О ПРОСТРАНСТВЕ НАД АЛГЕБРОЙ ПОЛИЧИСЕЛ С МЕТРИКОЙ БЕРВАЛЬДА-МООРА

А.В. Букушева

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

bukusheva@list.ru

На гладком многообразии определяется полиаффинорная алгебра, согласованная с метрикой Бервальда-Моора. Определяются условия, при которых многообразие с полиаффинорной алгеброй наделяется структурой пространства над алгеброй поличисел.

Ключевые слова: метрика Бервальда-Моора, полиаффинорная алгебра.

1 Введение

Под пространством поличисел понимается коммутативная ассоциативная алгебра, естественным образом согласованная с метрической функцией Бервальда-Моора (БМ). Алгебра поличисел P_n является обобщением алгебры двойных чисел. В алгебре поличисел P_n существует базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ такой, что $\vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}\vec{e}_\alpha$. Исследование пространств такого вида получило свое развитие в работах [1, 2]. Если алгебру поличисел рассматривать как гладкое многообразие M, то соответствующая метрика БМ определяется функцией, не зависящей от выбора точки многообразия M. В более общей ситуации, метрическая функция БМ определяется некоторым гладким полем полиформ. В дальнейшем для удобства всякое тензорное поле мы будем называть тензором и, в частности, поле полиформ - полиформой. Пространство с метрикой БМ изучено достаточно подробно (см., например, [3, 4]). При исследовании пространств БМ, как правило, используются методы финслеровой геометрии. Однако, учитывая, что в основе определения метрики БМ лежит полилинейная форма, при изучении пространств БМ можно использовать линейную ковариантную производную и соответствующие ей дифференциальные инварианты - кривизну, кручение и т.д. В настоящей работе на многообразии M с метрикой Бервальда-Моора, определяемой полилинейной формой g, естественным образом задается полиаффинорная алгебра с аффинорами $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$. В случае, когда тензорная структура $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, g)$ интегрируема, мы получаем уже известное пространство поличисел. Используя сведения по интегрируемым аффинорным структурам и пространствам над алгебрами, содержащиеся в обзорах [5, 6], а также работу по гиперкомплексным структурам [7], мы находим условия, при которых финслерово многообразие с метрикой БМ и согласованной с ней полиаффинорной структурой является пространством над алгеброй поличисел.

2 Определение полиаффинорной структуры

Пусть M - связное C^∞ - многообразие размерности n. Все встречающиеся на M функции и геометрические объекты будем считать бесконечно дифференцируемыми. Рассмотрим на многообразии M алгебраическую метрику n-го порядка, т.е. n-линейную симметрическую форму g с компонентами $g_{\alpha_1\alpha_2,...,\alpha_n}(x)$ относительно произвольного, вообще говоря, неголономного поля базисов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$.

Будем говорить, что ненулевой вектор $\vec{e}$ определяет нулевое направление формы g, если

$$g(\vec{e}, \vec{e}, \vec{x}_3, ..., \vec{x}_n) = 0.$$

Не нулевая алгебраическая метрика называется метрикой Бервальда-Моора, если существует поле базисов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ таких, что каждый вектор $\vec{e}_\alpha$ базиса задает нулевое направление формы g. Такое поле базисов будем называть адаптированным базисом формы g, или, просто адаптированным базисом. Форма g в адаптированном базисе имеет единственную, с точностью до перестановки индексов, отличную от нуля компоненту $g_{12...n}$.

В области определения поля адаптированных базисов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ определим n-гладких одномерных распределений D_1,D_2,...,D_n, полагая

$$D_\alpha = \langle \vec{e}_\alpha \rangle \,. \tag{1}$$

Из сформулированной ниже теоремы следует, что распределения D_1,D_2,...,D_n могут быть корректно определены на всем многообразии M.

Теорема 1. *Всякий вектор $\vec{e}$, задающий нулевое направление формы g, коллинеарен одному из векторов адаптированного базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$.*

Таким образом, определение распределений D_α не зависит от выбора адаптированного базиса и тем самым, метрика БМ определяет на M структуру почти произведения:

$$TM = \oplus_{\alpha=1}^{n} D_\alpha. \tag{2}$$

Очевидно, что две метрики g_1, g_2 Бервальда-Моора конформны ($g_1 = \lambda(x) g_2$) тогда и только тогда, когда они определяют одно и тоже разложение (2).

