

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛОКАЛЬНО АНИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

В. Балан¹, Г.Ю. Богословский^{2,3}, С.С. Кокарев^{3,4}, Д.Г. Павлов³,
С.В. Сипаров^{3,5}, Н. Войку⁶

¹ Политехнический университет, Бухарест, Румыния

² НИИ Ядерной физики МГУ, Москва, Россия

³ НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия

⁴ Российский научно-образовательный центр "Логос", Ярославль, Россия

⁵ Государственный университет гражданской авиации, Санкт-Петербург, Россия

⁶ Трансильванский университет, Брашов, Румыния

vladimir.balan@upb.ro, bogoslov@theory.sinp.msu.ru, logos-center@mail.ru, geom2004@mail.ru,
sergey@siparov.ru, nico.brinzei@unitbv.ro

В последнее время в литературе широко обсуждается проблема нарушения лоренцевой симметрии, причем, в дополнение к исследованиям, посвященным построению феноменологически нацеленных эффективных полевых теорий, все большую популярность приобретают исследования, основанные на финслеровых геометрических моделях пространства-времени. Финслеров подход к проблеме нарушения лоренцевой симметрии отличается тем, что в его рамках нарушение лоренцевой симметрии происходит без нарушения релятивистской симметрии. Сохранение релятивистской симметрии служит, в частности, жестким критерием жизнеспособности для любой лоренц-неинвариантной эффективной полевой теории. Хотя по своему характеру данная статья является обзорной, в ней, за небольшим исключением, отражены лишь те результаты по финслерову расширению теории относительности, в получении которых авторы статьи приняли непосредственное участие.

Ключевые слова: Лоренц-, Пуанкаре- и калибровочная симметрия, спонтанное нарушение симметрий, альтернативные теории гравитации, анизотропное пространство-время, финслерова дифференциальная геометрия.

1 Введение

Программа геометризации и алгебраизации фундаментальных физических законов природы, намеченная на первоначальном этапе развития теории относительности и квантовой теории, остается на сегодняшний день в значительной степени нереализованной. Любое продвижение в этой программе связано с частичным или полным пересмотром общепринятых понятий и свойств тех физических объектов, которые они выражают. Множество базовых концепций современной физики и математики заключено в понятии многообразия, которое выражает возможность универсальной арифметизации событий физического мира вместе с различными отношениями между ними, и представляет собой глубокий симбиоз геометрических и алгебраических идей.

Несмотря на довольно абстрактный характер тех многообразий, которые изучаются в современной физике и математике, и множество дополнительных структур, которыми они снабжаются для максимально полного геометрического описания законов природы, часть структур по ряду причин остается довольно консервативной. В первую очередь, речь идет о метризованных многообразиях и метрике на них, которая в локальной версии описывается метрическим тензором, определяющим в каждой точке скалярное произведение векторов из касательного к этой точке пространства. Иными словами, подавляющее большинство современных геометрических моделей оперирует метрическим тензором, как функцией на касательном расслоении, которая в каждой координатной карте зависит от

координат базы произвольным гладким образом, а от координат слоя зависит билинейно. Несмотря на тот факт, что математикам давно известно обобщение этой конструкции, которое оформилось в отдельную науку — финслерову геометрию [1-3], описывающую локально анизотропные пространства, первая жизнеспособная финслерова модель пространства-времени [4] и опирающаяся на нее специальная релятивистская теория локально анизотропного пространства-времени [5, 6] были предложены значительно позже. Эти работы были мотивированы высказанной к тому времени и ставшей только теперь широко популярной идеей [7] нарушения лоренцевой симметрии, а значит и соответствующего отклонения "истинной" метрики плоского пространства-времени от метрики Минковского.

Вообще говоря, обсуждение анизотропии пространства-времени требует ясно указать, в чем состоит необходимость такого обсуждения, т.е. каковы его физические предпосылки, и в чем состоит предполагаемая анизотропия. Второй вопрос подразумевает, что геометрия в математике соответствует теории измерений в физике, и когда мы говорим, например, о кривизне пространства-времени, то всегда имеем в виду, что она проявит себя в результате измерений. Если мы имеем в виду физические приложения геометрических построений, то это же должно относиться и к анизотропии. Говорить о кривизне или анизотропии пустого пространства можно только, либо полностью выходя за рамки экспериментальной науки, либо указывая характерный масштаб применимости теоретических рассуждений. Последнее означает, что когда необходимость исследования анизотропии пространства-времени будет выявлена, следует указать её источник.

Ответ на первый вопрос менее очевиден и более обширен с точки зрения анализа ситуации, сложившейся в физике (см. [8], а также приведенные ниже дополнительные соображения на этот счет). Результат такого анализа имеет общую и конкретную стороны. Общий вывод указывает на то, что теория гравитации, т.е. ОТО, разработанная и успешно применяемая на масштабах, характерных для планетных систем, при её известных приложениях на космологических масштабах требует введения поправок, в 25 раз превосходящих массу наблюдаемой Вселенной и связанных с существованием новых (пока неизвестных) субстанций, а именно — темной материи и темной энергии, которые изначально в этой теории не предусматриваются. Очевидно, что вместе с их поиском следует убедиться в состоятельности моделей, используемых в теории. К ним относятся так называемый простейший скаляр, который используется в выражении для действия Гильберта-Эйнштейна, т.е. скалярная кривизна, геометрия, используемая для описания пространства-времени, т.е. геометрия Римана, и само 4-мерное пространство-время, используемое как основа описания физической реальности.

