ПОСТРОЕНИЕ КРИВИЗНЫ НА АЛГЕБРЕ ОКТАВ КЭЛИ

В.Ю. Дорофеев

ГОУ ВПО Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург, Россия

friedlab@mail.ru

На алгебре октав Кэли построен лагранжиан материальных полей лептон-электронного сектора. Пространство состояний модели оказывается десятимерным. Предлагается определить неассоциативную часть лагранжиана как проявление гравитации. Оказалось, что пара противоположно заряженных безмассовых векторных бозонов индуцирует гравитацию. Показывается, что модель данного лагранжиана с метрикой Фридмана и Шварцшильда согласована.

Ключевые слова: октонионы, октавы Кэли, слабые взаимодействия, неассоциативность, ОТО.

Введение

Современная теория поля сталкивается с проблемой объединения электрослабых взаимодействий, имеющих лоренц-инвариантную структуру и теорию гравитации ОТО, основанную на общекоординатных преобразованиях. Решение этой проблемы возможно, например, за счёт введения дополнительных измерений, которые предполагаются заметными только на малых расстояниях. Этим фактически предполагается сложная топологическая структура окружающего нас пространства. Автор этой работы предлагает иной мировоззренческий подход. А что, если всё дело в математическом аппарате, посредством которого мы пытаемся описать окружающий нас мир? Современные теории электромагнитных и слабых взаимодействий — это теории, основанные на ассоциативной алгебре. В этих теориях пространство-время играет роль параметров-координат векторных полей. Сами взаимодействия обусловлены векторными полями. Векторный характер этих полей имеет динамическую природу так как вводится за счёт удлинения производной и имеет по выражению Д.Д. Иваненко, компенсационный характер. Но этот термин не прижился, так как он отражает только способ введения взаимодействия, сам же лагранжиан строится по принципу калибровочной инвариантности, по этой причине и векторные поля — переносчики взаимодействия называются калибровочными. Современная теория гравитации строится как теория общекоординатной инвариантности лагранжиана. В случае квантования — корпускулярная интерпретация накладывается как на полевой сектор, так и на сектор общекоординатных преобразований. Тем самым параметры взаимодействия — координаты частицы — оказываются физическими полями. Автору представляется такой подход противоречивым. Может быть имеющиеся теории хороши только в своих областях? Скажем для TEV-ных энергий справедлива СТ и ОТО по отдельности. Но их объединённая модель требует другой алгебры? Поисками этой новой алгебры и решил заняться автор данной работы. Так как $SU(2) \times U(1)$-симметрия может быть описана в рамках кватернионных представлений, то можно попробовать рассмотреть расширение кватернионной алгебры. Если судить по СТ, то это расширение должно быть обратимым, то есть алгебра с делением. Проблема нахождения всех гиперкомплексных систем с делением не решена до сих пор. Тем не менее известна **теорема Фробениуса:** *любая ассоциативная алгебра с делением изоморфна одной из трёх алгебр: алгебре действительных чисел, алгебре комплексных чисел или алгебре кватернионов.* Поэтому, видимо, необходимо выйти за пределы ассоциативных алгебр и тогда на помощь приходит **обобщённая теорема Фробениуса**: *любая альтернативная алгебра с делением изоморфна одной из четырёх* *алгебр: алгебре действительных чисел, алгебре комплексных чисел, алгебре кватернионов, или октав.*

Возможно первой попыткой применения алгебры октонионов был сделан в работе [1], где вводилась октонионная квантовая механика. Некоторые авторы связывают расширенную алгебру с расширенной интерпретацией пространства-времени [2]. Ряд авторов понимают расширение на новую алгебру как получение новых свойств в рамках электромагнитной теории [3]. Предлагается полевая интерпретация нового вида взаимодействия на алгебре октонионов [4].

Прогресс в возможности расширения физической теории на алгебру октонионов можно связать с развитием формализма представления алгебры октав Кэли в работах Цорна [5, 6], когда были предложены хорошие матричные представления неассоциативной алгебры. Платой за матричный вид был особый закон умножения.

В данной работе автор придерживается полевой интерпретации расширения физической теории на новую алгебру, отражённую в работе [7]. В работе [8] автором была предложена физическая интерпретация октонионных полей. Наконец, теоретическую схему построения лагранжиана, предложенную в [7], автор предлагает назвать О-теорией [9].

1 Алгебра октонионов

Удвоение алгебры кватернионов приводит, в частности, к алгебре октонионов — $\mathcal{O}$, образующих линейное пространство над вещественным полем $\mathbb{R}$: всякий элемент $\mathbf{o}$ алгебры октонионов $\mathcal{O}$ имеет линейное представление вида

$$\mathbf{o} = \sum_{j=0}^{7} \alpha^j e^j, \quad \alpha^j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, 2, \ldots, 7.$$

Над образующими $e^j \in \mathcal{O}$ определена операция умножения. В частности,

$$(e^0)^2 = 1, \quad (e^j)^2 = -1, \quad j = 1, 2, \ldots, 7$$

то есть первая компонента — это фактически вещественное число, а остальные играют роль комплексных единиц.

Если ввести обозначение $\hat{e}^k = e^{k+4}, k = 1, 2, 3$, то умножение на алгебре октонионов определяется следующим образом $(i, j, k = 1, 2, 3)$:

$$\begin{aligned} e^i e^j &= -\delta^{ij} e^0 + \varepsilon^{ijk} e^k \qquad \hat{e}^i \hat{e}^j = -\delta^{ij} e^0 - \varepsilon^{ijk} e^k \\ e^i \hat{e}^j &= -\delta^{ij} e^4 - \varepsilon^{ijk} \hat{e}^k \qquad e^i e^4 = \hat{e}^i, \quad e^4 \hat{e}^i = e^i \end{aligned} \tag{1}$$

где введён полностью антисимметричный символ $\varepsilon^{123} = 1$ по перестановке своих индексов. Нетрудно убедиться, что указанное правило умножения образующих приводит к неассоциативной алгебре. При этом $(i, j, k, l = 1, 2, \ldots, 7)$

$$\{e^i, e^j, e^k\} = (e^i e^j) e^k - e^i (e^j e^k) = 2\varepsilon^{ijkl} e^l \tag{2}$$

где ε^{ijkl} — полностью антисимметричный символ, равный единице для следующих комбинаций:

$$1247, \quad 1265, \quad 2345, \quad 2376, \quad 3146, \quad 3157, \quad 4576. \tag{3}$$

Умножение (1) можно представить виде таблицы

	e^1	e^2	e^3	e^4	e^5	e^6	e^7
$i = e^1$	-1	e^3	$-e^2$	e^5	$-e^4$	$-e^7$	e^6
$j = e^2$	$-e^3$	-1	e^1	e^6	e^7	$-e^4$	$-e^5$
$k = e^3$	e^2	$-e^1$	-1	e^7	$-e^6$	e^5	$-e^4$
$E = e^4$	$-e^5$	$-e^6$	$-e^7$	-1	e^1	e^2	e^3
$I = e^5$	e^4	$-e^7$	e^6	$-e^1$	-1	$-e^3$	e^2
$J = e^6$	e^7	e^4	$-e^5$	$-e^2$	e^3	-1	$-e^1$
$K = e^7$	$-e^6$	e^5	e^4	$-e^3$	$-e^2$	e^1	-1

Таблица 1:

Известно, что алгебра октонионов является альтернативной относительно умножения, то есть для любых её двух элементов a, b выполняется свойство

$$(a \cdot b) \cdot b = a \cdot (b \cdot b), \quad b \cdot (b \cdot a) = (b \cdot b) \cdot a \tag{4}$$

Дополнительно можно показать, что

$$(a \cdot b) \cdot \bar{b} = a \cdot (b \cdot \bar{b}), \quad \bar{b} \cdot (b \cdot a) = (\bar{b} \cdot b) \cdot a \tag{5}$$

Алгебра октонионов не может быть представлена в виде матриц с обычным умножением, но можно ввести специальное умножение, которое допускает такое представление. В качестве таких матриц можно выбрать единичную матрицу, соответствующую единичному элементу e^0 и семь матриц $\tilde{\Sigma}^k$ для которых можно определить закон умножения $*$ по правилу $(i, j, k = 1, 2, \ldots, 7)$:

$$\tilde{\Sigma}^i * \tilde{\Sigma}^j = -\delta^{ij} + \varepsilon^{ijk} \tilde{\Sigma}^k \tag{6}$$

где ненулевыми значениями полностью антисимметричного символа ε^{ijk} является только

$$\varepsilon^{123} = \varepsilon^{145} = \varepsilon^{176} = \varepsilon^{246} = \varepsilon^{257} = \varepsilon^{347} = \varepsilon^{365} = 1 \tag{7}$$

Вместо матриц $\tilde{\Sigma}^k, k = 1, 2, \ldots, 7$ удобно пользоваться матрицами $\Sigma^k = i\tilde{\Sigma}^k, k = 1, 2, \ldots, 7$, для которых, как следует из (6), умножение определяется следующим образом:

$$\Sigma^i * \Sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk} \Sigma^k, \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, 7. \tag{8}$$

Определим матрицы Σ^i следующим образом [5, 6], $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \Sigma^0 &= \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & \sigma^0 \end{pmatrix} \quad \Sigma^i = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^i \\ i\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \\ \Sigma^4 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Sigma^{4+i} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

где σ^0 — единичная матрица и $\sigma^i, i = 1, 2, 3$ — матрицы Паули:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$
$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Ясно, что данная алгебра матриц реализует представление гиперкомплексного множества вещественных чисел размерности 8 — алгебру октав Кэли над полем вещественных чисел. С другой стороны, можно учесть тот факт, что образующие имеют матричное представление: складывать эти матрицы будем как обычно — при сложении двух матриц складываются их соответствующие элементы. Умножать эти матрицы на число будем по правилу: при умножении матрицы на число умножаются все элементы этой матрицы на число. Понятно, что данное правило коммутативно как для действительных, так и для комплексных чисел. Если мы работаем только лишь в поле вещественных чисел (относительно умножения), то правило сложения матриц и умножение на число позволяет любой элемент алгебры октав Кэли представить в виде матрицы, которую при желании можно представить разложением по образующим. Тогда любой элемент алгебры октав Кэли в данном матричном представлении имеет вид:

$$\mathbf{o} = \begin{pmatrix} \lambda I & A \\ A^+ & \lambda^* I \end{pmatrix} \tag{11}$$

где A, B — линейная комбинация матриц Паули с комплексными коэффициентами, λ — комплексное число и $I = \sigma^0$ [6].

Кроме матриц Σ^i введём также обобщённые матрицы $\mathfrak{O} \supset \mathcal{O}$ по правилу: всякая обобщённая матрица $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ имеет вид:

$$\mathfrak{o} = \begin{pmatrix} \lambda I & A \\ B & \xi I \end{pmatrix} \tag{12}$$

где A,B — комплексные матрицы (2×2), λ, ξ — комплексные функции.

