\sigma^{i-1}(k)}b_{(i+1)\sigma^i(k)}\ \ldots\ b_{\ell\sigma^{\ell-1}(k)})\ |\ b_{ij}\ \in\ B\}\ =$$

$$=\ Bx_{\sigma^{i-1}(1)}B\ \times\ \ldots\ \times\ Bx_{\sigma^{i-1}(k)}B,$$

   то верно 1.

2. Доказывается аналогично 1. с использованием определений смежного класса и операции $[\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k}$.
3. В начале с использованием определений смежного класса и операции $[\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k}$ получается равенство

$$[\underbrace{B^k \ldots\ B^k}_{\ell-1}\mathbf{x}]_{\ell,\ \sigma,\ k}\ =\ Bx_{\sigma^{\ell-1}(1)}\ \times\ \ldots\ \times\ Bx_{\sigma^{\ell-1}(k)},$$

   откуда, ввиду тождественности подстановки $\sigma^{\ell-1}$, вытекает 3.

Лемма доказана.

Полагая в лемме 2.7 $\ell = n$, $k = n-1$, $\sigma = (12\ldots n-1)$, получим

Следствие 2.8. Пусть $n \geq 3$, B – подгруппа группы A, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in A^{n-1}$. Тогда:

1. $[\underbrace{B^{n-1} \ldots\ B^{n-1}}_{i-1}\ \mathbf{x}\ \underbrace{B^{n-1} \ldots\ B^{n-1}}_{n-i}]_{n,\ n-1}\ = Bx_iB \times \ldots \times Bx_{n-1}B \times Bx_1B \times \ldots \times Bx_{i-1}B$ для любого $i = 2, \ldots, n-1$;

2. $[\mathbf{x}\underbrace{B^{n-1}\ldots\ B^{n-1}}_{n-1}]_{n,\ n-1}\ =\ x_1B\ \times\ \ldots\ \times\ x_{n-1}B$;

3. $[\underbrace{B^{n-1}\ldots\ B^{n-1}}_{n-1}\mathbf{x}]_{n,\ n-1}\ =\ Bx_1\ \times\ \ldots\ \times\ Bx_{n-1}$.

Согласно теореме 2.4, если A – группа, σ – подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\sigma^\ell=\sigma$, то $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ – ℓ-арная группа. Понятно, что если B – подгруппа группы A, подстановка $\sigma\in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^\ell=\sigma$, то $< B^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ – ℓ-арная подгруппа ℓ-арной группы $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$.

Предложение 2.9. Пусть σ – подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\sigma^\ell=\sigma$, B – подгруппа группы A. Тогда:

1. n-арная подгруппа $< B^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ полуинвариантна в ℓ-арной группе $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ тогда и только тогда, когда подгруппа B нормальна в группе A;
2. если $B\neq A$, σ не является тождественной подстановкой, то $< B^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ не является инвариантной в $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k}\ >$.

Доказательство.

1. *Необходимость.*
   Полуинвариантность $< B^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ в $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ означает, что

$$[\mathbf{x}\underbrace{B^k\ldots\ B^k}_{\ell-1}]_{\ell,\,\sigma,\,k}\ =\ [\underbrace{B^k\ldots\ B^k}_{\ell-1}\mathbf{x}]_{\ell,\,\sigma,\,k} \tag{1}$$

   для любого $\mathbf{x}=(x_1,\ \ldots,\ x_k)\in A^k$. Тогда, ввиду леммы 2.7,

$$x_1B\ \times\ \ldots\ \times\ x_kB=\ Bx_1\ \times\ \ldots\ \times\ Bx_k, \tag{2}$$

   откуда $x_1B\ =\ Bx_1$ для любого $x_1\in B$, что означает нормальность B в A.

   Достаточность.
   Из нормальности B в A следует

$$x_1B\ =\ Bx_1,\ \ldots,\ x_kB\ =\ Bx_k$$

   для любых $x_1,\ \ldots,\ x_k\in A$, а это значит верно (2). Тогда, ввиду леммы 2.7, верно (1), что означает полуинвариантность $< B^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ в $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$.