Важнейшими наблюдениями, имеющими простой смысл, значительную величину и статистическую достоверность, но противоречащими классической ОТО, не имеющей указанных поправок, являются плоские кривые вращения спиральных галактик. Попытки изменения теории для их адекватного описания, основанные на усложнениях [9, 10] или изменении [11] скаляра, а также на изменении вида метрики [12], оказались либо недостаточно последовательными ($f(R)$ -теории), либо также потребовали введения нового неизвестного скалярного поля или нового неизвестного взаимодействия. Ковариантное обобщение [13] феноменологической теории МОНД [14], требующей произвольного изменения уравнения динамики или выражения для гравитационной силы для удовлетворительного описания наблюдаемых явлений на галактических масштабах, свелось к введению нового скалярного поля.

Конкретный вывод анализа состоит в том, что необходимо сделать следующий шаг и исследовать возможность использования для интерпретации наблюдений другой тип геометрии. Естественными обобщениями геометрии Римана являются геометрии Финслера и Лагранжа, которые учитывают зависимость метрического тензора от направления в

данной точке. Это направление может быть глобальным, что соответствует, например, одной из геометрий, построенных на коммутативно-ассоциативной алгебре, а именно — геометрии Бервальда-Моора. Если использовать метрику Бервальда-Моора для интерпретации теории гравитации, то в теории возникает фиксированное число стационарных глобальных источников кривизны, природа которых в общем случае неясна. Если же это направление является локальным, то интерпретация может соответствовать учету движения локальных источников кривизны. Последнее представляется обоснованным, поскольку общие черты полевых теорий гравитации и электродинамики с точки зрения Лоренц-инвариантности и закона обратных квадратов для сил были отмечены давно, и соответствующие попытки обобщения, использующие понятия токов массы, предпринимались [15,16], а общая геометрическая основа обеих теорий обсуждалась в [17]. Тем не менее гравитоэлектромагнетизм [16] представляется недостаточно самосогласованным подходом, поскольку с гравитационными зарядами нельзя обходиться так же, как с электрическими: первые являются источниками кривизны, а вторые — нет. Вместо того чтобы вводить силу Лоренца, следуя формальной аналогии, необходимо потребовать, чтобы в случае гравитации метрика стала анизотропной, что приведет к возникновению зависимости гравитационной силы от скорости тела и от векторного поля, обусловленного движением источников кривизны. На это же указывает и буквальная формулировка принципа эквивалентности, поскольку силы инерции могут зависеть от скорости явно и быть при этом значительными, а обычные релятивистские поправки, интерпретируемые как зависимости сил от скоростей, являются малыми. Последнее связано с рассмотрением задач типа Шварцшильда, которые не соответствуют задачам космологического масштаба, в частности, непригодны для описания динамики спиральных галактик, проявляющейся в наблюдениях.

Касаясь мотивационных аспектов исследований, посвященных финслеровой геометрической структуре пространства-времени, нельзя не отметить, что вся совокупность современных астрофизических данных, включающая, разумеется, анизотропию ускоренного расширения Вселенной и анизотропию реликтового излучения, лишь косвенно указывает на анизотропию пространства-времени. То же можно, например, сказать о проблеме барионной асимметрии, нарушении дискретных пространственно-временных симметрий в слабых взаимодействиях, о проблеме с аномальным магнитным моментом мюона и т.д. На этом фоне важную роль приобретают результаты, полученные в двух новых независимых лабораторных экспериментах, которые непосредственно указывают на существование пространственно-временной анизотропии.

В первом [18] из отмеченных экспериментов, с помощью прецизионной атомной интерферометрии был измерен фазовый сдвиг свободно падающих атомов и таким образом обнаружено превосходящее 2 стандартные ошибки нарушение локальной лоренцевой симметрии или, другими словами, существование анизотропного конденсата неизвестной природы, который из-за взаимодействия с гравитационным полем нарушает центральную симметрию гравитационного потенциала. В отношении же второго эксперимента нужно сказать следующее.

Недавно на Большом Адронном Коллайдере (ЛHC) было обнаружено новое явление [19], которое теперь известно как Ridge/CMS-эффект (аббревиатура CMS означает как название детектора — Компактный Мюонный Соленоид, так и название соответствующей исследовательской коллаборации). Суть этого эффекта состоит в том, что для событий с большой множественностью, т.е. когда в протон-протонных столкновениях с полной энергией 7 ТэВ образуется более чем 100 частиц, плоскости, в которых лежат треки любой пары из образовавшихся заряженных частиц, оказываются сориентированными таким образом, что преимущественно имеют общую линию пересечения, совпадающую с осью столкновения исходных протонов. Это напоминает ситуацию с упругим рассеянием движущейся частицы на первоначально покоящейся: из-за закона сохранения полного

импульса (равного импульсу налетающей частицы), все возможные плоскости, в которых лежат треки двух частиц после рассеяния, имеют общую линию пересечения, совпадающую с треком налетающей частицы. Однако, в отличие от упругого рассеяния на покоящейся частице, нетривиальность Ridge/CMS-эффекта заключается в том, что исходный полный импульс сталкивающихся протонов равен нулю. В рамках обычных представлений, именно это обстоятельство, а также тот факт, что Ridge/CMS-эффект характерен только для событий с большой множественностью, очень затрудняет выяснение физической природы выделенного направления, возникающего при рождении ста и более частиц и совпадающего с осью столкновения протонов.