Складываются обобщенные матрицы так:

$$\mathfrak{o} + \mathfrak{o}' = \begin{pmatrix} \lambda I & A \\ B & \xi I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda' I & A' \\ B' & \xi' I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \lambda')I & A + A' \\ B + B' & (\xi + \xi')I \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Закон умножения для таких матриц определим следующим образом:

$$\mathfrak{o} * \mathfrak{o}' = \begin{pmatrix} \lambda I & A \\ B & \xi I \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \lambda' I & A' \\ B' & \xi' I \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (\lambda\lambda' + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(AB'))I & \lambda A' + \xi' A + \frac{i}{2}[B, B'] \\ \lambda' B + \xi B' - \frac{i}{2}[A, A'] & (\xi\xi' + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(BA'))I \end{pmatrix} \tag{14}$$

Нетрудно проверить, что относительно умножения (14) матрицы $\Sigma^i, i = 1, 2, \ldots, 7$ образуют алгебру октонионов.

Эрмитово сопряжение на алгебре обобщённых матриц определяется так:

$$\begin{pmatrix} \lambda I & A \\ B & \xi I \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} \lambda^* I & B^+ \\ A^+ & \xi^* I \end{pmatrix} \tag{15}$$

где λ^*, ξ^* — комплексносопряжённые функции и A^+, B^+ — эрмитово сопряжённые матрицы. Из определения эрмитова сопряжения следует, что введённые ранее матрицы $\Sigma^k, k = 0, 1, \ldots, 7$ эрмитовы, а матрицы $\tilde{\Sigma}^k, k = 1, 2, \ldots, 7$ — антиэрмитовы.

Очевидно, что как сложение, так и умножение не выводит обобщённые матрицы из пространства обобщённых матриц.

2 Вектор состояния на алгебре октонионов

Ввиду специального закона умножения матриц на алгебре октонионов невозможно определить умножение матрицы на столбец как это имеет место в случае обычного умного умножения матриц. Поэтому в качестве вектора состояния будем использовать не вектор-столбцы, а матрицы $\Psi(x)$ из обобщённой алгебры матриц, введённой выше:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda(x) I & A(x) \\ B(x) & \xi(x) I \end{pmatrix} \tag{16}$$

Договоримся квадратом нормы вектора состояния $\Psi(x)$ называть число

$$\begin{aligned} ||\Psi(x)||^2 = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{tr}(\overset{*}{\Psi} * \Psi) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} \lambda^* I & B^+ \\ A^+ & \xi^* I \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \lambda I & A \\ B & \xi I \end{pmatrix} \right) = \\ = \lambda^* \lambda + \xi^* \xi + \frac{1}{2} \mathrm{tr}(B^+ B + A^+ A) \end{aligned} \tag{17}$$

(Сопряжённое состояние $\overset{*}{\Psi}$ будем понимать в смысле эрмитова сопряжения (15), то есть $\overset{*}{\Psi} = \Psi^+$)

Таким образом на алгебре расширенного матричного представления октонионов можно ввести декуплет комплексных полей $\varphi_i(x)$: $\lambda(x)$, $\xi(x)$, $\varphi_1^i(x)$, $\varphi_2^i(x), i = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda(x) I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \xi(x) I \end{pmatrix} \\ \varphi_{2+i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \varphi_{(1)}^i(x) \sigma^i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{6+i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_{(2)}^i(x) \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{18}$$

(по индексу i здесь нет суммирования) или их линейных комбинаций.

В дальнейшем на векторах состояния нас будет интересовать потенциальная энергия

$$V(\Psi) = -m^2 || \overset{*}{\Psi} * \Psi || + \frac{f}{4} || \overset{*}{\Psi} * \Psi ||^2 \tag{19}$$

где m и f — некоторые постоянные.

Малость вектора состояния $\Psi(x)$ (обозначим его как $\delta\Psi(x)$), будем понимать как малость его нормы, то есть как следует из (17) все матричные элементы $\delta\Psi(x)$ близки к нулю. В этом случае под вариацией потенциальной энергии понимаем величину:

$$\begin{aligned} \delta V(\Psi) &= -m^2 \mathrm{tr}(\delta \overset{*}{\Psi} * \Psi) - m^2 \mathrm{tr}(\overset{*}{\Psi} * \delta\Psi) + \frac{f}{2} \mathrm{tr}(\delta \overset{*}{\Psi} * \Psi) + \frac{f}{2} ||\Psi||^2 \mathrm{tr}(\overset{*}{\Psi} * \delta\Psi) = \\ &= \mathrm{tr}(\delta \overset{*}{\Psi} * (-m^2 + \frac{f}{2}||\Psi||^2)\Psi + \overset{*}{\Psi} (-m^2 + \frac{f}{2}||\Psi||^2) * \delta\Psi) \end{aligned} \tag{20}$$

Будем понимать частные производные по состояниям $\Psi(x)$ и $\overset{*}{\Psi}(x)$ в смысле вариации (20).

Минимальное значение потенциальной энергии $V(\Psi)$ находится при

$$\frac{\partial V}{\partial \Psi} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \overset{*}{\Psi}} = 0 \tag{21}$$

что при $m^2, f > 0$, как видно из (20), даёт

$$||\Psi_0||^2 = \frac{2m^2}{f}$$

Введём лагранжиан матрицы состояния $\Psi(x)$:

$$\mathfrak{L}_\Psi = \mathrm{tr}(\partial_\mu \overset{*}{\Psi} * \partial^\mu \Psi) + m^2 ||\Psi||^2 - \frac{f}{4} ||\Psi||^4 \tag{22}$$

Представим поле $\Psi(x)$ вблизи минимума потенциальной энергии следующим образом

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2m}{\sqrt{f}} \cdot I + \sigma(x) \cdot I + \Theta^k(x) \cdot i\Sigma^k \right) * \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^3 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{23}$$

полагая, что $\sigma(x)$ и $\Theta^k(x)$ — некоторые функции (здесь и далее по повторяющимся индексам $k = 1, 2, \ldots, 7$ подразумевается суммирование, если не оговорено иное). Так как в дальнейшем нас будет интересовать только один случай — равенство их нулю, то вид и свойства этих функций в данной работе рассматриваться не будут. Как нетрудно убедиться:

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^3 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right\|^2 = \mathrm{tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i\sigma^3 & I \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^3 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right) = 4.$$

3 Алгебраическая структура пространства состояний

Умножение (14) определено для матриц более широкого класса, чем матриц, являющихся представлением алгебры октонионов, $\Sigma^a, a = 0, 1, 2, \ldots, 7$ введённых ранее. Можно ввести ещё две эрмитовы матрицы

$$f^8 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad f^9 = \begin{pmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

которые сохраняют произведение (14).

Таким образом совокупность матриц

$$f^a = \Sigma^a, \quad a = 0, 1, \ldots, 7, \quad f^8, \quad f^9 \tag{25}$$

образует базис линейного пространства над полем комплексных чисел, которое назовём расширенным пространством октонионов $\overline{\mathcal{O}}$.

Заметим, что

$$(f^8 * f^1) * (f^1 * f^8) = 0, \quad f^8 * (f^1 * f^1) * f^8 = 1.$$

С помощью умножения (14) введём свёртку в пространстве $\overline{\mathcal{O}}$ (то есть отображение $\overline{\mathcal{O}} \times \overline{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}$):

$$\begin{gathered}
(\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathfrak{o}_1^+ * \mathfrak{o}_2) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} \lambda_1^* I & B_1^+ \\ A_1^+ & \xi_1^* I \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \lambda_2 I & A_2 \\ B_2 & \xi_2 I \end{pmatrix}\right) = \\
= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} (\lambda_1^*\lambda_2 + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(B_1^+ B_2))I & \lambda_1^* A_2 + \xi_2 B_1^+ + \frac{i}{2}[A_1^+, B_2] \\ \lambda_2 A_1^+ + \xi_1^* B_2 - \frac{i}{2}[B_1^+, A_2] & (\xi_1^*\xi_2 + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_1^+ A_2))I \end{pmatrix}\right) = \\
= \lambda_1^*\lambda_2 + \xi_1^*\xi_2 + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(B_1^+ B_2)) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_1^+ A_2).
\end{gathered} \tag{26}$$

Нормой вектора **o** в обобщённом пространстве октонионов $\overline{\mathcal{O}}$

$$\mathfrak{o} = \begin{pmatrix} \lambda^* I & B^+ \\ A^+ & \xi^* I \end{pmatrix}$$

называется число

$$||\mathfrak{o}|| = \sqrt{|\lambda|^2 + |\xi|^2 + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A^+ A) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(B^+ B))}.$$

Относительно свёртки (26) имеется ортонормированный базис

$$\begin{gathered}
e^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \\
e^{4+i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad e^8 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{27}$$

4 Неассоциативность следа произведения четырёх октонионов

Покажем, что след от произведения любых трёх матриц представления алгебры октонионов ассоциативен, то есть

$$\mathrm{tr}((A * B) * C) = \mathrm{tr}(A * (B * C)) = \mathrm{tr}(A * B * C)$$

Очевидно, что достаточно убедиться в ассоциативности образующих. Рассмотрим $\Sigma^a * \Sigma^b * \Sigma^c$. Если одна из образующих единица, то утверждение очевидно. Пусть среди них нет единичной. Тогда

$$\mathrm{tr}((\Sigma^a * \Sigma^b) * \Sigma^c) = \mathrm{tr}((\delta^{ab} + i\varepsilon^{abd}\Sigma^d) * \Sigma^c) = 4i\varepsilon^{abc}$$

$$\mathrm{tr}(\Sigma^a * (\Sigma^b * \Sigma^c)) = \mathrm{tr}(\Sigma^a * (\delta^{bc} + i\varepsilon^{bcd}\Sigma^d)) = 4i\varepsilon^{bca} = 4i\varepsilon^{abc}$$

что и требовалось доказать.