2. Если σ – нетождественная подстановка, то $\sigma(j)\neq j$ для некоторого $j\in\{1,\ldots,k\}$, а так как $B\neq A$, то найдется такой элемент $u\in A$, отличный от единицы e группы A, что $uB\neq B$. Выберем в A^k элемент $\mathbf{x}=(x_1,\ \ldots,\ x_k)$ так, что $x_j=u$, $x_{\sigma(j)}=e$, а все остальные компоненты могут быть произвольными элементами из A. Неравенство $\sigma(j)\neq j$ гарантирует такой выбор. Для случая $\sigma(j)=j$ такой выбор был бы невозможен, так как $u\neq e$.
   Если предположить инвариантность $< B^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ в $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$, то

$$[\mathbf{x}\underbrace{B^k\ldots\ B^k}_{\ell-1}]_{\ell,\,\sigma,\,k}\ =\ [B^k\mathbf{x}\ \underbrace{B^k\ldots\ B^k}_{\ell-2}]_{\ell,\,\sigma,\,k}$$

   для выбранного $\mathbf{x}$. Так как из инвариантности n-арной подгруппы в n-арной группе вытекает ее полуинвариантность в этой же n-арной группе, то предположение об инвариантности $< B^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ в $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ влечет за собой, ввиду 1., нормальность B в A.

Применяя к левой части последнего равенства утверждение 2. леммы 2.7, а к правой – утверждение 1. при $i = 2$, а также используя нормальность B в A, получим

$$x_1B \times \ldots \times x_jB \times \ldots \times x_kB = x_{\sigma(1)}B \times \ldots \times x_{\sigma(j)}B \times \ldots \times x_{\sigma(k)}B.$$

Следовательно, $x_jB = x_{\sigma(j)}B$, откуда и из условия $x_j = u$, $x_{\sigma(j)} = e$ получаем $uB = B$, что противоречит выбору $uB \neq B$. Таким образом, $< B^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ не является инвариантной в $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$.

Предложение доказано.

Полагая в предложении 2.9 $\ell = n$, $k = n - 1$, $\sigma = (12 \ldots n - 1)$, получим

Следствие 2.10. Пусть $n \geq 3$, B – подгруппа группы А. Тогда:

1. n-арная подгруппа $< B^{n-1},\ [\ ]_{n,\ n-1} >$ n-арной группы $< A^{n-1},\ [\ ]_{n,\ n-1} >$ полуинвариантна в ней тогда и только тогда, когда подгруппа В нормальна в группе А;
2. Если $B \neq A$, то $< B^{n-1},\ [\ ]_{n,\ n-1} >$ не является инвариантной в $< A^{n-1},\ [\ ]_{n,\ n-1} >$.

Если σ – нетождественная подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\sigma^\ell = \sigma$, то по предложению 2.9 $< \{e\}^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ – одноэлементная полуинвариантная, но неинвариантная ℓ-арная подгруппа ℓ-арной группы $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$. А так как единица ℓ-арной группы является ее инвариантной ℓ-арной подгруппой, то элемент $\{\underbrace{e,\ \ldots,\ e}_{k}\}$ не является единицей в $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$. В действительности, согласно предложению 2.6 в ℓ-арной группе $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ вообще нет единиц.

3 Основные результаты

По предложению 2.9, если подстановка $\sigma \in S_k$, удовлетворяет условию $\sigma^\ell = \sigma$, B – нормальная подгруппа группы A, то декартова степень B^k является полуинвариантной ℓ-арной подгруппой ℓ-арной группы $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$. Оказывается, если потребовать, чтобы факторгруппа A/B была циклической, и ее порядок делил $\ell - 1$, то не только декартова степень B^k, но k-ая декартова степень любого смежного класса из A/B является полуинвариантной ℓ-арной подгруппой в $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$.

Теорема 3.1. Пусть A – группа, B – ее собственная нормальная подгруппа, факторгруппа A/B является циклической и имеет порядок, делящий $\ell - 1$, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^\ell = \sigma$. Тогда для любого смежного класса Н факторгруппы A/B декартова степень H^k замкнута относительно ℓ-арной операции $[\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k}$, а универсальная алгебра $< H^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ является полуинвариантной ℓ-арной подгруппой ℓ-арной группы $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$. Если же σ – нетождественная подстановка, то $< H^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ не является инвариантной в $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$.

Доказательство. Пусть факторгруппа A/B порождается смежным классом aB, то есть $A/B = \{B,\ aB,\ \ldots,\ a^{t-1}B\}$, где t делит $\ell - 1$. Будем для определенности считать $H = a^sB$ для некоторого $s = 0, 1, \ldots, t - 1$.