События с большой множественностью рожденных частиц происходят, очевидно, в случае "лобового" столкновения исходных протонов. При этом плотность энергии в момент столкновения становится соизмеримой с той, которая была во Вселенной в первые миллисекунды после Большого Взрыва, когда вместо адронов существовала еще кварк-глюонная плазма. Ясно также, что, рассматривая множественное рождение частиц в протон-протонных столкновениях, нельзя не учитывать фазовые переходы с нарушением высших калибровочных симметрий, которые сопровождаются перестройкой вакуума. Конденсат, возникающий в результате такой перестройки, является локально изотропным (хиггсовским) только в рамках обычной релятивистской теории. В релятивистской теории с нарушенной лоренцевой симметрией или, другими словами, в анизотропной теории относительности, о которой речь пойдет ниже, роль хиггсовского конденсата играет аксиально-симметричный анизотропный фермион-антифермионный конденсат. Помимо него, при адронизации и быстром охлаждении кварк-глюонной плазмы, может возникать полностью анизотропный трехглюонный конденсат. С одной стороны, квантово-полевой вакуум, включающий анизотропный конденсат, является физическим носителем локальной анизотропии пространства-времени и его можно рассматривать в качестве анизотропной квинтэссенции, а с другой — он придает всем частицам свойства квазичастиц в кристаллической среде. В частности, помимо энергии покоя, у частиц возникает еще и импульс покоя. Применительно к Ridge/CMS-эффекту это означает, что в системе центра масс сталкивающихся протонов, т.е. относительно лаборатории, полный импульс образующейся первичной плазмы оказывается отличным от нуля и лежащим на оси столкновения (из-за анизотропии конденсата, спонтанно возникающей вдоль оси столкновения). Именно поэтому, в конечном счете, корреляция парных треков в CMS эксперименте получилась такой, что плоскости, которым принадлежат эти треки, преимущественно пересекаются на оси столкновения протонов.

Таким образом, Ridge/CMS-эффект напрямую говорит о том, что в ранней Вселенной спонтанно возникла аксиально-симметричная локальная анизотропия пространства-времени с группой $DISIM_b(2)$ в качестве неоднородной группы локальной релятивистской симметрии и с соответствующей финслеровой метрикой. Что касается возможности спонтанного возникновения полной локальной анизотропии пространства-времени с абелевой однородной группой локальной релятивистской симметрии и с соответствующей обобщенной финслеровой метрикой Бервальда-Моора, ответ на этот вопрос будет зависеть от поведения трехчастичной корреляционной функции, измерение которой уже запланировано коллаборацией CMS.

В следующем, втором разделе мы рассмотрим релятивистскую финслерову $DISIM_b(2)$ -инвариантную модель плоского пространства-времени с частично нарушенной изотропией 3D пространства. При этом будет показано, что в рамках такой модели физическим носителем анизотропии плоского пространства-времени служит аксиально-симметричный нейтрин-антинейтринный конденсат, а сама модель, лежащая в основе анизотропной специальной теории относительности, допускает естественное обобщение на случай искривленного пространства-времени и финслерова расширения ОТО. Упомяну-

тое здесь финслерово расширение ОТО с необходимостью приводит к существованию, как минимум, одного векторного калибровочного поля и его взаимодействия с сохраняющимся током массы покоя. Целый ряд астрофизических эффектов подобного взаимодействия подробно изучен в рамках предложенной С.В. Сипаровым модели 8-мерного фазового пространства-времени, одна из координат которого имеет постоянное значение. Этой модели и описанию соответствующих эффектов посвящен раздел 3 данного обзора. Во втором же разделе, помимо плоского пространства-времени с частично нарушенной изотропией 3D пространства, кратко рассмотрено трехпараметрическое семейство плоских финслеровых пространств с полностью нарушенной 3D изотропией и с абелевой трехпараметрической группой релятивистской симметрии. Абелева структура группы релятивистской симметрии послужила отправной точкой для более глубокого изучения финслерова пространства Бервальда-Моора, которое в четырехмерном случае принадлежит указанному семейству. В разделе 4 рассмотрены геометрические, алгебраические и физические аспекты ассоциативно-коммутативных алгебр и связанных с ними геометрий Бервальда-Моора различных размерностей. В течение последних лет исследования подобного рода проводились в рамках программы международного сотрудничества между Румынской Академией и Академией наук Российской Федерации. В частности, благодаря работам румынских геометров под руководством профессора В. Балана, результаты, касающиеся алгебраической стороны теории метрик Бервальда-Моора различных размерностей, удалось дополнить специфическими результатами из области современной дифференциальной геометрии Финслеровых пространств. Их концентрированное изложение можно найти в завершающем пятом разделе данного обзора.

