ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НА ДЕКАРТОВЫХ СТЕПЕНЯХ ГРУППОИДОВ, ПОЛУГРУПП И КОЛЕЦ

А.М. Гальмак

Могилевский государственный университет продовольствия, Могилёв, Беларусь

mgup@mogilev.by

Ранее было показано [2], что для любых $n \geq 3$, $s \geq 1$, $m \geq 2$ на декартовых степенях A^{n-1} и $A^{m(n-1)}$ полугруппы A определяются соответственно $(s(n-1)+1)$-арная операция $[\ \ ]_{s(n-1)+1,n-1}$ и n-арная операция $[\ \ ]_{n,m,m(n-1)}$. Также было показано [3], что для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$, $m \geq 1$ и любой подстановки $\sigma \in S_k$ на декартовой степени B^{mk} множества B определяется l-арная операция $[\ \ ]_{l,\sigma,m,mk}$. В настоящей статье продолжаются исследования автора, посвященные изучению многоместных операций на декартовых степенях универсальных алгебр.

Ключевые слова: многоместная операция, группоид, полугруппа, кольцо.

1 Введение

В предыдущих работах автора [1–6] изучалась l-арная операция $[\ \ ]_{l,\sigma,k}$, которая была определена для любых $l \geq 2$, $k \geq 2$ и произвольной подстановки $\sigma \in S_k$ на k-ой декартовой степени A^k полугруппы A. Если $l = m$, $k = m-1$, $\sigma = (12\dots m-1)$, $A = S_X$ — симметрическая группа всех биекций множества X на себя, то операция $[\ \ ]_{l,\sigma,k}$ совпадает с m-арной операцией, которую Э. Пост определил [7] на $(m-1)$-ой декартовой степени группы S_X. Там же в [7] аналогичную m-арную операцию Э. Пост определил на группе $\mathbf{GL}(n, C)$ всех невырожденных матриц порядка n над полем комплексных чисел C. В данной работе рассматриваются универсальные алгебры $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$, у которых множество A может быть группоидом, полугруппой, регулярной полугруппой, инверсной полугруппой, кольцом, регулярным кольцом.

Напомним некоторые понятия, используемые в работе.

n-Арный группоид $< A, [\ \ ] >$, в котором для любого $i = 1, 2, \dots, n-1$ выполняется тождество

$$[[a_1 \dots a_n]a_{n+1} \dots a_{2n-1}] = [a_1 \dots a_i[a_{i+1} \dots a_{i+n}]a_{i+n+1} \dots a_{2n-1}],$$

называют *n-арной полугруппой*, а n-арную операцию $[\ \ ]$ в этом случае называют *ассоциативной.*

n-Арную полугруппу $< A, [\ \ ] >$ называют *n-арной группой*, если в ней для всех $a_1, \dots, a_n, b \in A$ разрешимы уравнения

$$[xa_2 \dots a_n] = b, \ [a_1 \dots a_{n-1}y] = b.$$

Элемент a n-арного группоида $< A, [\ \ ] >$ называют его:

1. *идемпотентом*, если $[\underbrace{a \dots a}_{n}] = a$;

2. *нулем*, если для всех $x_1, \dots, x_{n-1} \in A$ верно

$$[ax_1 \dots x_{n-1}] = [x_1 a x_2 \dots x_{n-1}] = \dots = [x_1 \dots x_{n-1} a] = a;$$

3. *единицей*, если для любого $x \in A$ верно

$$[x \underbrace{a \dots a}_{n-1}] = [ax \underbrace{a \dots a}_{n-2}] = \dots = [\underbrace{a \dots a}_{n-1} x] = x.$$

Понятно, что n-арный группоид не может иметь более одного нуля, а всякая единица n-арного группоида является его идемпотентом.

Если в n-арном группоиде $< A, [\ ] >$ для любой подстановки σ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ выполняется тождество

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = [a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \ldots a_{\sigma(n)}],$$

то n-арный группоид $< A, [\ ] >$ и n-арную операцию $[\ ]$ называют *абелевыми.*

n-Арный группоид $< A, [\ ] >$, в котором выполняется тождество

$$[aa_1 \ldots a_{n-2}b] = [ba_1 \ldots a_{n-2}a],$$

называют *полуабелевым. Полуабелевой* в этом случае называют и саму n-арную операцию $[\ ]$.

Более подробную информацию об n-арных полугруппах и n-арных группах можно найти в [8 – 10].

Универсальную алгебру $< A, +, [\ ] >$ с бинарной и n-арной операциями $+$ и $[\ ]$ называют $(2, n)$-*кольцом*, если выполняются следующие условия:

1. $< A, + >$ — абелева группа;
2. в $< A, +, [\ ] >$ для любого $i = 1, \ldots, n$ выполняется тождество дистрибутивности

$$[a_1 \ldots a_{i-1}(b_1 + b_2)a_{i+1} \ldots a_n] = [a_1 \ldots a_{i-1} b_1 a_{i+1} \ldots a_n] + [a_1 \ldots a_{i-1} b_2 a_{i+1} \ldots a_n]. \quad (1)$$

Таким образом, можно сказать, что $(2, n)$-кольцо — это абелева группа, с определенной на ней n-арной операцией $[\ ]$, которая связана с групповой операцией $+$ тождеством (1). Операцию $[\ ]$ в этом случае называют *дистрибутивной* относительно операции $+$.

При $n = 2$ определение $(2, n)$-кольца превращается в определение обычного кольца, то есть понятие $(2, 2)$-кольца совпадает с понятием кольца.

Если n-арная операция $[\ ]$ удовлетворяет некоторому n-арному аналогу тождества $xy = yx$, то соответствующий тип абелевости выносится в название $(2, n)$-кольца. Например, если $[\ ]$ — абелева (полуабелева), то $(2, n)$-кольцо $< A, +, [\ ] >$ называют *абелевым (полуабелевым).*

$(2, n)$-Кольцо $< A, +, [\ ] >$ называют *ассоциативным*, если n-арная операция $[\ ]$ ассоциативна, то есть n-арный группоид $< A, [\ ] >$ является n-арной полугруппой.