Введём матрицу

$$u_0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & i\sigma^3 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\Sigma^0 + \Sigma^4 - \Sigma^3 - i\Sigma^7) \tag{28}$$

Так как матрица u_0 играет важную роль в построении лагранжиана октонионов, то найдём скалярные произведения этой матрицы с образующими Σ^a алгебры октонионов.

$$\mathrm{tr}((u_0^+ * (\Sigma^a * \Sigma^b) * u_0),$$

$$\mathrm{tr}((u_0^+ * \Sigma^a) * (\Sigma^b * u_0))$$

(Очевидно оставшиеся способы расстановки скобок являются следствием выписанных и ассоциативности следа трёх матриц.)

$$\begin{array}{ccc}
b = 1, \dots, 7 & \mathrm{tr}(u_0^+ * \Sigma^b * u_0) = & -\delta^{3b} \\
a, b = 1, 2, 3 & \mathrm{tr}((u_0^+ * \Sigma^a) * (\Sigma^b * u_0)) = & \delta^{ab} \\
a, b = 1, 2, 3 & \mathrm{tr}(u_0^+ * (\Sigma^a * \Sigma^b) * u_0) = & \delta^{ab} - i\varepsilon^{4ab7} \\
a, b = 5, 6, 7 & \mathrm{tr}((u_0^+ * \Sigma^a) * (\Sigma^b * u_0)) = & \delta^{ab} \\
a, b = 5, 6, 7 & \mathrm{tr}(u_0^+ * (\Sigma^a * \Sigma^b) * u_0) = & \delta^{ab} - i\varepsilon^{4ab7} \\
a = 4, b = 1, 2, 3 & \mathrm{tr}(u_0^+ * (\Sigma^4 * \Sigma^b) * u_0) = & 0 \\
a = 4, b = 1, 2, 3 & \mathrm{tr}((u_0^+ * \Sigma^4) * (\Sigma^b * u_0)) = & 0 \\
a = 4, b = 5, 6, 7 & \mathrm{tr}(u_0^+ * (\Sigma^4 * \Sigma^b) * u_0) = & -i\delta^{7b} \\
a = 4, b = 5, 6, 7 & \mathrm{tr}((u_0^+ * \Sigma^4) * (\Sigma^b * u_0)) = & -i\delta^{7b} \\
a = 1, 2, 3, b = 5, 6, 7 & \mathrm{tr}((u_0^+ * \Sigma^a) * (\Sigma^b * u_0)) = & 0 \\
a = 1, 2, 3, b = 5, 6, 7 & \mathrm{tr}(u_0^+ * (\Sigma^a * \Sigma^b) * u_0)) = & -i\varepsilon^{4ab3} \\
a = 5, 6, 7, b = 1, 2, 3 & \mathrm{tr}((u_0^+ * \Sigma^a) * (\Sigma^b * u_0)) = & 0 \\
a = 5, 6, 7, b = 1, 2, 3 & \mathrm{tr}(u_0^+ * (\Sigma^a * \Sigma^b) * u_0)) = & -i\varepsilon^{4ab3}
\end{array}$$

Четверные произведения можно представляются в виде:

$$\mathrm{tr}(u_0^+ * \Sigma^a * \Sigma^b * u_0) = c_1^{ab}\delta^{ab} + ic_2^{ab}A^{ab} \tag{29}$$

Здесь A^{ab} — антисимметричная величина, равная $0, \pm 1$. Её значения отличны от нуля только в специальном способе расстановки скобок

$$\mathrm{tr}(u_0^+ * (\Sigma^a * \Sigma^b) * u_0) = iA^{ab} \tag{30}$$

при этом её ненулевые значения — это

$$A^{21} = A^{65} = A^{25} = A^{74} = 1 \tag{31}$$

и в случае $a = 4$ порядок скобок не важен

$$\mathrm{tr}((u_0^+ * \Sigma^4) * (\Sigma^b * u_0)) = \mathrm{tr}(u_0^+ * (\Sigma^4 * \Sigma^b) * u_0) \tag{32}$$

$$\mathrm{tr}((u_0^+ * \Sigma^4) * (\Sigma^b * u_0)) = \mathrm{tr}(u_0^+ * (\Sigma^4 * \Sigma^b) * u_0) \tag{33}$$

а постоянные c_1^{ab}, c_2^{ab} определяются моделью расстановки скобок в произведении октонионых сомножителей. Можно предложить, например, три модели:

Вероятностная модель.

$$\mathrm{tr}(A * B * C * D) = p_1 \mathrm{tr}(((A * B) * C) * D) + p_2 \mathrm{tr}(A * (B * C) * D) \tag{34}$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

Здесь введены частоты p_1 и p_2. Их значения определяются количеством перестановок скобок в (34), дающих одинаковый результат. Например, в случае (34) логично считать, что $p_1 = 3/4, p_2 = 1/4$ так как три варианта перестановки скобок дают одинаковый ответ в первом члене правой части (34) и только один вариант — во втором члене правой части (34).

Определение (34) распространяется и на большее число элементов.

Минимальная модель.

$$f(ABCD)\mathrm{tr}(A*B*C*D) = \min_{()}(f(ABCD)\mathrm{tr}(A*B*C*D)) \tag{35}$$

Правая часть (35) означает выбор такой расстановки скобок, при котором значение $f(ABCD)\mathrm{tr}(A*B*C*D)$ минимально. Здесь введён коэффициент $f(ABCD)$ (который может равняться единице), стоящий перед tr. Заметим, если перед tr стоит коэффициент, то это не означает его автоматическое включение в определение минимальной модели.

Аналогично определяется **максимальная модель.**

Очевидно, что в случае ассоциативности мы получаем тот же результат, что и в определённых выше моделях.

Найдём след от произведения четырёх матриц $\Sigma^i, i = 1, \dots, 7$

$$\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\Sigma^i * \Sigma^j * \Sigma^k * \Sigma^l) \tag{36}$$

Пусть в (36) имеется только две различные матрицы. Понятно, что вне зависимости от расстановки скобок (учитывая ассоциативность для трёх элементов) получим ($i \neq k$):

$$\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\Sigma^i * \Sigma^k * \Sigma^i * \Sigma^k) = -1 \tag{37}$$

В том случае, когда только три матрицы различны след (36) равен нулю.

Если различны все индексы в (36), то произведение зависит от выбранного порядка умножения. При этом

$$\frac{1}{4}\mathrm{tr}((\Sigma^i * \Sigma^j) * (\Sigma^k * \Sigma^l)) = -\varepsilon^{ijkl} \tag{38}$$

$$\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\Sigma^i * (\Sigma^j * \Sigma^k) * \Sigma^l) = \varepsilon^{ijkl} \tag{39}$$

Следовательно, при $i \neq j, k \neq l$

$$\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\Sigma^i * \Sigma^j * \Sigma^k * \Sigma^l) = -\varepsilon^{ijkl}\delta^{ik}\delta^{jl} + A^{ijkl} \tag{40}$$

где число A^{ijkl} равно $\pm 1, 0$ в зависимости от выбора скобок в произведении и значений индексов.

5 Обобщение лагранжиана Вайнберга-Салама на алгебру октав Кэли

В пространстве Минковского (M_4), где квадрат интервала ds определён как

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dx_\mu dx^\mu = dt^2 - dl^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{41}$$

($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, по разновысотным греческим индексам осуществляется суммирование с метрическим тензором пространства Минковского $\eta_{\mu\nu}$) свободное уравнение Дирака для спинорного поля $\psi(x)$ массы m имеет вид [10]:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \tag{42}$$

где $\partial_\mu\psi(x) = \partial\psi/\partial x^\mu = \psi_{,\mu}$. Верхние и нижние индексы тензоров опускаются и поднимаются в M_4 взаимнообратными тензорами $\eta_{\mu\nu}$ и $\eta^{\mu\nu}$, γ^μ — матрицы Дирака ($\mu = 0, 1, 2, 3$):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{43}$$

Взаимодействие частицы с внешним полем будем вводить минимальным образом. Объединение электромагнитного и слабого взаимодействий через минимальную связь в стандартной теории Вайнберга-Салама на группе $SU(2) \times U(1)$ с полями $A_\mu^{k(1)} = A_\mu^k, k = 1,2,3$ и $A_\mu^{(2)} = B_\mu$ и зарядами $g^k = g$ — групповой постоянной $SU(2)$симметрии и $g^{(0)}$ — постоянной абелевой симметрии требует:

$$\mathbf{A}_\mu = \mathbf{A}_\mu^{(1)} + \mathbf{A}_\mu^{(2)} = gA_\mu^{k(1)}T^{k(1)} + g^{(0)}A_\mu^{(2)}T^{(2)} = \frac{i}{2}g\sigma^k A_\mu^k + \frac{i}{2}g^{(0)}YB_\mu \tag{44}$$

$$T^{k(1)} = \frac{\sigma^k}{2}, \quad T^{(2)} = Y, \quad Y = c_Y I$$

поэтому уравнение Дирака во внешнем неабелевом поле для фермионов $\psi(x)$, с гиперзарядом Y (в частности у дублета лептонов $Y = -I$, а синглета $Y = -2$) принимает вид [11]

$$(i\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{i}{2}g^{(1)}\sigma^k A_\mu^k + \frac{i}{2}g^{(0)}YB_\mu) - m)\psi(x) = 0 \tag{45}$$

Подчеркнём — так как речь идёт о тензорном произведении групп, то матрицы σ^i и матрицы Дирака γ^i матрично не умножаются, а спинор $\psi(x)$ — это дублет спинорных полей. Наконец, абелево поле B_μ вводится не только с постоянной взаимодействия $g^{(0)}$, но и с гиперзарядом Y — отвечающим за различные спинорные поля. Фактически, это различие проявляется в разных значениях c_Y — постоянной гиперзаряда. (Напомню, что для электрона $c_Y = -1$, а для кварков u, d оказывается $c_Y = 1/3$.)

Лагранжиан свободного электрослабого поля имеет вид [11]:

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\, G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{46}$$

Здесь первый член лагранжиана ($k = 1,2,3$)

$$\mathrm{tr}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} = \mathrm{tr}((\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig^{(1)}(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu))\cdot$$
$$\cdot(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - ig^{(1)}(A^\mu A^\nu - A^\nu A^\mu))), \tag{47}$$

$$A_\mu = A_\mu^k \sigma^k/2$$

отвечает за неабелеву симметрию, а второй — за абелеву:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)(\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) \tag{48}$$

В данной работе делается попытка отойти от обычного введения взаимодействующего поля как поля, соответствующего определённой симметрии и предлагается вводить поле минимальным образом как характеристику алгебраической структуры взаимодействия. В этом подходе наличие симметрии, например, $SU(2)$ является следствием алгебраической структуры поля и некоторых физических предположений. Таким образом, договоримся что обобщение уравнения Дирака на взаимодействующие поля — это обобщение на октонионные поля. Ограничимся матричным представлением октонионов. Пусть обобщение происходит за счёт удлиннения производной:

$$\partial_\mu \to \partial_\mu + \frac{i}{2}c_{\Psi_a}q^a A_\mu^a \Sigma^a \tag{49}$$

где q_a — заряд поля $A_\mu^a(x)$, c_{Ψ_a} — постоянные взаимодействия спинора с полем A_μ^a, $\Sigma^a, a = 0,1,\ldots,7$ – эрмитовы образующие алгебры октонионов.