Так как $(aB)^t = a^tB = B$, то $a^t \in B$, откуда и из условия t делит $\ell - 1$ вытекает $a^{\ell-1} \in B$. Если теперь

$$\mathbf{h}_i = (h_{i1},\ \ldots,\ h_{ik}) = (a^sb_{i1},\ \ldots,\ a^sb_{ik}), i = 1,\ \ldots,\ \ell$$

произвольные элементы из H^k, то ввиду нормальности B в A, будем иметь

$$[\mathbf{h}_1\ \ldots\ \mathbf{h}_\ell]_{\ell,\ \sigma,\ k} = (y_1,\ \ldots,\ y_k),$$

где

$$y_j = a^s b_{1j} a^s b_{2\sigma(j)} \ \dots \ a^s b_{(l-1)\sigma^{\ell-2}(j)} a^s b_{\ell j} \ = \ a^{sl} b_j$$

для некоторого $b_j \in B$. Но тогда, ввиду $a^{\ell-1} \in B$, имеем

$$y_j = a^{sl} b_j \ = \ a^s (a^{\ell-1})^s b_j = a^s b'_j$$

для некоторого $b'_j \in B$. Следовательно, $y_j \in H$ для любого $j = 1, \dots, k$, откуда

$$[\mathbf{h}_1 \ \dots \ \mathbf{h}_\ell]_{\ell,\ \sigma,\ k} \ \in \ H^k,$$

что означает замкнутость множества H^k относительно ℓ-арной операции $[\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k}$.

Рассмотрим теперь в $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ уравнение

$$[\mathbf{x}\mathbf{h}_2 \ \dots \ \mathbf{h}_\ell]_{\ell,\ \sigma,\ k} \ = \ \mathbf{g}, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{g} \ = \ (g_1,\ \dots,\ g_k) \ = \ (a^s c_1,\ \dots,\ a^s c_k) \ \in \ H^k, (c_1,\ \dots,\ c_k) \ \in \ B.$$

Элементы $\mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_\ell$, были определены выше и также принадлежали множеству H^k. Так как $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ – ℓ-арная группа, то уравнение (3) имеет в ней решение

$$\mathbf{x} \ = \ (a_1,\ \dots,\ a_k) \ \in \ A^k.$$

Подставляя это решение в (3), и, приравнивая j-ые компоненты в левой и правой частях полученного равенства, получим

$$a_j a^s b_{2\sigma(j)} \ \dots \ a^s b_{(l-1)\sigma^{\ell-2}(j)} a^s b_{\ell j} \ = \ a^s c_j.$$

Ввиду нормальности B в A и условия $a^{\ell-1} \in B$, левая часть последнего равенства принимает вид $a_j a^{(\ell-1)s} d = a_j b$ для некоторых $d,\ b \in B$, а само оно переписывается в виде $a_j b = a^s c_j$. Но тогда $a_j = a^s c_j b^{-1}$, где $c_j b^{-1} \in B$. Следовательно, $a_j \in a^s B = H$, то есть $\mathbf{x} = (a_1, \dots, a_k) \in H^k$. Это означает, что уравнение (3) разрешимо в $< H^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$.

Аналогично доказывается разрешимость в $< H^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ уравнения

$$[\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_{\ell-1}\mathbf{y}]_{\ell,\ \sigma,\ k} \ = \ \mathbf{g}$$

для любых $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{\ell-1}, \mathbf{g} \in H^k$. Таким образом, согласно критерию Поста [2], $< H^k, [\ ]_{\ell,\sigma,k} >$ – ℓ-арная подгруппа в $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$.

Если $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ – произвольный элемент из A^k, то, используя нормальность B в A, и условие $a^{\ell-1} \in B$, получим

$$[\mathbf{x}\underbrace{H^k \dots H^k}_{\ell-1}]_{\ell,\sigma,k} \ = \ \{[\mathbf{x}\mathbf{h}_2 \ \dots \ \mathbf{h}_\ell]_{\ell,\ \sigma,\ k} \mid \mathbf{h}_2,\ \dots,\ \mathbf{h}_\ell \ \in \ H^k\} \ =$$

$$= \ \{[(x_1,\ \dots,\ x_k)(a^s b_{21},\ \dots,\ a^s b_{2k}) \ \dots \ (a^s b_{\ell 1},\ \dots,\ a^s b_{\ell k})]_{\ell,\ \sigma,\ k} \mid b_{ij} \ \in \ B\} \ =$$

$$= \ \{(x_1 a^s b_{2\sigma(1)} \ \dots \ a^s b_{(l-1)\sigma^{\ell-2}(1)} a^s b_{\ell 1},\ \dots,$$

$$\dots \ x_k a^s b_{2\sigma(k)} \ \dots \ a^s b_{(l-1)\sigma^{\ell-2}(k)} a^s b_{\ell k}) \mid b_{ij} \ \in \ B\} \ =$$

$$= \ \{(x_1 a^{(\ell-1)s} d_1,\ \dots,\ x_k a^{(\ell-1)s} d_k) \mid d_1,\ \dots,\ d_k \ \in \ B\} \ =$$

$$= \ \{(x_1 b_1,\ \dots,\ x_k b_k) \mid b_1,\ \dots,\ b_k \ \in \ B\} \ = \ x_1 B \ \times \ \dots \ \times \ x_k B,$$