В [11, 12] $(2, n)$-кольцами называются ассоциативные $(2, n)$-кольца. Там же дано более общее определение (m, n)-кольца, где $m \geq 2$. $(2, n)$-Кольцам посвящены работы [13, 14].

2 Определение операции $[\ ]_{\mathbf{l},\sigma,\mathbf{k}}$

Определение [6]. Пусть A — группоид, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ — подстановка из S_k. Определим на A^k вначале бинарную операцию

$$\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1 y_{\sigma(1)}, x_2 y_{\sigma(2)}, \ldots, x_k y_{\sigma(k)}), \quad (2)$$

а затем l-арную операцию

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\ldots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)) \ldots)). \quad (3)$$

Понятно, что операция $[\ ]_{2,\sigma,k}$ совпадает с операцией $\overset{\sigma}{\circ}$.

Легко заметить, что если $\sigma = (12 \ldots k)$, то операция $\overset{\sigma}{\circ}$ совпадает с операцией

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \circ (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1 y_2, x_2 y_3, \ldots, x_{k-1} y_k, x_k y_1)$$

из [5, определения 2.2.3], а операция $[\ \ ]_{l,\sigma,k}$ — с операцией $[\ \ ]_{l,k}$ из того же определения. Операции $\circ$ и $[\ \ ]_{l,k}$ впервые были определены в [1]. Там же в [1] впервые была определена и операция $[\ \ ]_{l,\sigma,k}$ для случая полугруппы A.

2.2. Теорема. [6]. *Если σ — нетождественная подстановка, а группоид A содержит более одного элемента, то в l-арном группоиде $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ нет единиц.*

2.3. Замечание. Если 0 и 1 — нуль и единица группоида A, то элемент $\mathbf{0} = (\underbrace{0,\ldots,0}_{k})$ является нулём l-арного группоида $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$, а элемент $\mathbf{e} = (\underbrace{1,\ldots,1}_{k})$ — его идемпотентом.

2.4. Теорема [6]. *Пусть σ — нетождественная подстановка, а группоид A содержит единицу и элемент a, отличный от единицы. Тогда l-арный группоид $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ неабелев.*

2.5. Теорема [6]. Пусть A — полугруппа,

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) \in A^k,\ i = 1, 2, \ldots, l.$$

Тогда

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\ldots\mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = (y_1, y_2, \ldots, y_k),$$

где

$$y_j = x_{1j}x_{2\sigma(j)}\ldots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}x_{l\sigma^{l-1}(j)},\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

2.6. Следствие. Пусть A — полугруппа, $k = l-1$, $\sigma = (12\ldots l-1)$,

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{i(l-1)}) \in A^{l-1},\ i = 1, 2, \ldots, l.$$

Тогда

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\ldots\mathbf{x}_l]_{l,\sigma,l-1} = (y_1, y_2, \ldots, y_{l-1}),$$

где

$$y_j = x_{1j}x_{2(j+1)}\ldots x_{(l-j)(l-1)}x_{(l-j+1)1},\ldots x_{(l-1)(j-1)}x_{lj},\ j = 1, 2, \ldots, l-1.$$

Из теоремы 2.5 вытекает, что если A — полугруппа, то определение 2.1 и определение 3.1.4 из [5] определяют одну и ту же l-арную операцию. Можно также сказать, что определение 2.1 обобщает l-арную операцию, определяемую определением 3.1.4 из [5], на случай группоидов.

2.7. Теорема [1, 5]. *Пусть A — полугруппа (группа), σ — подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда универсальная алгебра $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ является l-арной полугруппой (l-арной группой).*

2.8. Теорема [5]. *Если полугруппа A содержит единицу 1, а подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная полугруппа $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ является полуабелевой тогда и только тогда, когда полугруппа A — абелева.*

В разделе 3 нам понадобится следующая лемма, являющаяся следствием определения 2.1, и которая обобщает лемму 2.2.4 из [5].

2.9. Лемма. *Пусть A — группоид, $m \in \{1, \ldots, l-2\}$. Тогда*

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\ldots\mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{x}_1\ldots\mathbf{x}_m[\mathbf{x}_{m+1}\ldots\mathbf{x}_l]_{l-m,\sigma,k}]_{m+1,\sigma,k},$$

в частности,

$$[\mathbf{x}_1\ldots\mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} [\mathbf{x}_2\ldots\mathbf{x}_l]_{l-1,\sigma,k},$$

$$[\mathbf{x}_1\ldots\mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{x}_1\ldots\mathbf{x}_{l-2}(\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)]_{l-1,\sigma,k}.$$

3 Дистрибутивность операции $[\ \ ]_{l,\sigma,k}$

3.1. Лемма. *Пусть на множестве A определены бинарная операция $+$ и дистрибутивная относительно нее бинарная операция $\times$, обозначение которой в дальнейшем для краткости записей указывать не будем. Пусть также $k \geq 2$. Тогда операция $\overset{\sigma}{\circ}$, определяемая на A^k с помощью (2), является дистрибутивной относительно операции $+$, определенной на A^k покомпонентно.*

Доказательство. Используя определение операции $\overset{\sigma}{\circ}$ и дистрибутивность в A операции $\times$ относительно операции $+$, получим