Рассмотрим n распределений $D_{\hat{\alpha}}$ определяемых следующим образом:

$$D_{\hat{\alpha}} = D_1 \oplus \cdots D_{\alpha-1} \oplus D_{\alpha+1} \cdots \oplus D_n.$$

Для любого α, таким образом, получаем разложение

$$TM = D_\alpha \oplus D_{\hat{\alpha}}. \tag{3}$$

Разложение (3) определяет семейство проекторов

$$\varphi_\alpha : TM \to D_\alpha.$$

Совокупность аффиноров φ_α относительно операции композиции образует n-мерную полиаффинорную алгебру, обозначаемую нами AH_n, изоморфную алгебре P_n. Будем говорить, что алгебра AH_n и метрика g - согласованы.

Еще раз подчеркнем, что задание метрики БМ влечет задание полиаффинорной алгебры специального вида. Обратно, если на гладком многообразии задана полиаффинорная алгебра, определяемая разложением (2), то всякая полилинейна форма, удовлетворяющая равенству

$$g(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n) = \sum_\sigma g(\varphi_1(\vec{x}_{\sigma(1)}), \varphi_2(\vec{x}_{\sigma(2)}), ..., \varphi_n(\vec{x}_{\sigma(n)})) \tag{4}$$

представляет собой метрику БМ, согласованную с полиаффинорной структурой. Любые две такие метрики конформны.

Базис, адаптированный форме g, естественно назвать адаптированным к полиаффинорной алгебре. Впредь такой базис будем называть адаптированным.

Если на многообразии M существует атлас, состоящий из карт, адаптированных к метрике g, т.е., задающих адаптированный базис: $\partial_\alpha = \vec{e}_\alpha$, то алгебра AH_n оказывается интегрируемой. В этом случае многообразие M может рассматриваться как многообразие $M(P_n, g)$ над алгеброй поличисел P_n. Впредь будем считать, что полиаффинорная алгебра интегрируема, а любая используемая система координат - адаптированная.

В адаптированном базисе аффинор φ_α имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{5}$$

В матрице (5) единица стоит на пересечении α - строки и α - столбца.

3 Связности, совместимые с метрикой БМ

Рассмотрим задачу нахождения связности, совместимой с метрикой БМ. Имеет место

Теорема 2. *На многообразии $M(P_n, g)$ существует единственная связность нулевого кручения, совместимая с метрикой БМ g.*

Предположим, что на $M(P_n, g)$ существует линейная связность ∇, совместимая с метрикой g. Используя равенство $\nabla g = 0$, получаем, что её коэффициенты $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ обращаются в нуль, если $\beta \neq \gamma$, кроме того, выполняется равенство

$$\Gamma^\beta_{\alpha\beta} = \frac{\partial_\alpha g_{12\ldots n}}{g_{12\ldots n}}.$$

Если потребовать обращения кручения S в нуль, то отличными от нуля компонентами связности ∇ будут:

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha} = \frac{\partial_\alpha g_{12\ldots n}}{g_{12\ldots n}}. \tag{6}$$

В равенстве (6) суммирования по α нет.

Для доказательства существования связности нулевого кручения совместимой с метрикой БМ g, достаточно в адаптированных картах задать её ненулевые компоненты с помощью равенства (6) и показать корректность такого задания связности.

Тензорной структурой на гладком многообразии называется определенная совокупность тензорных полей. Таким образом, в нашем рассмотрении находится тензорная структура, включающая в себя систему полиаффиноров и согласованную с этой системой полилинейную форму.

Тензорная структура называется интегрируемой, если на многообразии можно найти такой атлас, что всякий тензор структуры имеет в любой карте из этого атласа постоянные компоненты. Кручкович Г.И. в своей работе [7] сформулировал следующее утверждение: "Если тензорная структура допускает совместимую связность нулевой кривизны без кручения, то такая структура интегрируема. Всякая интегрируемая тензорная структура допускает связность нулевой кривизны без кручения, по крайней мере, локально".