Введём дублет левополяризованных лептонов $L(x)$ (ограничимся электронным сектором, состоящим из электрона $e(x) = e^-(x)$ и электронного нейтрино $\nu = \nu_e(x)$), синглет правополяризованного электрона $e_R = e_R^-(x)$ и декуплет скалярных мезонов $\varphi^a(x)$ (23):

$$L = \begin{pmatrix} (\alpha_1\nu + \alpha_2 e)I & A_1\nu(x) + A_2 e(x) \\ B_1\nu(x) + B_2 e(x) & (\beta_1\nu + \beta_2 e)I \end{pmatrix}_L = \Psi_L, \qquad R(x) = e_R^-(x), \quad \varphi^a(x), i = 0, 1, \ldots, 7 \tag{50}$$

где

$$\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\Psi = L, \qquad \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\Psi = R$$
$$\frac{1}{2}(1-\gamma^5)e(x) = R, \qquad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{51}$$

Матрицы A_1, A_2 и B_1, B_2 имеют вид $A_i = \alpha_i^k\sigma^k$ и $B_i = \beta_i^k\sigma^k$ с пока неизвестными числовыми постоянными α_i^k и $\beta_i^k, i = 1, 2, k = 0, 1, 2, 3$. Числа $\alpha_{1,2}$ и $\beta_{1,2}$ также пока неизвестны.

Определим локализованный на алгебре октонионов лагранжиан следующим образом $(a, b = 0, 1, \ldots, 7; i, j, k, l = 1, 2, \ldots, 7)$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{oct.} = \mathfrak{L}_f + \mathrm{tr}\Bigg(&\left(\left(\partial_\mu \overset{*}{\Psi}_\varphi - \frac{i}{2}q^a A^a_\mu \overset{*}{\Psi}_\varphi * \Sigma^a\right) * \left(\partial^\mu \Psi_\varphi + \frac{i}{2}q^b A^{\mu(b)}\Sigma^b * \Psi_\varphi\right) + \right.\\ &+\frac{i}{2}\overline{L} * \gamma_\mu\left(\overrightarrow{\partial}^\mu L + \frac{i}{2}c_L q^k A^{\mu(k)}\Sigma^k * L + \frac{i}{2}c_{L_0}q^0 A^{\mu(0)}L\right) - \\ &-\frac{i}{2}\overline{L} * \gamma_\mu\left(\overleftarrow{\partial}^\mu L - \frac{i}{2}c_L q^k A^{\mu(k)}\Sigma^k * L - \frac{i}{2}c_{L_0}q^0 A^{\mu(0)}L\right) + \\ &+\frac{i}{2}\overline{R}\gamma_\mu\left(\overrightarrow{\partial}^\mu R + iq^0A^{\mu 0}R\right) - \frac{i}{2}\overline{R}\gamma_\mu\left(\overleftarrow{\partial}^\mu R - iq^0A^{\mu 0}R\right) - \\ &\left. -\tilde{h}\overline{L} * \Psi_\varphi R - \tilde{h}\overline{R}\overset{*}{\Psi}_\varphi * L\right) + m^2||\Psi_\varphi||^2 - \frac{f}{4}||\Psi_\varphi||^4\end{aligned} \tag{52}$$

Введено обозначение для лагранжиана свободных полей $\mathfrak{L}_f$.

$$\mathfrak{L}_f = -\frac{1}{16}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu})_{oct} - \frac{1}{4}F^0_{\mu\nu} * F^{\mu\nu(0)} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu})_{oct} = \mathrm{tr}(((\partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu)\Sigma^i + iq^{ij}(A^i_\mu A^j_\nu - A^i_\nu A^j_\mu)\Sigma^i * \Sigma^j)\\ *((\partial^\mu A^{\nu(k)} - \partial^\nu A^{\mu(k)})\Sigma^k + iq^{kl}(A^{\mu(k)}A^{\nu(l)} - A^{\nu(k)}A^{\mu(l)})\Sigma^k * \Sigma^l))\end{aligned} \tag{54}$$

Понятно, что, если две матрицы $\Sigma^i, i = 1, \ldots, 7$ в этом произведении оказались одинаковыми, то след их произведения ассоциативен, если же все четыре матрицы различны, то ассоциативности нет. Поэтому можно выделить ассоциативную и неассоциативную части в виде:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{16}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu})_{oct} = -\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu} * F^{\mu\nu(i)} +\\ +\frac{1}{16}f^{ijkl}(A^i_\mu A^j_\nu - A^j_\nu A^i_\mu)(A^{\mu(k)}A^{\nu(l)} - A^{\nu(k)}A^{\mu(l)})\end{aligned} \tag{55}$$

где

$$\begin{aligned}F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu - \varepsilon^{ijk}q^{jk}(A^j_\mu A^k_\nu - A^j_\nu A^k_\mu)\\ f^{ijkl} = q^{ij}q^{kl}\mathrm{tr}(\Sigma^i * \Sigma^j * \Sigma^k * \Sigma^l)\end{aligned} \tag{56}$$

(Символ f^{ijkl} отличен от нуля только для индексов (3) и их перестановок.)

То, что выражение (56) неассоциативно, понятно из следующих равенств, полученных из (7-8) и бесследовости матриц $\Sigma^i, i = 1, 2, \ldots, 7$:

$$\mathrm{tr}((\Sigma^4 * \Sigma^5) * (\Sigma^6 * \Sigma^7)) = 4, \quad \mathrm{tr}(\Sigma^4 * (\Sigma^5 * \Sigma^6) * \Sigma^7) = -4 \tag{57}$$

Заметим, что данный лагранжиан остался калибровочно инвариантным относительно калибровочной симметрии $U(1)$ так как матрицы $\Sigma^i, i = 1, 2, \ldots, 7$ коммутативны относительно умножения на комплексную функцию, поэтому лагранжиан октонионов инвариантен относительно замен:

$$\begin{gathered} \Psi \to e^{i\alpha(x)/2}\Psi(x), \quad A_\mu^0 \to A_\mu^0 - \frac{1}{q_0}\partial_\mu \alpha(x) \\ L \to e^{ic_{L_0}\alpha/2}L, \quad R \to e^{i\alpha}R \end{gathered} \tag{58}$$

Действительно,

$$\begin{gathered} \partial_\mu(e^{\frac{i}{2}\alpha}\Psi_\varphi) + \frac{i}{2}q^0(A_\mu^0 - \tfrac{1}{q_0}\partial_\mu\alpha)e^{\frac{i}{2}\alpha}\Psi_\varphi = e^{\frac{i}{2}\alpha}(\partial_\mu\Psi_\varphi + \frac{i}{2}q^0 A_\mu^0 \Psi_\varphi) \\ \partial_\mu(e^{\frac{i}{2}\alpha}L) + \frac{i}{2}c_{L_0}q^0(A^{\mu(0)} - \frac{1}{q_0}\partial_\mu\alpha)e^{\frac{i}{2}\alpha}L = e^{\frac{i}{2}\alpha}(\partial_\mu L + c_{L_0}\frac{i}{2}q^0 A_\mu^0 L) \end{gathered} \tag{59}$$

(Эрмитовосопряжённые преобразования и преобразования для R аналогичны поэтому не выписаны.)

Говорить о другой калибровочной симметрии, содержащей поля $A_\mu^i, i = 1, \ldots, 7$ нет смысла, так как преобразования, затрагивающие Σ^i, приводят к неассоциативным членам вида (57), вычисление которых неопределено до момента определения порядка умножения сомножителей (порядок умножения можно связывать даже с коэффициентами перед неассоциативным выражение вида (57)). Исключаем из рассмотрения декуплет полей (18), выбирая состояние Ψ в виде Ψ_0 (23), соответствующее стационарному состоянию потенциальной энергии, что приводит в (52) к

$$\begin{gathered} \mathfrak{L}_{oct.} = \mathfrak{L}_f + \mathrm{tr}\left(\frac{1}{4}q_a q_{a'} A_\mu^a A^{\mu(a')} \overset{*}{\Psi}_0 * \Sigma^a * \Sigma^{a'} * \Psi_0 \right. \\ + \frac{i}{2}\left(\overline{L} * \gamma_\mu \partial^\mu L - \partial^\mu \overline{L}\gamma_\mu * L\right) + \frac{i}{2}\left(\overline{R} * \partial^\mu \gamma_\mu R - \partial^\mu \overline{R}\gamma_\mu * R\right) \\ -\frac{1}{2}c_{L_a}q^a A^{\mu(a)}\overline{L} * \gamma_\mu \Sigma^a * L - \frac{1}{2}c_{L_0}q^0 A^{\mu(0)}\overline{R}\gamma_\mu R \\ \left. -h\overline{L} * \Psi_0 R - h\overline{R}\overset{*}{\Psi}_0 L\right) + \frac{m^4}{f} \end{gathered} \tag{60}$$

Подставим Ψ_0 в (60) (в первую строку выражения). Ясно, что произведение четырёх матриц $\Sigma^k, k = 1, \ldots, 7$ в (60) неассоциативно, поэтому окончательно получим (введем $o^{ij} = \pm i q^{ij}, 0$ в зависимости от способа снятия неассоциативности)

$$\begin{gathered} \mathfrak{L}_{oct.} = \mathfrak{L}_f + \frac{q_a^2 m^2}{2f}A_\mu^a A^{\mu(a)} + \frac{o^{ij}m^2}{2f}A_\mu^i A^{\mu(j)} - \frac{q_3 q_0 m^2}{f}A_\mu^3 B^\mu \\ + \frac{i}{2}(\overline{L} * \gamma_\mu \partial^\mu L - \partial^\mu \overline{L}\gamma_\mu * L) + \frac{i}{2}(\overline{R} * \partial^\mu \gamma_\mu R - \partial^\mu \overline{R}\gamma_\mu * R) \\ -\frac{1}{2}c_{L_a}q^a A^{\mu(a)}\overline{L} * \gamma_\mu \Sigma^a * L - \frac{1}{2}c_{L_0}q^0 A^{\mu(0)}\overline{R}\gamma_\mu R \\ -h\overline{L} * \Psi_0 R - h\overline{R}\overset{*}{\Psi}_0 L) + \frac{m^4}{f} \end{gathered} \tag{61}$$

Лагранжиан (61) для нас в дальнейшем будет основным, относительно которого ищется поставленное в начале работы решение. Перейдём к лагранжиану стандартной теории (СТ).