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} ((y_1, y_2, \ldots, y_k) + (z_1, z_2, \ldots, z_k)) =$$

$$= (x_1, x_2, \ldots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_k + z_k) =$$

$$= (x_1(y_{\sigma(1)} + z_{\sigma(1)}), x_2(y_{\sigma(2)} + z_{\sigma(2)}), \ldots, x_k(y_{\sigma(k)} + z_{\sigma(k)})) =$$

$$= (x_1 y_{\sigma(1)} + x_1 z_{\sigma(1)}, x_2 y_{\sigma(2)} + x_2 z_{\sigma(2)}, \ldots, x_k y_{\sigma(k)} + x_k z_{\sigma(k)}) =$$

$$= (x_1 y_{\sigma(1)}, x_2 y_{\sigma(2)}, \ldots, x_k y_{\sigma(k)}) + (x_1 z_{\sigma(1)}, x_2 z_{\sigma(2)}, \ldots, x_k z_{\sigma(k)}) =$$

$$= (x_1, x_2, \ldots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} (y_1, y_2, \ldots, y_k) + (x_1, x_2, \ldots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} (z_1, z_2, \ldots, z_k)),$$

то есть

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} ((y_1, y_2, \ldots, y_k) + (z_1, z_2, \ldots, z_k)) =$$

$$= (x_1, x_2, \ldots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} (y_1, y_2, \ldots, y_k) + (x_1, x_2, \ldots, x_k) \overset{\sigma}{\circ} (z_1, z_2, \ldots, z_k)).$$

Аналогично получаем

$$((y_1, y_2, \ldots, y_k) + (z_1, z_2, \ldots, z_k)) \overset{\sigma}{\circ} (x_1, x_2, \ldots, x_k) =$$

$$= (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \ldots, y_k + z_k) \overset{\sigma}{\circ} (x_1, x_2, \ldots, x_k) =$$

$$= ((y_1 + z_1)x_{\sigma(1)}, (y_2 + z_2)x_{\sigma(2)}, \ldots, (y_k + z_k)x_{\sigma(k)}) =$$

$$= (y_1 x_{\sigma(1)} + z_1 x_{\sigma(1)}, y_2 x_{\sigma(2)} + z_2 x_{\sigma(2)}, \ldots, y_k x_{\sigma(k)} + z_k x_{\sigma(k)}) =$$

$$= (y_1 x_{\sigma(1)}, y_2 x_{\sigma(2)}, \ldots, y_k x_{\sigma(k)}) + (z_1 x_{\sigma(1)}, z_2 x_{\sigma(2)}, \ldots, z_k x_{\sigma(k)}) =$$

$$= (y_1, y_2, \ldots, y_k) \overset{\sigma}{\circ} (x_1, x_2, \ldots, x_k) + (z_1, z_2, \ldots, z_k) \overset{\sigma}{\circ} (x_1, x_2, \ldots, x_k)),$$

то есть

$$((y_1, y_2, \ldots, y_k) + (z_1, z_2, \ldots, z_k)) \overset{\sigma}{\circ} (x_1, x_2, \ldots, x_k) =$$

$$= (y_1, y_2, \ldots, y_k) \overset{\sigma}{\circ} (x_1, x_2, \ldots, x_k) + (z_1, z_2, \ldots, z_k) \overset{\sigma}{\circ} (x_1, x_2, \ldots, x_k)).$$

Из доказанных тождеств следует дистрибутивность операции $\overset{\sigma}{\circ}$ относительно операции $+$. Лемма доказана.

3.2. Предложение. *Пусть на множестве A определены бинарная операция $+$ и дистрибутивная относительно нее бинарная операция $\times$, обозначение которой в дальнейшем указывать не будем. Тогда l-арная операция $[\ \ ]_{l,\sigma,k}$, определяемая на A^k с помощью* (3), *является дистрибутивной относительно операции $+$, определенной на A^k покомпонентно.*

Доказательство. Случай $l = 2$ доказан в лемме 3.1.

Пусть теперь $l > 2$. Рассмотрим три случая.

1. $i=1$. Используя леммы 2.9 и 3.1, получим

$$[(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)\mathbf{a}_2\dots\mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k}=(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)\overset{\sigma}{\circ}[\mathbf{a}_2\dots\mathbf{a}_l]_{l-1,\sigma,k}=$$

$$=\mathbf{b}_1\overset{\sigma}{\circ}[\mathbf{a}_2\dots\mathbf{a}_l]_{l-1,\sigma,k}+\mathbf{b}_2\overset{\sigma}{\circ}[\mathbf{a}_2\dots\mathbf{a}_l]_{l-1,\sigma,k}=[\mathbf{b}_1\mathbf{a}_2\dots\mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k}+[\mathbf{b}_2\mathbf{a}_2\dots\mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k},$$

то есть

$$[(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)\mathbf{a}_2\dots\mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k}=[\mathbf{b}_1\mathbf{a}_2\dots\mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k}+[\mathbf{b}_2\mathbf{a}_2\dots\mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k}.$$

2. $i=l$. Используя (3), затем $l-1$ раз дистрибутивность слева операции $\overset{\sigma}{\circ}$ относительно операции $+$ (лемма 3.1) и снова (3), получим

$$[\mathbf{a}_1\dots\mathbf{a}_{l-1}(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)]_{l,\sigma,k}=\mathbf{a}_1\overset{\sigma}{\circ}(\mathbf{a}_2\overset{\sigma}{\circ}(\dots(\mathbf{a}_{l-2}\overset{\sigma}{\circ}(\mathbf{a}_{l-1}\overset{\sigma}{\circ}(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)))\dots))=$$

$$=\mathbf{a}_1\overset{\sigma}{\circ}(\mathbf{a}_2\overset{\sigma}{\circ}(\dots(\mathbf{a}_{l-2}\overset{\sigma}{\circ}(\mathbf{a}_{l-1}\overset{\sigma}{\circ}\mathbf{b}_1+\mathbf{a}_{l-1}\overset{\sigma}{\circ}\mathbf{b}_2))\dots))=\dots$$

$$\dots=\mathbf{a}_1\overset{\sigma}{\circ}(\mathbf{a}_2\overset{\sigma}{\circ}(\dots(\mathbf{a}_{l-2}\overset{\sigma}{\circ}(\mathbf{a}_{l-1}\overset{\sigma}{\circ}\mathbf{b}_1))\dots))+\mathbf{a}_1\overset{\sigma}{\circ}(\mathbf{a}_2\overset{\sigma}{\circ}(\dots(\mathbf{a}_{l-2}\overset{\sigma}{\circ}(\mathbf{a}_{l-1}\overset{\sigma}{\circ}\mathbf{b}_2))\dots))=$$

$$=[\mathbf{a}_1\dots\mathbf{a}_{l-1}\mathbf{b}_1]_{l,\sigma,k}+[\mathbf{a}_1\dots\mathbf{a}_{l-1}\mathbf{b}_2]_{l,\sigma,k},$$