2 Релятивистски инвариантные финслеровы пространства с нарушенной локальной лоренцевой симметрией

Как известно, в рамках ОТО пространство-время является римановым, причем распределение и движение материи определяет только его локальную кривизну, никак не влияя на геометрию касательных пространств. Другими словами, независимо от свойств материальной среды, заполняющей риманово пространство-время, любое плоское касательное пространство-время остается пространством событий СТО, т.е. пространством Минковского с его лоренцевой симметрией, которая обычно отождествляется с релятивистской симметрией.

Вместе с тем в последнее время в литературе наблюдается повышенный интерес к проблеме нарушения лоренцевой симметрией. Особенно широко обсуждается струнно-мотивированный подход к этой проблеме.

Дело в том, что даже если исходная единая теория взаимодействий является лоренц-симметричной на наиболее фундаментальном уровне, эта симметрия может быть спонтанно нарушена из-за образования конденсата векторного или (например) тензорного поля. Появление такого конденсата, или постоянного классического поля на фоне пространства Минковского, подразумевает, что он может воздействовать на динамику фундаментальных полей и тем самым модифицировать Стандартную Модель сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий. Поскольку постоянное классическое поле преобразуется при пассивных преобразованиях как лоренцев вектор или тензор, его влияние на динамику фундаментальных полей Стандартной Модели описывается введением в Стандартный лагранжиан дополнительных членов, представляющих собой все возможные лоренц-ковариантные свертки конденсата со Стандартными фундаментальными полями. Феноменологическая теория, основанная на такой лоренц-ковариантной модификации Стандартной Модели называется the Standard Model Extension (SME) [20-22].

По своей конструкции, феноменологическая теория SME не является лоренц-инвари-

антной, т.к. её лагранжиан не остается инвариантным при активных лоренцевых преобразованиях фундаментальных полей на фоне фиксированного конденсата. Кроме того, в контексте SME, нарушение лоренцевой симметрии подразумевает также нарушение и релятивистской симметрии, поскольку присутствие неинвариантного конденсата нарушает физическую эквивалентность различных инерциальных систем отсчета.

К сказанному нужно добавить, что в низкоэнергетическом пределе гравитационных теорий с нарушенной лоренцевой и релятивистской симметрией появляется неограниченное число возможностей для построения различных эффективных полевых теорий, каждая из которых потенциально способна объяснить по крайней мере некоторые из недавно открытых астрофизические явления (см., например, [23]).

Сам факт существования финслеровых геометрических моделей пространства-времени, в рамках которых нарушение лоренцевой симметрии происходит без нарушения релятивистской симметрией, сильно ограничивает возможные эффективные полевые теории с нарушенной лоренцевой симметрией: чтобы оказаться жизнеспособными, такие теории, несмотря на нарушенную лоренцеву симметрию, должны обладать свойством релятивистской инвариантности.

Поскольку только два типа финслеровых пространств с нарушенной лоренцевой симметрией являются релятивистски инвариантными [24], рассмотрим сначала финслеровы пространства первого типа.

2.1 Релятивистски инвариантные финслеровы пространства с частично нарушенной 3D изотропией

Метрика таких пространств, предложенная в [4], имеет следующий вид

$$ds^2 = \left[\frac{(dx_0 - \boldsymbol{\nu} d\mathbf{x})^2}{dx_0^2 - d\mathbf{x}^2} \right]^r (dx_0^2 - d\mathbf{x}^2). \quad (1)$$

Эта метрика зависит от двух постоянных параметров r и $\boldsymbol{\nu}$ и обобщает метрику Минковского, причем r определяет величину пространственной анизотропии, характеризуя тем самым степень отклонения (1) от метрики Минковского. Вместо 3-параметрической группы вращений пространства Минковского, финслеровы пространства (1) допускают только 1-параметрическую группу вращений вокруг единичного вектора $\boldsymbol{\nu}$, который указывает физически выделенное направление в 3D пространстве. С трансляционной симметрией никаких изменений не происходит: пространственно-временные трансляции оставляют метрику (1) инвариантной (в связи с этим, естественно рассматривать семейство пространств (1) как семейство плоских финслеровых пространств). Что касается преобразований, связывающих различные инерциальные системы отсчета, обычные лоренцевы бусты конформно видоизменяют метрику (1). Поэтому они не принадлежат группе изометрий этой метрики. Однако, используя их, можно построить такие преобразования [5], которые входят в группу изометрий метрики (1). Соответствующие обобщённые преобразования Лоренца (обобщенные лоренцевы бусты) выглядят следующим образом

$$x'^i = D(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}) R_j^i(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}) L_k^j(\mathbf{v}) x^k, \quad (2)$$

где: \mathbf{v} обозначает скорости движущихся (штрихованных) систем отсчета, матрицы $L_k^j(\mathbf{v})$ представляют обычные лоренцевы бусты, матрицы $R_j^i(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu})$ — дополнительные повороты пространственных осей движущихся систем вокруг векторов $[\mathbf{v} \boldsymbol{\nu}]$ на углы

$$\varphi = \arccos \left\{ 1 - \frac{(1 - \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2})[\mathbf{v} \boldsymbol{\nu}]^2}{(1 - \mathbf{v} \boldsymbol{\nu}/c) \mathbf{v}^2} \right\}$$

релятивистской аберрации вектора $\boldsymbol{\nu}$ и, наконец, диагональные матрицы

$$D(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}) = \left(\frac{1 - \mathbf{v}\boldsymbol{\nu}/c}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right)^r I$$

представляют дополнительные дилатационные преобразования координат событий.