то есть

$$[\mathbf{x}\underbrace{H^k \dots H^k}_{\ell-1}]_{\ell,\sigma,k} = x_1 B \times \dots \times x_k B. \tag{4}$$

Аналогично доказывается равенство

$$[\underbrace{H^k \ldots\ H^k}_{\ell-1}\mathbf{x}]_{\ell,\,\sigma,\,k} \ = \ Bx_1 \times \ldots \times Bx_k. \qquad (5)$$

Из нормальности B в A вытекает равенство правых частей равенств (4) и (5), а значит и равенство их левых частей, для любого $\mathbf{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_k) \in A^k$, что означает полуинвариантность $< H^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ в $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$.

Если σ – нетождественная подстановка, то $\sigma(j) \neq j$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, k\}$, а так как $B \neq A$, то найдется такой элемент $u \in A$, отличный от единицы e группы A, что $uB \neq B$. Выберем в A^k элемент $\mathbf{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_k)$ так, что

$$x_j = u,\ x_{\sigma(j)} = (a^{-1})^{(\ell-1)s}, \qquad (6)$$

а все остальные компоненты могут быть произвольными элементами из A. Неравенство $\sigma(j) \neq j$ гарантирует такой выбор. Для случая $\sigma(j) = j$ такой выбор был бы невозможен, если, например, $u \neq (a^{-1})^{(\ell-1)s}$.

Если предположить инвариантность $< H^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ в $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$, то

$$[\mathbf{x}\underbrace{H \ldots\ H}_{\ell-1}]_{\ell,\,\sigma,\,k} \ = \ [H\mathbf{x}\underbrace{H \ldots\ H}_{\ell-2}]_{\ell,\,\sigma,\,k}$$

для выбранного $\mathbf{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_k) \in A^k$. Применим (4) к левой части полученного равенства, а в правой части, используя нормальность B в A, проведем вычисления, аналогичные тем, которые были сделаны при получении (4). В результате будем иметь

$$\begin{aligned} &x_1B \ \times\ \ldots\ \times\ x_jB\ \times\ \ldots\ \times\ x_kB = \\ &\quad = a^s x_{\sigma(j)} a^{(\ell-2)s}B\ \times\ \ldots\ \times\ a^s x_{\sigma(j)} a^{(\ell-2)s}B\ \times\ \ldots\ \times\ a^s x_{\sigma(k)} a^{(\ell-2)s}B. \end{aligned}$$

Следовательно, $x_jB = a^s x_{\sigma(j)} a^{(\ell-2)s}B$, откуда, ввиду (6), вытекает $uB\ =\ B$, что противоречит выбору $uB \neq B$. Таким образом $< H^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ не является инвариантной в $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$.

Теорема доказана.

Следствие 3.2. Пусть A – группа, B – ее собственная нормальная подгруппа, факторгруппа A/B является циклической, порождается смежным классом aB и имеет порядок, делящий $\ell - 1$. Тогда декартова степень $(aB)^k$ замкнута относительно ℓ-арной операции $[\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k}$, а универсальная алгебра $< (aB)^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ является полуинвариантной $\ell-$арной подгруппой $\ell-$арной группы $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$. Если же σ – нетождественная подстановка, то $< (aB)^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ не является инвариантной в $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$.

Полагая в теореме 3.1 $\ell = n,\ k = n - 1,\ \sigma = (12 \ldots n - 1)$, получим

Следствие 3.3 [8]. Пусть $n \geq 3$, A – группа, B – ее собственная нормальная подгруппа, факторгруппа A/B является циклической и имеет порядок, делящий $n-1$. Тогда для любого смежного класса H факторгруппы A/B декартова степень H^{n-1} замкнута относительно n-арной операции $[\ ]_{n,\ n-1}$, а универсальная алгебра $< H^{n-1},\ [\ ]_{n,\ n-1} >$ является полуинвариантной, но неинвариантной n-арной подгруппой n-арной группы $< A^{n-1},\ [\ ]_{n,\ n-1} >$.