В СТ слабых взаимодействий Вайнберга-Салама имеем исходный лагранжиан, инвариантный относительно локальной группы $SU(2) \times U(1)$:

$$\begin{gathered}
\mathfrak{L}_{ST} = -\frac{1}{4}F^{(k)}_{\mu\nu}F^{\mu\nu(k)}) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + m^2 \overset{*}{\varphi}\varphi - \frac{f}{4}(\overset{*}{\varphi}\varphi)^2 + \\
+\left(\partial_\mu \overset{*}{\varphi} - \frac{i}{2}g\overset{*}{\varphi}\sigma^k A^k_\mu - \frac{i}{2}g^{(0)}\overset{*}{\varphi}B_\mu\right)\cdot\left(\partial^\mu\varphi + \frac{i}{2}g\sigma^k A^{\mu(k)}\varphi + \frac{i}{2}g^{(0)}B^\mu\varphi\right) \\
F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad F^k_{\mu\nu} = \partial_\mu A^k_\nu - \partial_\nu A^k_\mu - \frac{g}{2}\varepsilon^{ijk}(A^i_\mu A^j_\nu - A^i_\nu A^j_\mu) \\
\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2m}{\sqrt{f}} + \sigma(x) + i\sigma^i\theta^i(x)\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{62}$$

(здесь $i,j,k = 1,2,3, \sigma(x)$ и $\theta^i(x)$ — скалярные поля, σ^i — матрицы Паули.)

После спонтанного нарушения симметрии лагранжиан СТ без хиггсова сектора и выбора аналогичной калибровки получим в СТ

$$\begin{gathered}
\mathfrak{L}_{ST} = -\frac{1}{4}\mathrm{tr}\left(F^{(i)}_{\mu\nu}F^{\mu\nu(i)}\right) + \frac{g^2m^2}{2f}A^i_\mu A^{\mu(i)} - \frac{gg^{(1)}m^2}{f}A^3_\mu B^\mu + \\
+\frac{g^{(1)}}{2}\overline{\nu}_L\gamma_\mu B^\mu\nu_L + \frac{g^{(1)}}{2}\overline{e}_L\gamma_\mu B^\mu e_L + \frac{g}{2}\overline{e}_L\gamma_\mu A^{\mu 3}e_L - \frac{g}{2}\overline{\nu}_L\gamma_\mu A^{\mu 3}\nu_L - \\
-\frac{g}{2}\overline{\nu}_L\gamma_\mu e_L(A^{\mu 1} - iA^{\mu 2}) - \frac{g}{2}\overline{e}_L\gamma_\mu\nu_L(A^{\mu 1} + iA^{\mu 2}) + \\
+\frac{i}{2}\left(\overline{e}_L\gamma_\mu\partial^\mu e_L - \partial^\mu\overline{e}_L\gamma_\mu e_L\right) + \frac{i}{2}(\overline{\nu}_L\gamma_\mu\partial^\mu\nu_L - \partial^\mu\overline{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L) \\
+\frac{i}{2}(\overline{e}_R\gamma_\mu\partial^\mu e_R - \partial^\mu\overline{e}_R\gamma_\mu e_R) + g^{(1)}\overline{e}_R\gamma_\mu B^\mu e_R + \frac{\sqrt{2}hm}{\sqrt{f}}(\overline{e}_L e_R + \overline{e}_R e_L) + \frac{m^4}{f}
\end{gathered} \tag{63}$$

Известно, что данный лагранжиан диагонализуется по полям $A^i_\mu(x)$ и B_μ, если ввести заряженные $W, \overset{*}{W}$ и нейтральный Z^0 бозоны и электромагнитный вектор-потенциал A_μ:

$$A^3_\mu = Z^0_\mu\cos\theta + A_\mu\sin\theta, \qquad B_\mu = A_\mu\cos\theta - Z^0_\mu\sin\theta \tag{64}$$

$$A^1_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu\cos\theta + \overset{*}{W}_\mu\sin\theta), \qquad A^2_\mu = \frac{i}{\sqrt{2}}(W_\mu\cos\theta - \overset{*}{W}_\mu\sin\theta) \tag{65}$$

Покажем, что имеется матрица состояния, что на ассоциативном секторе лагранжиан октонионов (в (61) изучаем только $a = 0,1,2,3$, остальные считаем равными нулю) совпадёт с лагранжианом СТ.

Из сравнения лагранжианов (63) и (61) видим, что можно взять

$$q^1 = q^2 = q^3 = q^{23} = g, \quad q^0 = g^{(1)}, \quad A^0_\mu = B_\mu \tag{66}$$

(Поля $A^k_\mu, k = 1,2,3$ в СТ и в теории на алгебре октонионов равны и по обозначению и по смыслу.)

Равенство

$$\frac{i}{2}(\overline{L}*\gamma_\mu\partial^\mu L-\partial^\mu\overline{L}\gamma_\mu*L)+\frac{i}{2}(\overline{R}*\gamma_\mu\partial^\mu R-\partial^\mu\overline{R}\gamma_\mu*R)=$$

$$=\frac{i}{2}(\overline{e}_L\gamma_\mu\partial^\mu e_L-\partial^\mu\overline{e}_L\gamma_\mu e_L)+\frac{i}{2}(\overline{\nu}_L\gamma_\mu\partial^\mu\nu_L-\partial^\mu\overline{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L)+$$

$$+\frac{i}{2}(\overline{e}_R\gamma_\mu\partial^\mu e_R-\partial^\mu\overline{e}_R\gamma_\mu e_R)$$

обеспечивается требованием $R=e_R(x)$ и

$$L=\frac{c_0}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & (2i\sigma^1-2\sigma^2)\nu(x)+(y_0I+\frac{2i}{3}\sigma^1+\frac{2}{3}\sigma^2+i\sigma^3)e(x)\\ (-\frac{i}{8}\sigma^1+\frac{1}{8}\sigma^2)\nu(x)+(-\frac{3i}{8}\sigma^1-\frac{3}{8}\sigma^2+\frac{9i}{16}\sigma^3)e(x) & 0\end{pmatrix}_L$$

$$\overline{L}=L^+\gamma^0 \tag{67}$$

$$\overline{L}=\frac{c_0}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & (\frac{i}{8}\sigma^1+\frac{1}{8}\sigma^2)\overline{\nu}(x)+(\frac{3i}{8}\sigma^1-\frac{3}{8}\sigma^2-\frac{9i}{16}\sigma^3)\overline{e}(x)\\ (-2i\sigma^1-2\sigma^2)\overline{\nu}(x)+(y_0I-\frac{2i}{3}\sigma^1+\frac{2}{3}\sigma^2-i\sigma^3)\overline{e}(x) & 0\end{pmatrix}_L$$

Нетрудно убедится, что тогда

$$\begin{gathered}c_L\mathrm{tr}\overline{L}*\Sigma^1*L=c_Lc_0^2(\overline{\nu}_Le_L+\overline{e}_L\nu_L)\\ c_L\mathrm{tr}\overline{L}*\Sigma^2*L=c_Lc_0^2(-i\overline{\nu}_Le_L+i\overline{e}_L\nu_L)\\ c_L\mathrm{tr}\overline{L}*\Sigma^3*L=c_Lc_0^2(\overline{\nu}_L\nu_L-\overline{e}_Le_L)\\ \mathrm{tr}\overline{L}*L=c_0^2\left(\frac{257}{32}\overline{\nu}_L\nu_L+\left(y_0^2+\frac{5729}{2304}\right)\overline{e}_Le_L\right)\end{gathered} \tag{68}$$

(Заметим, что при вычислении следов в (68) оказывается не принципиальным порядок умножения.) Если взять

$$y_0^2=\frac{257}{32}-\frac{5729}{2304},\quad c_0^2=\frac{32}{257},\quad c_L=(c_0^2)^{-1}$$

то

$$\mathrm{tr}\overline{L}*L=\overline{\nu}_L\nu_L+\overline{e}_Le_L$$

$$\mathrm{tr}(\overline{L}*(q^1A^{\mu1}\Sigma^1+q^2A^{\mu2}\Sigma^2+q^3A^{\mu3}\Sigma^3)*\gamma_\mu L)=$$

$$=\frac{g}{2}(\overline{\nu}_L\gamma_\mu e_L(A^{\mu1}-iA^{\mu2})+\overline{e}_L\gamma_\mu\nu_L(A^{\mu1}+iA^{\mu2})-$$

$$-\overline{e}_L\gamma_\mu A^{\mu3}e_L+\overline{\nu}_L\gamma_\mu A^{\mu3}\nu_L)$$

Равенство

$$-c_{L_0}\mathrm{tr}(A^{\mu0}\overline{L}\gamma_\mu*L+A^{\mu0}\overline{R}\gamma_\mu R)=\overline{\nu}_L\gamma_\mu B^\mu\nu_L+\overline{e}_L\gamma_\mu B^\mu e_L+\overline{e}_R\gamma_\mu B^\mu e_R$$

обеспечивается, если положить $c_{L_0}=-1$.

Равенство

$$\mathrm{tr}(\tilde{h}\overline{L} * \Psi_0 R + \tilde{h}\overline{R} \overset{*}{\Psi}_0 L) = \frac{\sqrt{2}hm}{\sqrt{f}}(\overline{e}_L e_R + \overline{e}_R e_L) \tag{69}$$

обеспечивается, если положить $\tilde{h} = 2\sqrt{2}h/c_0$.

Таким образом предложен лагранжиан на обобщённой алгебре октав Кэли, который в частном случае переходит в лагранжиан стандартной теории электрослабых взаимодействий, при этом функция состояния имеет вид:

$$L = \frac{c_0}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix} 0 & 2i\sigma^1 - 2\sigma^2 \\ -\frac{i}{8}\sigma^1 + \frac{1}{8}\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}\nu_L + \begin{pmatrix} 0 & y_0 I + \frac{2i}{3}\sigma^1 + \frac{2}{3}\sigma^2 + i\sigma^3 \\ -\frac{3i}{8}\sigma^1 - \frac{3}{8}\sigma^2 + \frac{9i}{16}\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} e_L\right)$$