В отличие от обычных лоренцевых бустов, обобщённые бусты (2) составляют 3-параметрическую некомпактную группу с генераторами X_1, X_2, X_3 . Таким образом, с включением 1-параметрической группы вращений вокруг выделенного направления $\boldsymbol{\nu}$ и 4-параметрической группы трансляций, неоднородная группа изометрий или, другими словами, неоднородная группа релятивистской симметрии плоских финслеровых пространств (1) оказывается 8-параметрической. Чтобы получить простейшее представление для её генераторов, достаточно направить третью пространственную ось вдоль $\boldsymbol{\nu}$ и переписать преобразования (2) в инфинитезимальной форме. В результате мы приходим к следующим восьми генераторам

$$\begin{aligned} X_1 &= -(x^1 p_0 + x^0 p_1) - (x^1 p_3 - x^3 p_1), \\ X_2 &= -(x^2 p_0 + x^0 p_2) + (x^3 p_2 - x^2 p_3), \\ X_3 &= -r x^i p_i - (x^3 p_0 + x^0 p_3), \\ R_3 &= x^2 p_1 - x^1 p_2; \\ p_i &= \partial / \partial x^i. \end{aligned} \quad (3)$$

Согласно [5], эти генераторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [X_1 X_2] &= 0, & [R_3 X_3] &= 0, \\ [X_3 X_1] &= X_1, & [R_3 X_1] &= X_2, \\ [X_3 X_2] &= X_2, & [R_3 X_2] &= -X_1; \\ [p_i p_j] &= 0; \\ [X_1 p_0] &= p_1, & [X_2 p_0] &= p_2, & [X_3 p_0] &= r p_0 + p_3, & [R_3 p_0] &= 0, \\ [X_1 p_1] &= p_0 + p_3, & [X_2 p_1] &= 0, & [X_3 p_1] &= r p_1, & [R_3 p_1] &= p_2, \\ [X_1 p_2] &= 0, & [X_2 p_2] &= p_0 + p_3, & [X_3 p_2] &= r p_2, & [R_3 p_2] &= -p_1, \\ [X_1 p_3] &= -p_1, & [X_2 p_3] &= -p_2, & [X_3 p_3] &= r p_3 + p_0, & [R_3 p_3] &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда видно, что однородная группа изометрий плоских финслеровых пространств с частично нарушенной 3D изотропией содержит четыре параметра (генераторы X_1, X_2, X_3 и R_3). Являясь подгруппой 11-параметрической группы Вейля [25], она изоморфна соответствующей 4-параметрической подгруппе (с генераторами $X_1, X_2, X_3|_{r=0}$ и R_3) однородной группы Лоренца. Так как 6-параметрическая однородная группа Лоренца не имеет ни одной 5-параметрической подгруппы, в то время как её 4-параметрическая подгруппа является с точностью до изоморфизмов единственной [26], переход от пространства Минковского к финслеровым пространствам (1) подразумевает минимально возможное нарушение лоренцевой симметрии. При этом релятивистская симметрия, представленная теперь обобщёнными лоренцевыми бустами (2), остается в силе [27].

Здесь полезно обратить внимание на следующее обстоятельство. Несмотря на тот факт, что при $r = 0$ финслерова метрика (1) сводится к метрике Минковского $ds^2 = dx_0^2 - d\mathbf{x}^2$, 3-параметрические некомпактные преобразования (2), служащие однородными преобразованиями релятивистской симметрии финслеровой метрики (1), не сводятся к обычным лоренцевым бустам $x^i = L_k^i(\mathbf{v})x^k$, а сводятся к преобразованиям

$$x^i = R_j^i(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}) L_k^j(\mathbf{v}) x^k, \quad (5)$$

которые отличаются от них дополнительными доворотами $x^i = R_k^i(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu})x^k$ пространственных осей. Эти довороты устроены таким образом, что, если луч света в одной инерциальной системе отсчета имеет направление $\boldsymbol{\nu}$, то такое же направление он будет иметь во всех инерциальных системах.