Всякая полуинвариантная n-арная подгруппа $< B,\ [\ ] >$ n-арной группы $< A,\ [\ ] >$ определяет на ней конгруэнцию ρ_B, классы которой совпадают со смежными классами n-арной факторгруппы $< A/B,\ [\ ] >$ (см., например, предложение 7.4 [9]). Следующая теорема устанавливает связь между собой конгруэнций n-арной группы $< A^{n-1},\ [\ ]_{n,\ n-1} >$, которые определяются полуинвариантными n-арными подгруппами, построенными с помощью различных смежных классов факторгруппы A/B из теоремы 3.1.

Теорема 3.4. Пусть H – произвольный смежный класс факторгруппы A/B из теоремы 3.1. Тогда:

1. $< A^k/H^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} > = < A^k/B^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} > = < (A/B)^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$;
2. $\rho_{H^k}\ =\ \rho_{B^k}$.

Доказательство.

1. Полагая в (4) $H = B$, получим

$$[\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots\ B^k}_{\ell-1}]_{\ell,\,\sigma,\,k}\ =\ x_1B\ \times\ \ldots\ \times\ x_kB, \tag{7}$$

где $\mathbf{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_k) \in A^k$, откуда и из (4) вытекает

$$[\mathbf{x}\underbrace{H^k \ldots\ H^k}_{\ell-1}]_{\ell,\,\sigma,\,k}\ =\ [\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots\ B^k}_{\ell-1}]_{\ell,\,\sigma,\,k}$$

для любого $\mathbf{x}\ \in A^k$. Поэтому ℓ-арные факторгруппы $< A^k/H^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ и $< A^k/B^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ совпадают.

Если $[\mathbf{x}\underbrace{H^k \ldots\ H^k}_{\ell-1}]_{\ell,\,\sigma,\,k}$ – произвольный смежный класс из $< A^k/B^k, [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$, то, ввиду (4),

$$[\mathbf{x}\underbrace{H^k \ldots\ H^k}_{\ell-1}]_{\ell,\,\sigma,\,k}\ \in\ (A/B)^k,$$

то есть верно включение $A^k/H^k \subseteq (A/B)^k$.

Если же $x_1B \times \ldots \times x_kB$ – произвольный элемент из $(A/B)^k$, то, снова используя (4), получим $x_1B \times \ldots \times x_kB \in A^k/B^k$, то есть верно включение $(A/B)^k \subseteq A^k/B^k$. Из доказанных включений следует совпадение ℓ-арных факторгрупп $< A^k/H^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ и $< (A/B)^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$.

2. Так как по предложению 7.4 из [9]

$$< A^k/\rho_{B^k},\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} > = < A^k/B^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >,$$

$$< A^k/\rho_{H^k},\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} > = < A^k/H^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >,$$

то, согласно 1.,

$$< A^k/\rho_{H^k},\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} > = < A^k/\rho_{B^k},\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >,$$

что означает совпадение конгруэнций ρ_{H^k} и ρ_{B^k}.

Теорема доказана.

Полагая в теореме 3.4 $\ell = n$, $k = n - 1$, $\sigma = (12 \ldots n - 1)$, получим

Следствие 3.5 [8]. Пусть H – произвольный смежный класс из следствия 3.3. Тогда:

1. $< A^{n-1}/H^{n-1},\ [\ ]_{n,\ n-1} > = < A^{n-1}/B^{n-1},\ [\ ]_{n,\ n-1} > = < (A/B)^{n-1},\ [\ ]_{n,\ n-1} >$;
2. $\rho_{H^{n-1}}\ =\ \rho_{B^{n-1}}$.

Теорему 3.4 и следствие 3.5 можно сформулировать иначе, более конкретно.

Теорема 3.6. Пусть подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^\ell = \sigma$, A – группа, B – ее собственная нормальная подгруппа, факторгруппа A/B является циклической, порождается элементом aB и имеет порядок t, делящий $\ell - 1$: $A/B = \{B, aB, \ldots, a^{t-1}B\}$. Тогда:

1. $< A^k/B^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} > = < A^k/(aB)^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} > = \ \ldots\ =$
$= < A^k/(a^{t-1}B)^k,\ [\ ]_{\ell, \sigma, k}\ > = < (A/B)^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$;

2. $\rho_{B^k} = \rho_{(aB)^k} = \ldots = \rho_{(a^{t-1}B)^k}$.