то есть

$$[\mathbf{a}_1\dots\mathbf{a}_{l-1}(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)]_{l,\sigma,k}=[\mathbf{a}_1\dots\mathbf{a}_{l-1}\mathbf{b}_1]_{l,\sigma,k}+[\mathbf{a}_1\dots\mathbf{a}_{l-1}\mathbf{b}_2]_{l,\sigma,k}.$$

3. $i\in\{2,\dots,l-1\}$. Используя лемму 2.9, затем рассмотренные выше случаи 1) и 2) и снова лемму 2.9, получим

$$[\mathbf{a}_1\dots\mathbf{a}_{i-1}(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)\mathbf{a}_{i+1}\dots\mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k}=$$

$$=[\mathbf{a}_1\dots\mathbf{a}_{i-1}[(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)\mathbf{a}_{i+1}\dots\mathbf{a}_l]_{l-i+1,\sigma,k}]_{i,\sigma,k}=$$

$$=[\mathbf{a}_1\dots\mathbf{a}_{i-1}([\mathbf{b}_1\mathbf{a}_{i+1}\dots\mathbf{a}_l]_{l-i+1,\sigma,k}+[\mathbf{b}_2\mathbf{a}_{i+1}\dots\mathbf{a}_l]_{l-i+1,\sigma,k})]_{i,\sigma,k}=$$

$$=[\mathbf{a}_1\dots\mathbf{a}_{i-1}[\mathbf{b}_1\mathbf{a}_{i+1}\dots\mathbf{a}_l]_{l-i+1,\sigma,k}]_{i,\sigma,k}+[\mathbf{a}_1\dots\mathbf{a}_{i-1}[\mathbf{b}_2\mathbf{a}_{i+1}\dots\mathbf{a}_l]_{l-i+1,\sigma,k}]_{i,\sigma,k}=$$

$$=[\mathbf{a}_1\dots\mathbf{a}_{i-1}\mathbf{b}_1\mathbf{a}_{i+1}\dots\mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k}+[\mathbf{a}_1\dots\mathbf{a}_{i-1}\mathbf{b}_2\mathbf{a}_{i+1}\dots\mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k},$$

то есть

$$[\mathbf{a}_1\dots\mathbf{a}_{i-1}(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)\mathbf{a}_{i+1}\dots\mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k}=[\mathbf{a}_1\dots\mathbf{a}_{i-1}\mathbf{b}_1\mathbf{a}_{i+1}\dots\mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k}+[\mathbf{a}_1\dots\mathbf{a}_{i-1}\mathbf{b}_2\mathbf{a}_{i+1}\dots\mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k}.$$

Таким образом, доказано, что последнее тождество выполняется в A^k для любого $i=1,\dots,l$. Следовательно, l-арная операция $[\ \ ]_{l,\sigma,k}$ дистрибутивна относительно операции $+$. Предложение доказано.

3.3. Следствие. Если $<A,+,\times>$ — кольцо, то $<A^k,+,[\ \ ]_{l,\sigma,k}>$ — $(2,l)$-кольцо.

Теорема 2.7 и предложение 3.2 позволяют сформулировать следующую теорему.

3.4. Теорема. *Пусть $<A,+,\times>$ — ассоциативное кольцо, σ — подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\sigma^l=\sigma$. Тогда универсальная алгебра $<A^k,+,[\ \ ]_{l,\sigma,k}>$ является ассоциативным $(2,l)$-кольцом.*

3.5. Следствие. *Пусть $<A,+,\times>$ — ассоциативное кольцо, k делит $l-1$, σ — цикл длины k из S_k. Тогда универсальная алгебра $<A^k,+,[\ \ ]_{l,\sigma,k}>$ является ассоциативным $(2,l)$-кольцом.*

3.6. Следствие. *Пусть $<A,+,\times>$ — ассоциативное кольцо, $k\geq 2$, σ — цикл длины k из*

S_k. *Тогда универсальная алгебра* $< A^k, +, [\ \ ]_{k+1,\sigma,k} >$ *является ассоциативным* $(2, k+1)$-*кольцом.*

3.7. Следствие. *Пусть* $< A, +, \times >$ — *ассоциативное кольцо. Тогда универсальная алгебра* $< A^k, +, [\ \ ]_{k+1,(12\ldots k),k} >$ *является ассоциативным* $(2, k+1)$-*кольцом.*

3.8. Замечание. Если σ — нетождественная подстановка, а кольцо $< A, +, \times >$ содержит единицу и элемент, отличный от единицы, то по теореме 2.4 $(2, l)$-кольцо $< A^k, +, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ неабелево.

3.9. Замечание. Если ассоциативное кольцо $< A, +, \times >$ содержит единицу, то по теореме 2.8 ассоциативное $(2, l)$-кольцо $< A^k, +, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ является полуабелевым тогда и только тогда, когда абелево кольцо $< A, +, \times >$.