Таким образом, при $r = 0$, т.е. в рамках СТО преобразования (5) представляют собой альтернативу лоренцевым бустам, однако, в отличие от лоренцевых бустов, они при любом значении $\boldsymbol{\nu}$ составляют 3-параметрическую некомпактную подгруппу 6-параметрической однородной группы Лоренца. Как было отмечено в [27], чтобы физически реализовать такие преобразования, достаточно в качестве $\boldsymbol{\nu}$ выбрать направление на какую-нибудь звезду и затем выполнить произвольный лоренцев буст, дополнив его таким поворотом пространственных осей, чтобы относительно новой системы отсчета направление на звезду не изменилось. Во всей своей совокупности описанные преобразования как раз и составляют указанную подгруппу (5) 6-параметрической однородной группы Лоренца. В результате можно сказать, что в рамках СТО $\boldsymbol{\nu}$ не имеет физического смысла и служит для релятивистски инвариантной калибровки направлений пространственных осей инерциальных систем отсчета.

В связи с последним утверждением необходимо сделать еще одно важное замечание, касающееся 3-параметрической некомпактной группы однородных преобразований (5). Если дополнить эту группу 1-параметрической группой вращений вокруг $\boldsymbol{\nu}$ и 4-параметрической группой трансляций, то в результате получится 8-параметрическая подгруппа группы Пуанкаре, генераторы и алгебра Ли которой имеют в нашем базисе вид (3) и (4) с условием, что $r = 0$. Для такой группы теперь используется название $ISIM(2)$, а её однородная 4-параметрическая подгруппа $SIM(2)$, которая включает (5) и повороты вокруг $\boldsymbol{\nu}$, положена в основу так называемой Очень Специальной теории Относительности (VSR) [28]. Согласно VSR, $SIM(2)$ симметрия предполагается более фундаментальной локальной пространственно-временной симметрией нежели локально лоренцева симметрия. В частности, требование $SIM(2)$ симметрии оказалось достаточным, чтобы показать [29], что нейтрино может иметь массу при сохранении лептонного числа, причем важно, что такой результат нельзя получить в рамках лоренц-инвариантного подхода без введения стерильных нейтрино. Однако существенным недостатком VSR является то, что $\boldsymbol{\nu}$ рассматривается только как феноменологический параметр и VSR ничего не может сказать о его физической природе.

Значительно более содержательной (с физической точки зрения) оказалась специальная релятивистская теория локально анизотропного пространства-времени [5, 6], в основу которой положена финслерова метрика (1), описывающая семейство плоских релятивистски инвариантных пространств событий с частично нарушенной 3D изотропией, а значит, и с нарушенной лоренцевой симметрией. Большая часть результатов, полученных в рамках такой теории, была воспроизведена в работах [30, 31] с помощью альтернативных методов. В частности, неоднородная 8-параметрическая группа релятивистской симметрии метрики (1) с её Ли-алгеброй (4) были получены с помощью метода непрерывной деформации алгебры $ISIM(2)$. В результате, соответствующая симметрия теперь все чаще называется $DISIM_b(2)$ -симметрией (где b служит новым обозначением параметра r), а сама теория [5, 6] все чаще называется Общей Очень Специальной теорией Относительности (GVSR).

2.1.1 Импульс покоя в дополнение к энергии покоя

Для того, чтобы модифицировать обычную релятивистскую механику в соответствии с требованием инвариантности относительно группы $DISIM_b(2)$, достаточно в интеграле

действия

$$S = -mc \int_a^b ds \quad (6)$$

заменить линейный элемент Минковского $ds = \sqrt{dx_0^2 - d\mathbf{x}^2}$ финслеровым элементом (1). В результате, функция Лагранжа, соответствующая релятивистской частице в локально анизотропном пространстве (1), оказывается следующей

$$L = -mc^2 \left(\frac{1 - \mathbf{v}\boldsymbol{\nu}/c}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right)^r \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}. \quad (7)$$

Отсюда можно получить выражения [5] для энергии E и импульса \mathbf{p} релятивистской частицы:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \left(\frac{1 - \mathbf{v}\boldsymbol{\nu}/c}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right)^r \left[1 - r + r \frac{1 - \mathbf{v}^2/c^2}{1 - \mathbf{v}\boldsymbol{\nu}/c} \right], \quad (8)$$

$$\mathbf{p} = \frac{mc}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \left(\frac{1 - \mathbf{v}\boldsymbol{\nu}/c}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right)^r \left[(1 - r)\mathbf{v}/c + r\boldsymbol{\nu} \frac{1 - \mathbf{v}^2/c^2}{1 - \mathbf{v}\boldsymbol{\nu}/c} \right]. \quad (9)$$

Согласно (8), энергия частицы E достигает абсолютного минимума $E = mc^2$ при $\mathbf{v} = 0$. Что касается импульса \mathbf{p} , то, согласно (9), он, при $\mathbf{v} = 0$, принимает значение $\mathbf{p} = mc r \boldsymbol{\nu}$. Таким образом, в анизотропном пространстве с метрикой (1), помимо энергии покоя $E = mc^2$, у любой массивной частицы появляется еще одна наблюдаемая величина — импульс покоя $\mathbf{p} = mc r \boldsymbol{\nu}$. Отметим также, что, как показано в [5], 4-импульс $p^i = (p^0 = E/c, \mathbf{p})$ удовлетворяет $DISIM_b(2)$ -инвариантному дисперсионному соотношению, которое мы здесь представим в виде:

$$(p_0^2 - \mathbf{p}^2) = (mc)^2 (1 - r)^{(1-r)} (1 + r)^{(1+r)} \left[\frac{(p_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\nu})^2}{p_0^2 - \mathbf{p}^2} \right]^r. \quad (10)$$