Предложение Кручковича позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. *Тензорная структура $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, g)$ интегрируема тогда и только тогда, когда тензор кривизны связности (6) равен нулю.*

Используя равенство (6) и выражение в координатах тензора кривизны R получаем, что единственным отличным от нуля компонентом тензора R являются

$$K^c_{acc} = \partial_a \frac{\partial_c g_{12\ldots n}}{g_{12\ldots n}}$$

($a \neq c$, по c суммирования нет).

Таким образом, имеет место

Теорема 4. *Метрика БМ интегрируема тогда и только тогда, когда ее компоненты удовлетворяют следующей системе уравнений в частных производных*

$$\partial_a \frac{\partial_c g_{12...n}}{g_{12...n}} = 0.$$

Найдем условия, при которых на многообразии с тензорной структурой $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, g)$ допускается структура многообразия над алгеброй поличисел. Последнее означает, что среди действительных карт можно составить атлас из карт, связанных между собой Н-аналитическими преобразованиями.

Известно [7], что Н-аналитичность эквивалентна выполнению следующего условия: $C_\alpha D{=}DC_\alpha$. Нетрудно убедиться в том, что две действительные карты $\chi_1(x^\alpha)$, $\chi_2(y^\alpha)$ связаны между собой Н-аналитическими преобразованиями тогда и только тогда, когда $\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} = 0$, $\alpha \neq \beta$.

В тоже время, Н-аналитичность эквивалентна интегрируемости полиаффинорной алгебры. Это означает, что условие $\partial_\alpha \frac{\partial_c g_{12...n}}{g_{12...n}} = 0$ влечет выполнения условия $\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} = 0$, $\alpha \neq \beta$ для некоторого атласа адаптированных карт. Интегрируемость метрики БМ влечет интегрируемость алгебры AH_n и, одновременно, то, что эта метрика индуцирует метрику, не зависящую от точки, уже на пространстве над алгеброй [7]. Отсюда следует, что справедливыми оказываются следующие утверждения:

Теорема 5. *Полиаффинорная алгебра AH_n интегрируема тогда и только тогда, когда выполняются условия $\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} = 0$, $\alpha \neq \beta$.*

Теорема 6. *Многообразие с тензорной структурой $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, g)$ является пространством над алгеброй поличисел с постоянной метрикой тогда и только тогда, когда тензор кривизны связности (6) равен нулю.*

Литература

[1] Павлов Д.Г. Обобщённые аксиомы скалярного произведения // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике,* №1, 2004, с. 5-19.

[2] Гарасько Г.И., Павлов Д.Г. Геометрия невырожденных поличисел // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике,* №1(7), 2007 с. 3-25.

[3] Рунд, Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М., Наука, 1981, 502 с.

[4] Atanasiu Gh., Balan V., Neagu M. The 4-poliforms of momenta $K(p) = \sqrt[4]{p_1 p_2 p_3 p_4}$ and its applications in the Hamilton Geometry, lecture at The Workshop "Geometry of Finsler spaces with the Berwald-Moor metric 15-22 October 2005, Cairo, Egipt.

[5] Широков А.П. Пространства над алгебрами и их применения // *Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения/ВИНИТИ.* - М., 2002. т. 73, с. 135-161.

[6] Вишневский В.В. Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации // *Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения/ВИНИТИ.* М., 2002. т. 73, с. 5-64.

[7] Кручкович Г.И. Гиперкомплексные структуры на многообразиях, I // *Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу.* М., 1972. т. 16, с. 174-201.

THE SPACE OVER THE ALGEBRA OF POLYNUMBERS WITH BERWALD-MOOR METRIC

A.V. Bukusheva

Saratov State University, Saratov, Russia

bukusheva@list.ru

On a smooth manifold is defined a poly-affinor algebra compatible with a Berwald-Moor metric. We define the conditions under which a manifold with a poly-affine algebra can be equipped with the structure of a space over the algebra of polynumbers.

Key Words: a Berwald-Moor metric, a poly-affine algebra.