4 Регулярные l-арные полугруппы

После доклада автора на VI-ой Международной конференции FERT-2010 (Москва, 3 ноября 2010 г.) З.К. Силагадзе задал докладчику вопрос: *будет ли инверсной* l-*арная полугруппа* $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$, *если инверсна полугруппа* A*?*

Так как всякая инверсная полугруппа является регулярной, то вначале необходимо ответить на вопрос: *будет ли регулярной* l-*арная полугруппа* $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$, *если регулярна полугруппа* A*?*

Оба вопроса корректны, так как понятия регулярности и инверсности в теории l-арных полугрупп присутствуют и являются обобщениями соответствующих бинарных понятий.

В этом разделе ответим на второй вопрос.

Напомним, что элемент a — полугруппы A называется *регулярным*, если в A существует такой элемент x, что

$$axa = a. \tag{4}$$

Полугруппа A называется *регулярной*, если все ее элементы регулярны. Другими словами, полугруппа A регулярна, если в ней для любого $a \in A$ разрешимо уравнение (4) [15, с. 104; 16, с. 48].

Понятие регулярности переносится на n-арные полугруппы любой арности.

Элемент a n-арной полугруппы $< A, [\ \ ] >$ называется *регулярным*, если существуют такие элементы $x_1, \ldots, x_{2n-3} \in A$, что

$$[ax_1 \ldots x_{2n-3}a] = a. \tag{5}$$

n-Арная полугруппа $< A, [\ \ ] >$ называется *регулярной*, если все ее элементы регулярны [17]. Другими словами, n-арная полугруппа $< A, [\ \ ] >$ регулярна, если в ней для любого $a \in A$ разрешимо уравнение (5).

При $n \geq 3$ уравнение (5) разрешимо тогда и только тогда, когда разрешимо уравнение

$$[ax_1 \ldots x_{n-2}a] = a. \tag{6}$$

Поэтому в определении регулярного элемента и регулярной n-арной полугруппы при $n \geq 3$ вместо (5) можно рассматривать (6).

4.1. Лемма. *Для любого элемента* a *регулярной полугруппы* A *и любого* $k \geq 1$ *в* A *разрешимо уравнение*

$$ax_1 \ldots x_k a = a.$$

4.2. Предложение. *Если* A — *полугруппа,* σ — *подстановка из* S_k, *удовлетворяющая* *условию $\sigma^l = \sigma$, то элемент $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ является регулярным в l-арной полугруппе $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ тогда и только тогда, когда все его компоненты $a_1, \ldots, a_k$ регулярны в полугруппе A.*

Доказательство. *Необходимость.* Из регулярности $\mathbf{a}$ в $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ вытекает существование таких элементов

$$\mathbf{a}_2 = (a_{21}, \ldots, a_{2k}), \ldots, \mathbf{a}_{l-1} = (a_{(l-1)1}, \ldots, a_{(l-1)k}) \in A^k, \tag{7}$$

что

$$[\mathbf{a}\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{a}]_{l,\sigma,k} = \mathbf{a}, \tag{8}$$

откуда, используя теорему 2.5 и тождественность подстановки σ^{l-1}, получим

$$a_1 a_{2\sigma(1)} \ldots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)} a_1 = a_1, \ldots, a_k a_{2\sigma(k)} \ldots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)} a_k = a_k. \tag{9}$$

Таким образом, полагая

$$x_1 = a_{2\sigma(1)}, \ldots, a_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)}, \ \ldots, \ x_k = a_{2\sigma(k)}, \ldots, a_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)} \tag{10}$$

видим, что в полугруппе A разрешимы уравнения

$$a_1 x_1 a_1 = a, \ \ldots, \ a_k x_k a_k = a_k,$$

что означает регулярность в полугруппе A ее элементов $a_1, \ldots, a_k$.

Достаточность. Если $a_1, \ldots, a_k$ — регулярные элементы полугруппы A то ввиду леммы 4.1, в A существуют такие элементы (10), что выполняются равенства (9), откуда следует (8), где элементы $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{l-1}$ имеют вид (7). Таким образом, $\mathbf{a}$ — регулярный элемент в $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. Предложение доказано.

Предложение 4.2 позволяет сформулировать следующую теорему.

4.3. Теорема. *Пусть A — полугруппа, σ — подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда для регулярности l-арной полугруппы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ необходимо и достаточно, чтобы регулярной была полугруппа A.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что согласно теореме 2.7, универсальная алгебра $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ является l-арной полугруппой.

Достаточность. Если A — регулярная полугруппа, то все компоненты $a_1, \ldots, a_k$ произвольного элемента $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ регулярны в ней. Сам элемент $\mathbf{a}$ по предложению 4.2 является регулярным в $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$. Следовательно, $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ — регулярная l-арная полугруппа.

Необходимость. Пусть $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ — регулярная l-арная полугруппа, a — произвольный элемент из A, который можно рассматривать как компоненту, например первую, некоторого элемента $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$. Из регулярности этого элемента в $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, в силу предложения 4.2, вытекает регулярность элемента $a_1 = a$. Следовательно, полугруппа A регулярна. Теорема доказана.

4.4. Следствие. *Пусть A — регулярная полугруппа, k делит $l-1$, σ — цикл длины k из S_k. Тогда $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ — регулярная l-арная полугруппа.*

4.5. Следствие. *Пусть A — регулярная полугруппа, σ — цикл длины k из S_k. Тогда $< A^k, [\ ]_{k+1,\sigma,k} >$ — регулярная $(k+1)$-арная полугруппа.*

Полагая в следствии 4.5 $\sigma = (12 \ldots k) \in S_k$, получим

4.6. Следствие. *Если A — регулярная полугруппа, то $< A^k, [\ ]_{k+1,(12\ldots k),k} >$ — регулярная $(k+1)$-арная полугруппа.*

Так как полугруппы F_X — всех преобразований множества X, PF_X — всех частичных преобразований множества X, I_X — всех взаимно однозначных частичных преобразований множества X, B_X — всех бинарных отношений на множестве X регулярны [18, с. 34], то из теоремы 4.3 вытекает

4.7. Следствие. *Если подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< F_X^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, $< PF_X^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, $< I_X^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, $< B_X^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ — регулярные l-арные полугруппы.*

Напомним, что ассоциативное кольцо $< A, +, \times >$ называют регулярным [19, с. 337], если уравнение (4) разрешимо для любого $a \in A$. Иначе говоря, ассоциативное кольцо называют регулярным, если регулярна его мультипликативная полугруппа.