В нерелятивистском пределе функция Лагранжа (7) выглядит следующим образом:

$$L = -mc^2 + mc r (\mathbf{v}\boldsymbol{\nu}) + (1 - r) \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + r(1 - r) \frac{m(\mathbf{v}\boldsymbol{\nu})^2}{2}.$$

Поскольку входящее сюда выражение $-mc^2 + mc r (\mathbf{v}\boldsymbol{\nu})$ является полной производной по времени, оно может быть опущено. В результате мы видим, что кинетическая энергия и импульс

$$T = \frac{1}{2} m_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta, \quad p_\alpha = m_{\alpha\beta} v^\beta, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

нерелятивистской частицы, находящейся в анизотропном пространстве (1), определяются тензором инертной массы [24]:

$$m_{\alpha\beta} = m(1 - r)(\delta_{\alpha\beta} + r\nu_\alpha \nu_\beta). \quad (11)$$

Перепишем теперь финслерову метрику (1) так, чтобы она выражалась через четырехмерные величины.

$$ds = \left[\frac{(dx_0 - \boldsymbol{\nu} d\mathbf{x})^2}{dx_0^2 - d\mathbf{x}^2} \right]^{r/2} \sqrt{dx_0^2 - d\mathbf{x}^2} = \left[\frac{(\nu_i dx^i)^2}{\eta_{ik} dx^i dx^k} \right]^{r/2} \sqrt{\eta_{ik} dx^i dx^k}. \quad (12)$$

Поскольку $\nu^2 = 1$, то ясно, что здесь

$$\nu_i = \{1, -\nu\}, \quad \eta_{ik} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}, \quad \nu^i = \{1, \nu\}, \quad \nu_i \nu^i = 0.$$

Наконец, давайте попробуем понять, что же является физическим носителем анизотропии плоского пространства событий (12) и наметим схему дальнейшего развития теории. Для этого сначала обратим внимание на уникальное свойство финслеровой метрики (12). С одной стороны, она переходит при $r = 0$ в метрику Минковского, а с другой — превращается при $r = 1$ в полный дифференциал $ds = \nu_i dx^i$. Последнее означает, что в таком случае действие (6) не зависит от формы мировой линии, соединяющей точки a и b . Другими словами, у пространства-времени исчезает такая его физическая характеристика как пространственная протяженность и остается только временная длительность, представляющая собой интервал абсолютного времени $ds = \nu_i dx^i$. При этом, согласно (11), инертные массы всех частиц также исчезают, а ν_i из шпурионного¹ постоянного векторного поля превращается в ковариантное постоянное векторное поле, определенное на данном вырожденном (с метрической точки зрения) пространственно-временном многообразии. Кстати отметим, что именно на пространственно-временном многообразии, а не на пространстве-времени Минковского, вводятся безмассовые фундаментальные поля (например, Стандартной модели) перед спонтанным нарушением исходной калибровочной симметрии и появлением масс у первоначально безмассовых частиц. Это ясно уже из того, что в безмассовом мире не существует инерциальных систем отсчета с их обязательным атрибутом — эталонной линейкой.

В соответствии с (6) и (12), постоянное, отличное от нуля поле r определяет специфическое несепарабельное взаимодействие постоянного шпурионного поля ν_i с массивными частицами. Эффект такого взаимодействия состоит в том, что частицы приобретают (согласно (11)) свойства квазичастиц в аксиально-симметричной кристаллической среде. Комплекс постоянных полей — скалярного поля r и шпурионного поля ν_i является таким образом физическим носителем анизотропии плоского пространства событий (12). Как оказалось, нуль-векторное шпурионное поле ν_i представляет собой нейтрин-антинейтринный конденсат, построенный из постоянных вейлевых спиноров. Такие спиноры являются точным решением $DISIM_b(2)$ –инвариантного обобщенного массивного уравнения Дирака [32], лагранжиан которого имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - m \left[\left(\frac{\nu_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi}{\bar{\psi} \psi} \right)^2 \right]^{r/2} \bar{\psi} \psi. \quad (13)$$

Если постоянное скалярное поле r занулить, $DISIM_b(2)$ –инвариантное обобщенное массивное уравнение Дирака перейдет в стандартное массивное уравнение Дирака, у которого не существует решения в виде постоянных спиноров. Вместе с тем, уравнения Вейля, вытекающие из стандартного безмассового уравнения Дирака, имеют решения в виде постоянных спиноров, из которых можно построить постоянное нуль-векторное шпурионное поле ν_i . Однако физически оно будет ненаблюдаемо, поскольку при $r = 0$ мы вернемся в рамки СТО: финслерова метрика (12) превратится в метрику Минковского, импульс покоя $\mathbf{p} = mcr \boldsymbol{\nu}$ исчезнет, тензор инертной массы (11) перестанет быть тензором и станет скалярной величиной m . Соответственно пропадут и все другие эффекты пространственной анизотропии, рассмотренные в [33].