6 Диагонализация полного лагранжиана

Таким образом полный лагранжиан на неассоциативной алгебре в выбранном представлении имеет следующий вид $(i, j, k = 1, 2, \ldots, 7)$:

$$\begin{gathered}
\mathfrak{L}_{oct} = \frac{q^{(k)2}m^2}{2f}A^k_\mu A^{\mu(k)} + \frac{o^{ij}m^2}{2f}A^i_\mu A^{\mu(j)} + \frac{g^{(1)2}m^2}{2f}B_\mu B^\mu - \frac{gg^{(1)}m^2}{f}A^3_\mu B^\mu + \\
+\mathfrak{L}_f + \frac{g^{(1)}}{2}\overline{\nu}_L\gamma_\mu B^\mu \nu_L + \frac{g^{(1)}}{2}\overline{e}_L\gamma_\mu B^\mu e_L + \frac{g}{2}\overline{e}_L\gamma_\mu A^{\mu 3} e_L - \frac{g}{2}\overline{\nu}_L\gamma_\mu A^{\mu 3}\nu_L - \\
-\frac{g}{2}\overline{\nu}_L\gamma_\mu e_L(A^{\mu 1} - iA^{\mu 2}) - \frac{g}{2}\overline{e}_L\gamma_\mu \nu_L(A^{\mu 1} + iA^{\mu 2}) + \frac{m^4}{f} + \\
+\frac{i}{2}(\overline{e}_L\gamma_\mu\partial^\mu e_L - \partial^\mu\overline{e}_L\gamma_\mu e_L) + \frac{i}{2}(\overline{\nu}_L\gamma_\mu\partial^\mu\nu_L - \partial^\mu\overline{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L) + \\
+\frac{i}{2}(\overline{e}_R\gamma_\mu\partial^\mu e_R - \partial^\mu\overline{e}_R\gamma_\mu e_R) + g^{(1)}\overline{e}_R\gamma_\mu B^\mu e_R - \frac{\sqrt{2}hm}{\sqrt{f}}(\overline{e}_L e_R + \overline{e}_R e_L) - \\
-g_4 A^{\mu(4)}(\kappa_1\overline{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L - \kappa_2\overline{e}_L\gamma_\mu e_L) - \frac{3}{2}g_6 A^{\mu(6)}\overline{e}_L\gamma_\mu e_L - \\
-\frac{5}{4}(g_6 A^{\mu(6)} + ig_5 A^{\mu(5)})\overline{\nu}_L\gamma_\mu e_L - \frac{5}{4}(g_6 A^{\mu(6)} - ig_5 A^{\mu(5)})\overline{e}_L\gamma_\mu\nu_L
\end{gathered} \tag{70}$$

По аналогии со СТ, вводя векторные поля

$$C_\mu = A^4_\mu, \quad M_\mu = A^7_\mu \tag{71}$$

$$D^+_\mu = \frac{1}{2g_D}(g_6 A^6_\mu + ig_5 A^5_\mu), \quad \overset{*}{D}{}^-_\mu = \frac{1}{2g_D}(g_6 A^6_\mu - ig_5 A^5_\mu) \tag{72}$$

запишем окончательный лагранжиан в виде

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{L}_{all.} = \mathfrak{L}_{ST} + \mathfrak{L}_{int} + f_{abcd} A_\mu^a A_\nu^b A^{\mu(c)} A^{\nu(d)} + \frac{o^{ij} m^2}{2f} A_\mu^i A^{\mu(j)} - \\
- \frac{1}{4} (\partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu)(\partial^\mu C^\nu - \partial^\nu C^\mu) + \frac{g_C^2 m^2}{2f} C_\mu C^\mu - \\
- g_C C^\mu (\kappa_1 \overline{\nu} \gamma_\mu \nu - \kappa_2 \overline{e}_L \gamma_\mu e_L) - \\
- \frac{1}{4} (\partial_\mu M_\nu - \partial_\nu M_\mu)(\partial^\mu M^\nu - \partial^\nu M^\mu) + \frac{g_M m^2}{2f} M_\mu M^\mu - \\
- \frac{1}{4} (\partial_\mu \overset{*}{D}_\nu - \partial_\nu \overset{*}{D}_\mu)(\partial^\mu D^\nu - \partial^\nu D^\mu) + \frac{g_D^2 m^2}{2f} \overset{*}{D}_\mu D^\mu - \\
- \frac{3}{4} g_D (\overset{*}{D}{}^\mu + D^\mu) \overline{e}_L \gamma_\mu e_L - \frac{5}{4} g_D \overline{\nu}_L \gamma_\mu D^\mu e_L - \frac{5}{4} g_D \overset{*}{D}{}^\mu \overline{e}_L \gamma_\mu \nu_L
\end{gathered} \tag{73}
$$

(Здесь $\mathfrak{L}_{int}$ обозначает ассоциативные члены третьего и четвёртого порядков по полям A_μ^k.)

На самом деле нет оснований говорить о диагональном виде лагранжиана, так как он по-прежнему содержит квадратичные по полям слагаемые. Методы снятия неассоциативности могут очень сильно изменить корпускулярный смысл лагранжиана (73). Тем не менее вид (73) лагранжиана октонионых полей отражает всю содержательную структуру попытки расширения модели Стандартной Теории на алгебру октонионов.

7 Исследование лагранжиана октонионов

1. Рассмотрим неассоциативные слагаемые лагранжиана (70). Во-первых это квадратичный по полям A_μ^k член

$$
\frac{o^{ij} m^2}{2f} A_\mu^i A^{\mu(j)} = i c_2^{ij} A^{ij} \frac{q^i q^j m^2}{2f} A_\mu^i A^{\mu(j)} \tag{74}
$$

Применим к этому члену вероятностную модель снятия ассоциативности. Считаем, что для ненулевых компонент $c^{ij} = c^{ji} = 1/4$. Но тогда в силу симметричности выражения $q^i q^j A_\mu^i A^{\mu(j)}$ по i, j (по i, j нет суммирования) и антисимметричности множителя A^{ij} этот член равен нулю.

2. Лагранжиан свободных полей $\mathfrak{L}_f$ содержит неассоциативность четвёртого порядка по полям A_μ.

$$
f^{ijkl} (A_\mu^i A_\nu^j - A_\nu^j A_\mu^i)(A^{\mu(k)} A^{\nu(l)} - A^{\nu(k)} A^{\mu(l)}) \tag{75}
$$

Формально это слагаемое в лагранжиане можно рассматривать как потенциальную энергию (что-то вроде $\lambda\varphi^4$), поэтому к нему имеет смысл применить максимальную схему расстановки скобок (имея в виду, что $L = T - V$). Если этот член рассматривать со знаком минус, то модель расстановки скобок была бы минимальной. Поэтому, подразумевая физическое приложение задачи, в дальнейшем выбор скобок по правилу max или min будем назвать как **потенциальную модель**.

3. Лагранжиан (70) содержит нейтральный ток

$$
-q^4 A^{\mu(4)} (\kappa_1 \overline{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L - \kappa_2 \overline{e}_L \gamma_\mu e_L) \tag{76}
$$

взаимодействующий только с левыми спинорами. Тем самым определяется нейтральный векторный бозон C_μ

$$
q_C C_\mu = -q^4 A^{\mu(4)}. \tag{77}
$$

4. Лагранжиан (70) содержит ток вида

$$-\frac{5}{4}\overline{\nu}_L\gamma_\mu(q^6A^{\mu(6)}+iq^5A^{\mu(5)})e_L-\frac{5}{4}(q^6A^{\mu(6)}-iq^5A^{\mu(5)})\overline{e}_L\gamma_\mu\nu_L \tag{78}$$

который указывает на необходимость введения двух противоположно заряженных векторных бозонов

$$\begin{aligned} q_D D_\mu &= -\frac{5}{4}q^6A^{\mu(6)}-i\frac{5}{4}q^5A^{\mu(5)} \\ q_D \overset{*}{D}_\mu &= -\frac{5}{4}q^6A^{\mu(6)}+i\frac{5}{4}q^5A^{\mu(5)} \end{aligned} \tag{79}$$

с зарядом $\pm q_D$.

Следовательно необходимо модифицировать ток $q^6A^{\mu(6)}\overline{e}_L\gamma_\mu e_L$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &-\frac{3}{2}q^6A^{\mu(6)}\overline{e}_L\gamma_\mu e_L = \\ &= -\frac{3}{4}\overline{e}_L\gamma_\mu(q^6A^{\mu(6)}+iq^5A^{\mu(5)})e_L)-\frac{3}{4}(q^6A^{\mu(6)}-iq^5A^{\mu(5)})\overline{e}_L)\gamma_\mu e_L. \end{aligned} \tag{80}$$

5. Лагранжиан (70) содержит лагранжиан левых электронных полей, взаимодействующих с векторным полем $A^{\mu(6)}$

$$\frac{i}{2}(\overline{e}_L\gamma_\mu\partial^\mu e_L-\partial^\mu\overline{e}_L\gamma_\mu e_L)-\frac{3}{2}q^6A^{\mu(6)}\overline{e}_L\gamma_\mu e_L \tag{81}$$

которое эквивалентно (по аналогии с электромагнитным полем) выражению с длинной производной в виде

$$\partial^\mu - i\frac{3}{4}q^6A^{\mu(6)} \tag{82}$$

но, учитывая замечание 4, длинная производная приобретает вид

$$\partial^\mu - i\frac{3}{4}q^6A^{\mu(6)}-\frac{3}{4}q^5A^{\mu(5)} \tag{83}$$

Таким образом, лагранжиан материальных полей, взаимодействующих с векторными полями можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\frac{i}{2}\overline{e}_L\gamma_\mu\partial^\mu e_L-\frac{i}{2}\partial^\mu\overline{e}_L\gamma_\mu e_L-\frac{3}{2}q^6A^{\mu(6)}\overline{e}_L\gamma_\mu e_L = \\ &= \frac{i}{2}\overline{e}_L\gamma_\mu\left(\left(\partial^\mu-i\frac{3}{4}q^6A^{\mu(6)}-\frac{3}{4}q^5A^{\mu(5)}\right)e_L\right)- \\ &-\frac{i}{2}\left(\left(\partial^\mu+i\frac{3}{4}q^6A^{\mu(6)}-\frac{3}{4}q^5A^{\mu(5)}\right)\overline{e}_L\right)\gamma_\mu e_L \end{aligned} \tag{84}$$

8 Тетрадное представление

Ограничимся случаем риманова пространства, по крайней мере в некоторой окрестности. Например, можно считать, что в пространстве R^n

$$R^n=\{(y^1,\dots,y^n),y^k\in R,k=1,\dots,n,n>4\} \tag{85}$$

с индефинитной метрикой

$$ds^2=\eta_{ik}dy^idy^k, \qquad i,k=1,\dots,n \tag{86}$$

в некоторой окрестности задана поверхность $y^k = y^k(x^0, x^1, x^2, x^3)$, где $x^i, i = 0, \ldots, 3$ — параметры, определяющие точку на поверхности в пространстве R^n. Так как

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^\mu} dx^\mu, \tag{87}$$

то

$$ds^2 = \eta_{ik} \frac{\partial y^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^k}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{88}$$

где введено обозначение

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ik} \frac{\partial y^i}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^k}{\partial x^\nu} \tag{89}$$

В этом параграфе будем различать греческие и латинские индексы, полагая, что греческие индексы относятся к риманову пространству, а латинские — к евклидовому.