Ассоциативное $(2, l)$-кольцо $< A, +, [\ ] >$ назовем регулярным, если регулярна его полугруппа $< A, [\ ] >$.

Теоремы 3.4 и 4.3 позволяют сформулировать следующую теорему.

4.8. Теорема. *Пусть $< A, +, \times >$ — ассоциативное кольцо, σ — подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда для регулярности $(2, l)$-кольца $< A^k, +, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ необходимо и достаточно, чтобы регулярным было кольцо $< A, +, \times >$.*

Для теорем 4.7 и 4.8 можно сформулировать следствия, аналогичные следствиям 4.4 – 4.6.

Так как кольцо матриц над регулярным кольцом, в частности, над телом регулярно [19, с. 338], то из теоремы 4.8 вытекает

4.9. Следствие. *Пусть A — кольцо матриц над регулярным кольцом, в частности, над телом, σ — подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда $< A^k, +, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ — регулярное $(2, l)$-кольцо.*

Так как кольцо всех эндоморфизмов линейного пространства над телом регулярно [19, с. 338], то из теоремы 4.8 вытекает

4.10. Следствие. *Пусть A — кольцо всех эндоморфизмов линейного пространства над телом, σ — подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда $< A^k, +, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ — регулярное $(2, l)$-кольцо.*

5 Инверсные l-арные полугруппы

Для фиксированных элементов $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A$ элементарные трансляции

$$\varphi : x \to [a_1 \ldots a_{n-1} x],\ \psi : x \to [x a_1 \ldots a_{n-1}]$$

l-арной полугруппы $< S, [\ ] >$ называют ее *сдвигами*, соответственно *левым* и *правым*.

Регулярную l-арную полугруппу $< A, [\ ] >$ называют *инверсной* [17], если любые два ее идемпотентных сдвига перестановочны.

Это определение можно рассматривать как обобщение на l-арный случай определения инверсной полугруппы как регулярной полугруппы, в которой перестановочны любые два ее идемпотента [16, с.50].

5.1. Теорема. *Пусть A — полугруппа, σ — подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:*

1. *если A инверсна, то l-арная полугруппа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ также инверсна;*
2. *если l-арная полугруппа $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ инверсна и выполняется одно из следующих условий:*
   (a) *A — полугруппа с левым сокращением;*
   (b) *A — полугруппа с правым сокращением;*
   (c) *A обладает левой единицей;*

(d) *A обладает правой единицей,*

то полугруппа A также инверсна.

Доказательство.

1. Так как полугруппа A регулярна, то по теореме 4.3 $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ — регулярная l-арная полугруппа.

Так как любой правый сдвиг l-арной полугруппы перестановочен с любым ее левым сдвигом, то для доказательства инверсности l-арной полугруппы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ достаточно доказать перестановочность любых двух левых (правых) идемпотентных сдвигов.

Положим

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k),\ \mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{ik}),\ \mathbf{b}_i = (b_{i1}, \dots, b_{ik}),\ i = 1, \dots, l.$$

Если

$$\varphi_1 : \mathbf{x} \to [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{x}]_{l,\sigma,k},\ \varphi_2 : \mathbf{x} \to [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_{l-1}\mathbf{x}]_{l,\sigma,k}$$

— произвольные идемпотентные левые сдвиги l-арной полугруппы $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, то из равенств $\varphi_1\varphi_1 = \varphi_1$, $\varphi_2\varphi_2 = \varphi_2$ вытекает

$$[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{x}]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{x}]_{l,\sigma,k},$$

$$[\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_{l-1}\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_{l-1}\mathbf{x}]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_{l-1}\mathbf{x}]_{l,\sigma,k}.$$

Из последних двух равенств, используя определение l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ и тождественность подстановки σ^{l-1}, для любого $j = 1, \dots, k$ получим

$$a_{1j}a_{2\sigma(j)} \dots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}a_{1j}a_{2\sigma(j)} \dots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}x_j = a_{1j}a_{2\sigma(j)} \dots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}x_j,$$

$$b_{1j}b_{2\sigma(j)} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}b_{1j}b_{2\sigma(j)} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}x_j = b_{1j}b_{2\sigma(j)} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}x_j.$$

Из полученных равенств следуют равенства

$$a_ja_jx_j = a_jx_j,\ b_jb_jx_j = b_jx_j, \tag{11}$$

где

$$a_j = a_{1j}a_{2\sigma(j)} \dots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)},\ b_j = b_{1j}b_{2\sigma(j)} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}.$$

Каждый элемент полугруппы A, являясь регулярным, обладает и регулярной левой единицей и регулярной правой единицей [15, с. 106]. Обозначим через e_j регулярную правую единицу элемента a_j, а через ε_j — регулярную правую единицу элемента b_j. Так как элемент x_j может быть выбран в A произвольно, то из (11) вытекает

$$a_ja_je_j = a_je_j,\ b_jb_j\varepsilon_j = b_j\varepsilon_j,$$

откуда следует $a_ja_j = a_j$, $b_jb_j = b_j$, то есть a_j и b_j — идемпотенты в полугруппе A. А так как, ввиду инверсности A, $a_jb_j = b_ja_j$, то

$$a_{1j}a_{2\sigma(j)} \dots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}b_{1j}b_{2\sigma(j)} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}x_j =$$

$$= b_{1j}b_{2\sigma(j)} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}a_{1j}a_{2\sigma(j)} \dots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}x_j,$$