Следствие 3.7 [8]. Пусть $n \geq 3$, A – группа, B – ее собственная нормальная подгруппа, факторгруппа A/B является циклической, порождается элементом aB и имеет порядок t, делящий $n - 1$: $A/B = \{B, aB, \ldots, a^{t-1}B\}$. Тогда:

1. $< A^{n-1}/B^{n-1},\ [\ ]_{n,\ n-1} > = < A^{n-1}/(aB)^{n-1},\ [\ ]_{n,\ n-1} > = \ \ldots$
$\ldots\ = < A^{n-1}/(a^{t-1}B)^{n-1},\ [\ ]_{n, n-1}\ > = < (A/B)^{n-1},\ [\ ]_{n,\ n-1} >$;

2. $\rho_{B^{n-1}} = \rho_{(aB)^{n-1}} = \ldots = \rho_{(a^{t-1}B)^{n-1}}$.

4 Полиадические матрицы

Упорядоченный набор $(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{m-1})$ матриц одного и того же порядка n над полем комплексных чисел С Э. Пост назвал [2] m-арной или полиадической матрицей над $\mathbb{C}$. На множестве всех m-арных матриц, у которых определители всех компонент отличны от нуля, Э. Пост определил m-арную операцию

$$[A_1 \ldots A_m] = [(A_{11}, \ldots, A_{1(m-1)}) \ldots (A_{m1}, \ldots, A_{m(m-1)})] = (Y_1, \ldots, Y_{m-1}), \tag{8}$$

где

$$Y_j = A_{1j}A_{2(j+1)} \ldots A_{(n-j)(n-1)}A_{(n-j+1)1} \ldots A_{(n-1)(j-1)}A_{nj},\ j = 1, \ldots, m-1.$$

Э. Пост доказал, что указанное множество, вместе с m-арной операцией (8) является m-арной группой, которую он назвал m-арной линейной группой. Операция (8) совпадает с операцией $[\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k}$ при $\ell = m$, $k = m - 1$, $\sigma = (12 \ldots m - 1)$, то есть с операцией $[\ ]_{m,\ m-1}$.

Мы будем рассматривать упорядоченные наборы матриц одного и того же порядка над произвольным полем. Множество всех упорядоченных наборов $A = (A_1,\ \ldots,\ A_k)$ матриц одного и того же порядка n над полем F, у которых определитель каждой компоненты A_j отличен от нуля полем F, обозначим через $GL(n,\ k,\ F)$. Элементы этого множества, следуя Э. Посту, будем называть k-компонентными полиадическими матрицами над F.

Ясно, что множество $GL(n,\ k,\ F)$ совпадает с k-ой декартовой степенью полной линейной группы $GL(n,\ F) : GL(n,\ k,\ F) = (GL(n,\ F))^k$. Поэтому, полагая в теореме 2.4, $A = GL(n,\ F)$, получим

Предложение 4.1. Если подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^\ell = \sigma$, то множество $GL(n,\ k,\ F)$ замкнуто относительно ℓ-арной операции $[\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k}$, а универсальная алгебра $< GL(n,\ k,\ F),\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ является ℓ-арной группой.

Так как $GL(n,\ m-1,\ \mathbb{C}) = (GL(n,\ \mathbb{C}))^{m-1}$, а операция (8), как уже отмечалось, совпадает с операцией $[\ ]_{m,\ m-1}$, то из предложения 4.1 вытекает отмеченный выше результат Э. Поста.

Следствие 4.2 [2] Множество $GL(n,\ m-1,\ \mathbb{C})$ замкнуто относительно m-арной операции $[\ ]_{m,\ m-1}$, а универсальная алгебра $< GL(n, m-1, \mathbb{C}), [\ ]_{m,\ m-1} >$ является m-арной группой.

Во множестве $GL(n,\ k,\ F)$ выделим подмножество $SL(n,\ k,\ F)$ всех k-компонентных полиадических матриц, у которых определитель каждой компоненты равен единице поля F. Так как $SL(n,\ k,\ F)\ =\ (SL(n,\ F))^k$, то, снова применяя теорему 2.4, получим

Предложение 4.3. Если подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^\ell = \sigma$, то множество $SL(n,\ k,\ F)$ замкнуто относительно ℓ-арной операции $[\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k}$, а универсальная алгебра $< SL(n,\ k,\ F),\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ является ℓ-арной подгруппой ℓ-арной группы $< GL(n,\ k,\ F),\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$.

Полиадическую группу $< SL(n,\ k,\ F),\ [\ ]_{\ell,\ \sigma S,\ k} >$ по аналогии с бинарным случаем естественно называть полиадической специальной линейной группой.