Считая, что $x^\mu = x^\mu(x')$, где x' — новая система координат, рассмотрим переход от x^μ к x'^ν $x^\mu = x^\mu(x')$ с невырожденным определителем преобразования $\partial x^\mu / \partial x'^\nu$. Дифференциалы dx^μ — при преобразовании координат

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu = \Lambda^\mu_\nu dx'^\nu \tag{90}$$

по определению ведут себя как компоненты контровариантного вектора. В соответствии с определением всякий контровариантный вектор A^μ при переходе к новой системе координат преобразуется по формуле (90). При параллельном переносе вектора $A^n = \dfrac{\partial y^i}{\partial x^\mu} A^\mu$ в соседнюю точку поверхности проекция вектора A^n на поверхность изменяется на величину $\delta A^\mu = \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu dx^\lambda$ [12], где введены символы Кристоффеля второго рода $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$:

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} (g_{\mu\kappa,\nu} + g_{\nu\kappa,\lambda} - g_{\lambda\nu,\kappa}) \tag{91}$$

поэтому обычная производная $A^\mu_{,\nu} = \partial A^\mu / \partial x^\nu$ вектором не является. Но тогда производная $A^\mu_{;\nu} = A^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda$ преобразуется по закону (90), то есть это вектор.

Символы Кристоффеля не образуют тензора. Тензорному закону преобразования подчиняется комбинация символов Кристоффеля — тензор Римана, который определим в соответствии с [12]

$$R^\tau_{\mu\nu\lambda} = \Gamma^\tau_{\mu\lambda,\nu} - \Gamma^\tau_{\mu\nu,\lambda} + \Gamma^\tau_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} - \Gamma^\tau_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\nu}. \tag{92}$$

Квадратичная форма (88) может быть приведена к диагональному виду в некоторой новой системе координат. Ассоциируя параметры поверхности с параметрами физического пространства-времени, считаем что в некоторой системе координат метрика приведена к виду метрики пространства Минковского:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b \tag{93}$$

Соответственно в каждой точке пространства-времени введём тетрады $h^\mu_a = \partial x^\mu / \partial x^a, a = 0, 1, 2, 3$ осуществляющие данный переход. Тетрады обладают естественным свойством ортогональности

$$h^b_\mu h^\mu_{a,\nu} = \delta^b_a, \qquad h^{\mu(a)} h^\nu_a = g^{\mu\nu} \tag{94}$$

и свойствами по поднятию и опусканию индексов.

$$\delta A^\mu = \delta(A^a h^\mu_a) = \delta A^a h^\mu_a + A^a h^\mu_{a,\nu} \delta x^\nu = \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\nu \delta x^\lambda \tag{95}$$

В каждой точке риманова пространства контровариантный вектор A^μ может быть представлен в диагональной системе координат $A^a = A^\mu h^a_\mu$. Так как

$$\delta A^\mu = \delta(A^a h^\mu_a) = \delta A^a h^\mu_a + A^a \delta h^\mu_a \tag{96}$$

и учитывая $h^b_\mu h^\mu_{a,\nu} + h^b_{\mu,\nu} h^\mu_a = 0$, находим

$$\delta A^b = \gamma^b_{ac} A^a \delta x^c, \qquad \gamma^b_{ac} = h^b_{\mu;\nu} h^\mu_a h^\nu_c \tag{97}$$

где γ^b_{ac} коэффициенты вращения Риччи.

Известно преобразование спинора $\Psi(x)$ в случае произвольного лоренцева преобразования [13]

$$\Psi \to \Psi + \frac{1}{2}\omega^{ab}\sigma^{ab}\Psi, \qquad \sigma^{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b], \qquad a, b = 0, 1, 2, 3 \tag{98}$$

где введена постоянная матрица инфинитезимального преобразования ω^{ab}, определяющая лоренцев поворот. Матрицы Дирака удовлетворяют следующему правилу умножению с матрицами σ^{ab}:

$$\gamma^a \sigma^{bc} = \frac{1}{4}\gamma^a \left[\gamma^b, \gamma^c\right] = \frac{1}{2}\eta^{ab}\gamma^a - \frac{1}{2}\eta^{ac}\gamma^b - \frac{i}{2}\varepsilon^{dabc}\gamma^5\gamma_d \tag{99}$$

Известно, что $\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ является вектором при общекоординатных пребразованиях [13]. Это в свою очередь накладывает требования на преобразования спиноров. Для согласования общекоординатного преобразования и лоренцева преобразования заменим постоянную инфинитезимальную матрицу ω^{ab} на матрицу, зависящую от $x, \omega^{ab} = \omega^{ab}(x)$ по аналогии с локальной калибровочной симметрией. В результате найдём общий вид производной в локально плоском пространстве Минковского, которая будет вектором при общекоординатных преобразования

$$\partial_a \Psi \to D_a \Psi = \partial\Psi/\partial x^a - i\Phi_a \psi - \Gamma_a \Psi \tag{100}$$

Данное преобразование впервые найдено в работе Фока-Иваненко [14]. Было показано, что Γ_l — вещественная величина, являющаяся функцией коэффициентов вращения γ_{abc} и матриц Дирака, а Φ_a — вещественная величина, пропорциональная единичной матрице. В дальнейшем Φ_a отождествляется исключительно с электромагнитным полем. Матрица Γ_a имеет вид

$$\Gamma_a = -\frac{1}{2}\gamma_{abc}\sigma_{bc}, \qquad \gamma_{abc} = h_{(b)\mu;\nu} h^\mu_a h^\nu_c \tag{101}$$

В частности, если гравитационное поле рассматривается в ортогональных координатах в римановом пространстве с метрикой:

$$ds^2 = H^{(0)2}dx^{(0)2} - H^{(1)2}dx^{(1)2} - H^{(2)2}dx^{(2)2} - H^{(3)2}dx^{(3)2} \tag{102}$$

то

$$-\gamma^a\Gamma_a = \frac{1}{4}h^\mu_a h^\nu_b h_{(c)\nu;\mu}\left(\frac{1}{2}\eta^{ab}\gamma^a - \frac{1}{2}\eta^{ac}\gamma^b - \frac{i}{2}\varepsilon^{dabc}\gamma^5\gamma_d\right) \tag{103}$$

Но в силу диагональности метрики (102), а поэтому и диагональности тетрад $h_{\mu(a)}$ при различных значениях a, b, c получим

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} h_{c\lambda} h^\mu_b h^\nu_c = \frac{1}{2}g^{\mu\kappa}\left(g_{\mu\kappa,\nu} + g_{\nu\kappa,\lambda} - g_{\lambda\nu,\kappa}\right) h_{c\lambda} h^\mu_b h^\nu_c = 0 \tag{104}$$

поэтому

$$\begin{aligned} -\gamma^a\Gamma_a &= \frac{1}{4}h^\mu_a h^{\nu(a)} h_{(c)\nu;\mu}\gamma^c - \frac{1}{4}h^{\mu(a)} h^{\nu(b)} h_{(a)\nu;\mu}\gamma^b = \\ &= \frac{1}{4}h^\mu_{c;\mu}\gamma^c + \frac{1}{4}h^{\mu(a)} h^\nu_{b;\mu} h_{(a)\nu;\mu}\gamma^b = \frac{1}{2}h^\mu_{c;\mu}\gamma^c \end{aligned} \tag{105}$$

и уравнение Дирака принимает вид [15]:

$$\left(\gamma^a (H^a)^{-1}\left(\partial_a - i\Phi_a + \frac{1}{2}\partial_a\left(\ln\frac{\sqrt{-g}}{H^a}\right)\right) - m\right)\psi = 0 \tag{106}$$

В данной работе предлагается отождествить поле Φ_a с A^6_a, поле Γ_a — с A^5_a (в отсутствии электромагнитного поля). Эта аналогия следует из сравнения уравнений Дирака (84) и (106).

Фактически криволинейное пространство возникает как метод решения уравнения Дирака во внешнем поле A^5_μ. Но так как независимые переменные x^k имеют вполне точный физический смысл мы приходим к выводу, что обобщение теории Вайнберга-Салама на алгебру октав Кэли предлагаемым в данной работе способом означает введение криволинейного пространства на фоне которого необходимо рассматривать распространение материальных полей.

9 Пространство Фридмана

Покажем, что в плоском пространстве Фридмана имеется самосогласованное решение лагранжиана октонионов.

Рассмотрим однородную и изотропную Вселенную

$$ds^2 = dx^{(0)2} - a^2(t)(dx^{(1)2} + dx^{(2)2} + dx^{(3)2}) = a^2(\eta)(d\eta^2 - dl^2), \tag{107}$$

где введено конформное время $dt = a(\eta)d\eta$, при этом

$$g_{00} = a^2(\eta), \quad g_{\alpha\beta} = a^2(\eta)\eta_{\alpha\beta} \tag{108}$$

С помощью (91) находим все ненулевые компоненты символа Кристоффеля:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{a'}{a^3}, \quad \Gamma^0_{\alpha\beta} = -\frac{a'}{a^3}g_{\alpha\beta}, \quad \Gamma^\alpha_{0\beta} = \frac{a'}{a}\delta^\alpha_\beta \tag{109}$$

и вычислим величину

$$G = g^{\mu\nu}(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\kappa_{\lambda\kappa} - \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa_{\nu\lambda}) = \frac{6a'^2}{a^4}, \tag{110}$$

где штрих означает производную по конформному времени.

Запишем уравнение Дирака в метрике Фридмана (107)

$$\left(\gamma^j (H^j)^{-1}\left(\partial_j - i\Phi_j + \frac{1}{2}\partial_j\left(\ln\frac{\sqrt{-g}}{H^j}\right)\right) - m\right)\psi = 0 \tag{111}$$

Из (107) получаем, что

$$q_D A^5_\mu = (2da/(adt), \vec{0}) \tag{112}$$

Так как поля A^5_μ и A^6_μ объединяются в одно векторное поле D_μ считаем, что в нашем случае $A^5_\mu = A^6_\mu$

Предположим, что

$$f^{4567}q^{47}q^{56}A^{(4)\mu}A^{(7)}_\mu = -\frac{3q_D^2}{2\kappa} \tag{113}$$

тогда неассоциативный по полям член лагранжиана (70) приобретает вид

$$f^{4567}q^{47}q^{56}A^{(4)\mu}A^{(7)}_\mu A^{(5)\nu}A^{(6)}_\nu = -\frac{6}{\kappa}\left(\frac{da}{dta^2}\right)^2 \tag{114}$$

вычисленный по правилу потенциальной схемы снятия неассоциативности. Будем ассоциировать это выражение с лагранжианом гравитационного поля

$$\mathfrak{L}_{grav.} = f^{4567} q^{47} q^{56} A^{(5)\mu} A^{(6)}_{\mu} A^{(4)\nu} A^{(7)}_{\nu} = -\frac{1}{\kappa} G \tag{115}$$

при этом действие гравитационного поля представим в виде

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{2\kappa} G + \mathfrak{L}_{mat.}\right) = \int d^4x \left(-\frac{1}{2\kappa}(G + \mathfrak{L}_{mat.}\right) + \int d^3x div\Gamma$$
$$= \int d^4x \left(-\frac{1}{2\kappa} R + \mathfrak{L}_{mat.}\right) \tag{116}$$

где R — кривизна. Откуда получаем уравнения Эйнштейна

$$R_{ik} = \kappa T_{ik} \tag{117}$$

Тем не менее возникает вопрос о допустимости (113) и (112). С этой целью найдём решения для свободных старших октонионных полей.