для любого $j = 1, \dots, k$. Снова, используя определение l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ и тождественность подстановки σ^{l-1}, получаем

$$[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_{l-1}\mathbf{x}]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_{l-1}\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{x}]_{l,\sigma,k},$$

откуда $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1$, то есть идемпотентные левые сдвиги φ_1 и φ_2 перестановочны. Если теперь

$$\psi_1 : \mathbf{x} \to [\mathbf{x}\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k},\ \psi_2 : \mathbf{x} \to [\mathbf{x}\mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{b}_l]_{l,\sigma,k}$$

— произвольные идемпотентные правые сдвиги l-арной полугруппы $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$, то, рассуждая аналогично предыдущему, получим

$$x_j a_{2\sigma(j)} \ldots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} a_{lj} a_{2\sigma(j)} \ldots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} a_{lj} = x_j a_{2\sigma(j)} \ldots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} a_{lj},$$

$$x_j b_{2\sigma(j)} \ldots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} b_{lj} b_{2\sigma(j)} \ldots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} b_{lj} = x_j b_{2\sigma(j)} \ldots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} b_{lj},$$

для любого $j = 1, \ldots, k$, откуда

$$x_j c_j c_j = x_j c_j,\ x_j d_j d_j = x_j d_j, \tag{12}$$

где

$$c_j = a_{2\sigma(j)} \ldots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} a_{lj},\ d_j = b_{2\sigma(j)} \ldots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} b_{lj}.$$

Подставляя вместо x_j в первое равенство из (12) регулярную левую единицу элемента c_j, а во второе равенство из (12) — регулярную левую единицу элемента d_j, получим идемпотентность, а значит и перестановочность элементов c_j и d_j. Поэтому

$$x_j a_{2\sigma(j)} \ldots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} a_{lj} b_{2\sigma(j)} \ldots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} b_{lj} =$$

$$= x_j b_{2\sigma(j)} \ldots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} b_{lj} a_{2\sigma(j)} \ldots a_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} a_{lj},$$

откуда

$$[\mathbf{x}\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l \mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{b}_l]_{l,\sigma,k} = [\mathbf{x}\mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{b}_l \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_l]_{l,\sigma,k}.$$

Следовательно, $\psi_1\psi_2 = \psi_2\psi_1$, то есть идемпотентные правые сдвиги ψ_1 и ψ_2 перестановочны.

2. Так как l-арная полугруппа $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ регулярна, то по теореме 4.3 A — регулярная полугруппа.

   Для любых идемпотентов a и b и любых элементов $x_1, \ldots, x_k$ этой регулярной полугруппы положим

$$\mathbf{a} = (\underbrace{a, \ldots, a}_{k}),\ \mathbf{b} = (\underbrace{b, \ldots, b}_{k}),\ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k),$$

$$\tau_1 : \mathbf{x} \to [\underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{l-1}\mathbf{x}]_{l,\sigma,k},\ \tau_2 : \mathbf{x} \to [\underbrace{\mathbf{b} \ldots \mathbf{b}}_{l-1}\mathbf{x}]_{l,\sigma,k}.$$

   Ввиду идемпотентности a и b, для любого $j = 1, \ldots, k$ верно

$$aax_j = ax_j,\ bbx_j = bx_j,$$

   откуда вытекает

$$\underbrace{a \ldots a}_{l-1}\underbrace{a \ldots a}_{l-1}x_j = \underbrace{a \ldots a}_{l-1}x_j,\ \underbrace{b \ldots b}_{l-1}\underbrace{b \ldots b}_{l-1}x_j = \underbrace{b \ldots b}_{l-1}x_j,$$

   а затем

$$[\underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{l-1}\underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{l-1}\mathbf{x}]_{l,\sigma,k} = [\underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{l-1}\mathbf{x}]_{l,\sigma,k},\ [\underbrace{\mathbf{b} \ldots \mathbf{b}}_{l-1}\underbrace{\mathbf{b} \ldots \mathbf{b}}_{l-1}\mathbf{x}]_{l,\sigma,k} = [\underbrace{\mathbf{b} \ldots \mathbf{b}}_{l-1}\mathbf{x}]_{l,\sigma,k}.$$

Следовательно,

$$\tau_1\tau_1 = \tau_1,\ \tau_2\tau_2 = \tau_2,$$

то есть τ_1 и τ_2 — идемпотентные левые сдвиги инверсной l-арной полугруппы $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$.

А так как в инверсной l-арной полугруппе $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$, то

$$[\underbrace{\mathbf{a}\ldots\mathbf{a}}_{l-1}\underbrace{\mathbf{b}\ldots\mathbf{b}}_{l-1}\mathbf{x}]_{l,\sigma,k} = [\underbrace{\mathbf{b}\ldots\mathbf{b}}_{l-1}\underbrace{\mathbf{a}\ldots\mathbf{a}}_{l-1}\mathbf{x}]_{l,\sigma,k},$$

откуда для любого $j = 1, \ldots, k$ верно

$$\underbrace{a\ldots a}_{l-1}\underbrace{b\ldots b}_{l-1}x_j = \underbrace{b\ldots b}_{l-1}\underbrace{a\ldots a}_{l-1}x_j.$$

Так как a и b — идемпотенты, то из последних равенств получаем

$$abx_j = bax_j. \tag{13}$$

Аналогично доказывается равенство

$$x_jab = x_jba. \tag{14}$$

Если верно b) или d), то из (13) вытекает $ab = ba$.

Если верно a) или c), то из (14) вытекает $ab = ba$.

Таким образом, идемпотенты a и b перестановочны. Теорема доказана.

5.2. Замечание. Можно было доказать 2) в теореме 5.1, рассматривая идемпотентные правые сдвиги l-арной полугруппы $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$.