Понятно, что при $k = 1$ и $l = 2$ 1-компонентные матрицы – это обычные матрицы, а полиадические группы $GL(n,\ 1,\ F)$ и $SL(n,\ 1,\ F)$ совпадают соответственно с полной линейной группой $GL(n,\ F)$ и специальной линейной группой $SL(n,\ F)$.

Далее будем использовать стандартные обозначения: F_q или $GF(q)$ – поле Галуа, то есть конечное поле с числом элементов $q = p^\alpha$, p – простое; $GL(n,\ q)$ – полная линейная группа над полем $GF(q)$, то есть группа всех обратимых матриц порядка n над $GF(q)$; $SL(n,\ q)$ – специальная линейная группа степени n над полем $GF(q)$, то есть подгруппа всех матриц из $GL(n,\ q)$ с определителем, равным единице поля $GF(q)$.

Теорема 4.4. Пусть p – простое, $q = p^\alpha$, $n \geq 2$, $k \geq 2$, $\ell \geq 3$, $q-1$ делит $\ell-1$, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^\ell = \sigma$. Тогда:

1. $< GL(n,\ k,\ F_q),\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ и $< SL(n,\ k,\ F_q),\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ – неполуабелевые l-арные группы;

2. если σ – нетождественная подстановка, то в ℓ-арных группах $< GL(n,\ k,\ F_q),\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ и $< SL(n,\ k,\ F_q),\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ нет единиц;

3. k-ая декартова степень каждого смежного класса $H_0\ =\ SL(n,\ q)$, $H_1,\ \ldots,\ H_{q-2}$ факторгруппы $GL(n,\ q)\ /\ SL(n,\ q)$ замкнута относительно ℓ-арной операции $[\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k}$, а универсальные алгебры
$$< H_0^k, [\quad]_{\ell,\ \sigma,\ k} >,\ < H_1^k, [\quad]_{\ell,\ \sigma, k} >, \ldots, < H_{q-2}^k, [\quad]_{\ell, \sigma, k} > \tag{9}$$
являются полуинвариантными ℓ-арными подгруппами в $< GL(n,\ k,\ F_q),\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$; в частности, $< SL(n,\ k,\ F_q),\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ полуинвариантная ℓ-арная подгруппа в $< GL(n,\ k,\ F_q),\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$;

4. если σ – нетождественная подстановка, то все полуинвариантные ℓ-арные подгруппы (9) не являются инвариантными ℓ-арными подгруппами в $< GL(n,\ k,\ F_q),\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$; в частности, $< SL(n,\ k,\ F_q),\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ неинвариантна в $< GL(n,\ k,\ F_q),\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$;

5. все полуинвариантные ℓ-арные подгруппы (9) определяют на $< GL(n,\ k,\ F_q),\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ одну и ту же конгруэнцию
$$\rho = \rho_{H_0^k} = \rho_{H_1^k} = \ldots = \rho_{H_{q-2}^k};$$

6. ℓ-арные факторгруппы
$$< GL(n,\ k,\ F_q)\ /\ SL(n,\ k,\ F_q),\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >, < GL(n,\ k,\ F_q)\ /\ H_1^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >, \ldots$$
$$\ldots, < GL(n,\ k,\ F_q)\ /\ H_{q-2}^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >, < (GL(n,\ q)\ /\ SL(n,\ q))^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$$
совпадают.

Доказательство. Для сокращения записей положим $A = GL(n,\ q)$, $B = SL(n,\ q)$. Тогда
$$A^k = (GL(n,\ q))^k\ =\ GL(n,\ k,\ F_q), B^k = (SL(n,\ q))^k = SL(n,\ k,\ F_q).$$

1. По предложениям 4.1 и 4.2 $< A^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ и $< B^k,\ [\ ]_{\ell,\ \sigma,\ k} >$ – ℓ-арные группы. Их неполуабелевость следует из неабелевости групп A и B и теоремы 2.5.
2. Следует из теоремы 2.6.
3. и 4. Следует из теоремы 3.1, так как факторгруппа $A/B = \mathrm{GL}(n,\ q)\ /\ \mathrm{SL}(n,\ q)$ изоморфна мультипликативной группе F_q^* поля F_q, которая является циклической и имеет порядок $q-1$. Кроме того, по условию $q-1$ делит делит $\ell-1$.
5. Следует из утверждения 2. теоремы 3.4.
6. Следует из утверждения 1. теоремы 3.4.

Теорема доказана.