Пусть $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_f$ и $q^5 A^5_{\mu} = q^6 A^6_{\mu} = q_D D_{\mu}$. Так как $A^k_{\mu} = 0, k = 0, \ldots, 3$, то учитывая (7) получим

$$F^{\mu\nu(D)} = D^{\mu}_{,\nu} - D^{\nu}_{,\mu} \tag{118}$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа имеют вид:

$$F^{\mu\nu(D)}_{,\mu} + (m^2 - q^{47} q^{56} A^{\mu(4)} A^7_{\mu}) D^{\nu} = 0 \tag{119}$$

Если масса m такая, что скобка в (119) обращается в ноль, то D-бозон оказывается безмассовым и находим решения

$$\begin{gathered} F^{\mu\nu(5)}_{,\mu} = F^{\mu\nu(6)}_{,\mu} = 0, \\ A^5_{\mu} = A^6_{\mu} = (g(t), \vec{0}) \end{gathered} \tag{120}$$

где $g(t)$ — произвольная функция. Таким образом D - бозоны оказываются безмассовыми векторными частицами.

Рассмотрим уравнение для C и E бозонов. В силу (7) напряженности $F^{\mu\nu(C,E)}$ не содержат нелинейности по полям A^k_{μ}. При этом

$$\begin{gathered} F^{\mu\nu(C)}_{,\mu} + (m^2_C - \tfrac{da}{adt}) C^{\nu} = 0, \\ F^{\mu\nu(E)}_{,\mu} + (m^2_E - \tfrac{da}{adt}) E^{\nu} = 0 \end{gathered} \tag{121}$$

Если считать, что массы C и E - бозонов одинаковы и равны m и

$$m^2 >> \frac{da}{adt} \tag{122}$$

то приходим к уравнению для свободных векторных массивных частиц. Для решений

$$C_{\mu} = e^{ikx} c_{\mu}, \qquad E_{\mu} = e^{-ikx} e_{\mu} \tag{123}$$

с постоянными векторами поляризации c_{μ} и e_{μ} получим

$$C_{\mu} E_{\mu} = c_{\mu} e_{\mu} = \text{Constant} \tag{124}$$

получаем условие (113).

Так как ставилась задача о существовании решений типа Фридмана на лагранжиане октонионов, то можно считать, что она выполнена.

Решения для швардшильдовской метрики не требуют источников — вполне достаточно требования движения по геодезической в римановом пространстве. Этому требованию вполне удовлетворяет уравнение Дирака (111), записанное сферически симметричной однородной стационарной метрике.

10 Решение Швардшильда

Рассмотрим пространство в котором имеется массивное сферически симметричное тело. Пусть это тело является источником октонионного поля. На значительном расстоянии от этого тела электро-слабым взаимодействием можно пренебречь, поэтому это тело может быть источником разве что старших октонионных полей. В силу симметрии задачи можно считать, если на большом расстоянии имеются октонионные поля, источником которых является массивное тело, то они создаются вектор-потенциалом $A^k_\mu = A^k_\mu(r), k = 4, 5, 6, 7$.

Пусть в этом пространстве движется, например, электрон. Пространство, в котором этот электрон движется — по определению — пространство Минковского. В сферически симметричных координатах метрика в этом пространстве имеет вид:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2) \tag{125}$$

Ограничимся левыми спинорами. Запишем его уравнение движения в октонионном поле массивного источника, предполагая, что с полями $A^{4,7}_\mu$ он не взаимодействует:

$$\left(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^r\left(\partial_r - \vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{L}} - \frac{3i}{4}q^6A^6_r - \frac{3}{4}q^5A^5_r\right) + m\right)\psi = 0 \tag{126}$$

Здесь введено обозначение

$$\gamma^r = \gamma^1\sin\theta\cos\varphi + \gamma^2\sin\theta\sin\varphi + \gamma^3\cos\theta,$$

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

где $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$ — оператор углового момента [16].

Сравнение уравнения (126) с уравнением Иваненко-Соколова (106), наводит на мысль, что формально его решение можно искать в искривлённом пространстве, в котором

$$\frac{1}{2}\partial_a\left(\ln\frac{\sqrt{-g}}{H^a}\right) = -\frac{3}{4}q^5A^5_r \tag{127}$$

С другой стороны, в сферически-симметричной, стационарной метрике Швардшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \dfrac{r_g}{r}} - r^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2) \tag{128}$$

где $r_g = 2M/r$ — гравитационный радиус, находим H^a. Тогда, с точки зрения развиваемого здесь формализма необходимо считать, что имеется дополнительное векторное поле D_μ, что

$$\begin{gathered} q_D D_\mu = q_6A^6_\mu + iq_5A^5_\mu, \\ q_5A^5_\mu = q_6A^6_\mu = f_{,r}/f \approx \frac{r_g}{2r^2} \end{gathered} \tag{129}$$

где введено обозначение $f^2 = 1 - r_g/r$.

Тем не менее возникает вопрос о допустимости (129), поэтому исследуем свободный лагранжиан октонионов $\mathfrak{L}_f$. Так как нас интересует его дальнодействующая часть без электромагнитного поля, то исключим $A^k_\mu, k = 0, 1, 2, 3$. Пусть $q^5A^5_\mu = q^6A^6_\mu = q_DD_\mu$ тогда

$$F^D_{\mu\nu} = D_{\nu,\mu} - D_{\mu,\nu} \tag{130}$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа имеют вид:

$$F^{\mu\nu(D)}_{,\mu} + (m_D^2 - q^{47}q^{56}A^{\mu(4)}A^{\nu(7)})D^\nu = 0 \tag{131}$$

Пусть масса m_D такова, что выражение в скобках в (131) равно нулю

$$m_D^2 - q^{47}q^{56}A^{\mu(4)}A^{\nu(7)} = 0 \tag{132}$$

Так как выражение в скобках равно нулю, то находим решение для векторного D-бозона

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu(D)}_{,\mu} &= 0, \\ A^5_\mu = A^6_\mu &= (0, g(r), 0, 0) \end{aligned} \tag{133}$$

где $g(r)$ — произвольная функция координат. Таким образом D — бозоны оказываются безмассовыми векторными заряженными частицами.

Рассмотрим уравнение для C и E бозонов.

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu(C)}_{,\mu} + m_C^2 C^\nu - q^{47}q^{56}\frac{r_g^2}{4r^4}E^\nu = 0 \\ F^{\mu\nu(E)}_{,\mu} + m_E^2 E^\nu - q^{47}q^{56}\frac{r_g^2}{4r^4}C^\nu = 0 \end{aligned} \tag{134}$$

Если считать, что массы C и E — бозонов таковы, что

$$\begin{aligned} m_C^2 C^\nu - q^{47}q^{56}\frac{r_g^2}{4r^4}E^\nu \approx m_C^2 C^\nu \\ m_E^2 E^\nu - q^{47}q^{56}\frac{r_g^2}{4r^4}C^\nu \approx m_E^2 E^\nu \end{aligned} \tag{135}$$

то приходим к уравнению для свободных векторных массивных частиц. Для решений

$$\begin{aligned} C_\mu &= e^{ikx}c_\mu, \\ E^\mu &= e^{-ikx}e^\mu \end{aligned} \tag{136}$$

с постоянными векторами поляризации c_μ и e_μ получим

$$C_\mu E^\mu = c_\mu e^\mu = \text{Constant} \tag{137}$$

получаем условие (113).

Также как и ранее необходимо полагать, что пары $C\bar{E}$ образуют в обычных условиях устойчивое состояние.

Наконец лагранжиан гравитационного поля G оказывается равным

$$G \approx A^5_\mu A^{(6)\mu} \approx \frac{r_g^2}{4r^4} \tag{138}$$

можно считать пренебрежимо малым, то есть пусть $R = 0$.

Так как ставилась задача о существовании решений типа Швардшильда на лагранжиане октонионов, то можно считать, что она выполнена.

Формально в работе указывается на существование приближения октонионного поля, которое могло бы соответствовать физической реальности. Уже эти представления представляются автору заслуживающими самое пристальное внимание к предлагаемому подходу по развитию октонионной гравитации.

Благодарности

Автор выражает благодарность за содержательное обсуждение работы участникам семинара Лаборатории им. А.А. Фридмана, особенно А.А. Грибу, С.В. Красникову, А. Лобашеву и Ю.В. Павлову.

Литература

[1] Jordan P., Neumann J., Wigner E. // *Ann. Math.*, 35, 1934, pp. 29-64.

[2] Павлов Д.Г. // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(1), 2004, pp. 33-42.

[3] Gogberashvili M. // *J. Phys.*, A39, 2006, pp. 7099-7104.

[4] Калашников О.К., Бронштейн С.Е., Фрадкин Е.С. // *Ядерная физика*, 29, в. 6, 1979, с. 1660-1669.

[5] Zorn M. // *Abh. Math. Sem. Hamburgischen Univ.*, 9, 1933, pp. 395-402.

[6] Daboul J., Delbourgo R. // *J. Math. Phys.*, 40, 1999, pp. 4134–4150, hep-th/9906065.

[7] Дорофеев В.Ю. // *Известия ВУЗов. Математика*, 11, 2011, с. 3-12. arxiv.org math-ph:0908.3247v1 (2009)

[8] Дорофеев В.Ю. E-print: arxiv.org gr-qc:1003.3228 (2010)

[9] Дорофеев В.Ю. E-print: arxiv.org gr-qc:1010.1928 (2010)

[10] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М., Наука, 1957.

[11] Окунь Л.Б. Лептоны и кварки. М., Наука, 1990.

[12] Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. М., Гос. изд. иностранной литературы, 1948.

[13] Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. М., Наука, 1981.

[14] Fock V., Ivanenko D. C.R., Paris 188, 1929, p. 1470.

[15] Соколов А., Иваненко Д. Квантовая теория поля, М., Наука, 1952.

[16] Brill D.R., Wheeler J.A. // *Rev. Mod. Phys. D.*, 29, 1957, pp. 465-479.

CONSTRUCTION OF THE CURVATURE ON CAYLEY ALGEBRA OCTAVES

V.Yu. Dorofeev

Friedmann Laboratory for Theoretical Physics, St-Petersburg, Russia

friedlab@mail.ru

Lagrangian of matter fields of electron-lepton sector is constructed on Cayley algebra octaves. It is inferred from the model that the state space is ten-dimensional. It is proposed to determine the non-associative part of the Lagrangian as a manifestation of gravity. It turns out a pair of oppositely charged massless vector bosons induces gravity. It is shown the model of the Lagrangian with Schwarzschild as well as Friedman metric is consistent.

Key Words: octonions, Cayley octaves, the weak interaction, nonassociative, GRG.