Из теоремы 5.1 следует положительный ответ на вопрос З.К. Силагадзе, сформулированный в начале предыдущего раздела. Более того, перенос инверсности осуществляется не только с полугруппы A на l-арную полугруппу $< A^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$, но и в обратном направлении, если в полугруппе A выполняется одно из условий a) – d).

Так как I_X — инверсная полугруппа [18, с. 35], то из теоремы 5.1 вытекает

5.3. Следствие. *Если подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< I_X^k, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ — инверсная l-арная полугруппа.*

6 Регулярные матричные $(2, l)$-кольца

Обозначим через $M(n, k, F)$ множество всех упорядоченных наборов $(A_1, \ldots, A_k)$ матриц $A_1, \ldots, A_k$ порядка n над ассоциативным кольцом F. Э. Пост рассматривал такие наборы над полем комплексных чисел, причем все компоненты, рассматривавшихся Э. Постом наборов, являлись невырожденными матрицами [7].

Ясно, что множество $M(n, k, F)$ совпадает с k-ой декартовой степенью множества $M(n, F)$ всех квадратных матриц порядка n над кольцом F:

$$M(n, k, F) = \underbrace{M(n, F) \times \ldots \times M(n, F)}_{k}.$$

А так как множества $M(n, F)$ всех квадратных матриц порядка n над ассоциативным кольцом F является ассоциативным кольцом относительно операции $+$ — сложения матриц и $\times$ — умножение матриц, то ввиду теоремы 3.4, имеет место

6.1. Предложение. *Пусть F — ассоциативное кольцо, σ — подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда универсальная алгебра $< M(n, k, F), +, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ является ассоциативным $(2, l)$-кольцом.*

Как уже отмечалось, кольцо $M(n, F)$ над регулярным кольцом F регулярно. Поэтому, ввиду теоремы 4.8, имеет место

6.2. Теорема. *Пусть F — регулярное кольцо, σ — подстановка из S_k, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда $< M(n, k, F), +, [\ \ ]_{l,\sigma,k} >$ — регулярное $(2, l)$-кольцо.*

Заметим, что теорема 6.2 — это иная формулировка следствия 4.9.

Литература

[1] Гальмак А.М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях // *Весці НАН Беларусі*, №3, 2008, с. 28–34.

[2] Гальмак А.М. Полиадические операции на декартовых степенях // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике.*, №1, 2008, с. 112–139.

[3] Гальмак А.М. Многоместные операции на декартовых степенях // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике.*, №2, 2008, с. 172–192.

[4] Гальмак А.М. Об n-арных операциях на декартовых степенях n-арных группоидов // *Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова.*, № 2-3(33), 2009, с. 172–178.

[5] Гальмак А.М. Многоместные операции на декартовых степенях. Минск: Изд. центр БГУ, 2009, 265 с.

[6] Гальмак А.М. Об операции $[\ \ ]_{l,\sigma,k}$ // *Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова.*, № 1(35), 2010, с. 34–38.

[7] Post E.L. Polyadic groups // *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 48, №2, 1940, pp. 208–350.

[8] Гальмак А.М. n-Арные группы. Часть 1. Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины, 2003, 202с.

[9] Гальмак А.М. n-Арные группы. Часть 2. Минск, Изд. центр БГУ, 2007, 324с.

[10] Гальмак А.М. n-Арные группы // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике.*, Москва, №1, 2007, с. 112–139.

[11] Čupona G. On $[m, n]$-rings / G. Čupona // *Bull. Soc. math. phys. Mased.*, Vol. 16, 1965, pp. 5–10.

[12] Crombez G. On (n, m)-rings // *Abh. Math. Sem. Univ.*, Vol. 37, 1972, pp. 180–199.

[13] Никитин А.Н. Радикал Джекобсона артиновых $(2, n)$-кольца. // *Вестн. Моск. ун-та: Сер. 1. — Математика. Механика.*, №4, 1984, с. 18–22.

[14] Никитин А.Н. Полупростые артиновы $(2, n)$-кольца // *Вестн. Моск. ун-та: Сер. 1. — Математика. Механика.*, №6, 1984, с. 3–7.

[15] Ляпин Е.С. Полугруппы. М., Физматлит, 1960, 592 с.

[16] Клиффорд А. Алгебраическая теория полугрупп. М., Мир, 1972, 285 с.

[17] Колесников О.В. Полиадические полугруппы. Препринт. Деп. в ВИНИТИ, №2079-77 Деп., 1977, 28 с.

[18] Шеврин Л.Н. Полугруппы. Общая алгебра. Т. 2. М., Наука, 1991, с. 11–191.

[19] Скорняков Л.А. Кольца и модули. Общая алгебра. Т. 1. М., Наука, 1990, с. 291–561.

[20] Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. М., Наука, 1983, 272 с.

POLYADIC OPERATIONS ON THE CARTESIAN POWERS OF GROUPOIDS, SEMIGROUPS AND RINGS

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technology, Belarus

mgup@mogilev.by

Previously was shown [2] that for any numbers $n \geq 3$, $s \geq 1$, $m \geq 2$, on the Cartesian powers A^{n-1} and $A^{m(n-1)}$ of the semigroup A, are respectively defined the $(s(n-1)+1)-$ary operation $[\ ]_{s(n-1)+1,n-1}$, and the $n-$ary operation $[\ ]_{n,m,m(n-1)}$. Also was shown that for any three integers $k \geq 2$, $l \geq 2$ and $m \geq 1$, and any permutation $\sigma \in S_k$ on the Cartesian power B^{mk} of the set B, is defined an $l-$nary relation $[\ ]_{l,\sigma,m,mk}$. In the present paper studies concerning the polyadic operations on the cartesian powers of universal algebras are continued.

Key Words: polyadic operation, groupoid, semigroup, rings.