Полагая в теореме 4.4 $\ell = q$, $k = q-1$, $\sigma = (12\ldots q-1)$, получим

Следствие 4.5 [8]**.** Пусть p – простое, $q = p^\alpha$, $q \geq 3$, $n \geq 2$. Тогда:

1. $< GL(n,\ q-1,\ F_q),\ [\ ]_{q,\ q-1} >$ и $< SL(n,\ q-1,\ F_q\ ),\ [\ ]_{q,\ q-1} >$ – неполуабелевые q-арные группы с пустым центром, а значит и без единиц;
2. любой смежный класс H факторгруппы $GL(n,\ q)\ /\ SL(n,\ q)$ замкнут относительно q-арной операции $[\ ]_{q,\ q-1}$, а универсальная алгебра $< H^{q-1}, [\ ]_{q,\ q-1} >$ является полуинвариантной, но неинвариантной q-арной подгруппой в $< GL(n,\ q-1,\ F_q),\ [\ ]_{q,\ q-1} >$; в частности, $< SL(n,\ q-1,\ F_q),\ [\ ]_{q,\ q-1} >$ полуинвариантная, но неинвариантная q-арная подгруппа в $< GL(n,\ q-1,\ F_q),\ [\ ]_{q,\ q-1} >$;
3. полуинвариантные q-арные подгруппы $< H^{q-1},\ [\ ]_{q,\ q-1} >$, $< SL(n,\ q-1,\ F_q),\ [\ ]_{q,\ q-1} >$ из 2. определяют на $< GL(n,\ q-1,\ F_q\ ),\ [\ ]_{q,\ q-1} >$ одну и ту же конгруэнцию: $\rho_{H^{q-1}} = \rho_{SL(n,\ q-1,\ F_q)}$;
4. для любого смежного класса H группы $GL(n,\ q)\ /\ SL(n,\ q)$ q-арные факторгруппы

$$< GL(n,\ q-1,\ F_q)\ /\ H^{q-1},\ [\ ]_{q,\ q-1} >;$$

$$< GL(n,\ q-1,\ F_q)\ /\ SL(n,\ q-1,\ F_q),\ [\ ]_{q,\ q-1} >;$$

$$< (GL(n,\ q)\ /\ SL(n,\ q))^{q-1},\ [\ ]_{q,\ q-1} >$$

совпадают.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10РА-002) и Румынской академии наук (GAR 4/17.06.2011).

Литература

[1] Dornte W. Untersuchungen uber einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff // *Math. Z.*, Bd. 29, 1928, pp. 1 – 19.

[2] Post E.L. Polyadic groups // *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 48, №2, 1940, pp. 208 – 350.

[3] Русаков С.А. Алгебраические n-арные системы. Мн., Навука i тэхнiка, 1992, 245 с.

[4] Гальмак А.М. Об операции $[\ ]_{\ell,\sigma,k}$ // *Веснiк МДУ iм. А.А. Куляшова.*, №1 (35), Серия В-С, 2010, с. 34 – 38.

[5] Galmak A., Balan V., Vorobiev G.N., Nicola I.R. On n-ary operations and their applications // *APPS*, 13, 2011, pp. 40 – 64.

[6] Гальмак А.М. Многоместные операции на декартовых степенях. Минск, Изд. центр БГУ, 2009, 265 с.

[7] Гальмак А.М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях. // *Весці НАН Беларусі.* №3, 2008, с. 28 – 34.

[8] Гальмак А.М., Воробьев Г.Н., Балан В.Д. Об n-арных подгруппах специалной n-арной группы // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике.* № 2 (14), 2010, с. 38 – 46.

[9] Гальмак А.М. Конгруэнции полиадических групп. Минск, Беларуская навука, 1999, 182 с.

POLYADIC OPERATIONS ON CARTESIAN POWERS OF CONJUGATE GROUP CLASSES

A. Galmak[1], G. Vorobiev[1], V. Balan[2]

[1] *Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev, Belarus*

[2] *University Politehnica of Bucharest, Bucharest, Romania*

mgup@mogilev.by, vbalan@mathem.pub.ro

For any $\ell \geq 3$, $k \geq 2$ and any permutation $\sigma \in S_k$ on the Cartesian power A^k of a group A which admits a normal subgroup B, so that the factor group A/B be cyclic and having its order a divisor of $\ell - 1$, we define the ℓ-ary group $\langle A^k, [\quad]_{\ell,\sigma,k}\rangle$, endowed with the ℓ-ary operation $[\quad]_{\ell,\sigma,k}$. We study the properties of this ℓ-ary operation on Cartesian powers of conjugate group classes of the group A associated to its subgroup B.

Key Words: n-ary operation, polyadic matrices, normal subgroup, Cartesian power, semi-abelian, semi-invariant, semigroup.