2.1.2 К проблеме построения финслеровой ОТО, основанной на группе $DISIM_b(2)$

Как было отмечено во Введении, Ridge/CMS-эффект, обнаруженный на LHC, напрямую говорит о том, что в ранней Вселенной спонтанно возникла аксиально-симметричная ани-

¹Смысл этого термина можно уяснить, обратившись, например, к работе [30].

зотропия пространства-времени с группой $DISIM_b(2)$ в качестве неоднородной группы релятивистской симметрии и с финслеровой метрикой (12). Прежде всего по этой причине особую актуальность приобретает проблема построения финслеровой общей теории относительности, основанной на группе $DISIM_b(2)$. Нет нужды говорить о сложности такой задачи, тем более что она предполагает ответы на вопросы, касающиеся природы темной материи и темной энергии. Несмотря на определенные успехи в этом направлении, указанная проблема до конца еще не решена. Поэтому, в заключение раздела 2.1, мы обозначим лишь тот путь, продвижение по которому вероятнее всего приведет к намеченной цели.

Ключевой момент при обобщении плоской $DISIM_b(2)$ – инвариантной финслеровой метрики (12) до уровня финслеровой метрики, описывающей соответствующее искривленное локально анизотропное пространство-время, состоит в следующем наблюдении. Если постоянные величины, от которых зависит метрика (12), а именно: скаляр r , шпурионный нуль-вектор ν_i и шпурионный тензор $\eta_{ik} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$, заменить на соответствующие обычные поля, заданные на пространственно-временном многообразии, т.е. сделать в метрике (12) замену $r \rightarrow r(x)$, $\nu_i \rightarrow \nu_i(x)$, $\eta_{ik} \rightarrow g_{ik}(x)$, то в результате мы получим (см. [34]) искривленную финслерову метрику в виде

$$ds = \left[\frac{(\nu_i dx^i)^2}{g_{ik} dx^i dx^k} \right]^{r/2} \sqrt{g_{ik} dx^i dx^k}, \quad (14)$$

где: $g_{ik} = g_{ik}(x)$ – риманов метрический тензор, связанный с гравитационным полем, $r = r(x)$ – скалярное поле, характеризующее величину локальной пространственно-временной анизотропии и $\nu_i = \nu_i(x)$ – нуль-векторное поле, указывающее локально выделенные направления в пространстве-времени.

В любой точке искривленного финслерова пространства (14) соответствующее плоское касательное финслерово пространство (12) имеет свои значения параметров r и ν . Эти значения являются ничем иным, как значениями полей $r(x)$ и $\nu(x)$ в точке касания.

Очевидно, что динамика финслерова пространства (14) полностью определяется динамикой взаимодействующих полей $g_{ik}(x), r(x), \nu_i(x)$, причем эти поля образуют вместе с полями материи единую динамическую систему. Поэтому, в противоположность существующим чисто геометрическим подходам к финслерову обобщению уравнений Эйнштейна, наш подход [34] к данной проблеме основан на использовании методов обычной теории взаимодействующих полей.

То, что при переходе от плоской $DISIM_b(2)$ – инвариантной финслеровой метрики (12) к искривленной финслеровой метрике (14) мы заменили шпурионный тензор $\eta_{ik} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$ и шпурионный нуль-вектор ν_i соответствующими обычными полями, трансформировалось в свойство инвариантности метрики (14) относительно следующих локальных преобразований

$$g_{ik} \rightarrow e^{2\sigma(x)} g_{ik}, \quad \nu_i \rightarrow e^{(r-1)\sigma(x)/r} \nu_i, \quad r \rightarrow r, \quad (15)$$

где $\sigma(x)$ – произвольная функция.

Помимо метрики (14), локальные преобразования (15) оставляют инвариантными все наблюдаемые. Поэтому в теории гравитации, основанной на группе $DISIM_b(2)$, преобразования (15) имеют смысл локальных калибровочных преобразований. Калибровочно-инвариантным является, например, действие

$$S = -\frac{1}{c} \int \mu^* \left(\frac{\nu_i v^i}{\sqrt{g_{ik} v^i v^k}} \right)^{4r} \sqrt{-g} d^4x$$

для сжимаемой жидкости в финслеровом пространстве (14). В этой формуле μ^* есть инвариантная плотность энергии жидкости, $v^i = dx^i/ds$, а ds – метрика (14).

В связи с упомянутой локальной калибровочной инвариантностью, динамическая система, состоящая из полей g_{ik}, r, ν_i и сжимаемой жидкости, должна быть дополнена двумя векторными калибровочными полями A_i и B_i , которые при локальных преобразованиях (15) преобразуются соответствующим градиентным образом. Поле A_i для определенного класса задач оказывается чисто калибровочным, а поле B_i , градиентное преобразование которого имеет вид

$$B_i \rightarrow B_i + b[(r-1)\sigma(x)/r]_{;i},$$

где b – константа с размерностью длины, взаимодействует с сохраняющимся током массы покоя j^i , добавляя в полный калибровочно инвариантный лагранжиан член $\sim B_i j^i$.

2.2 Релятивистски инвариантные финслеровы пространства с полностью нарушенной 3D изотропией

В наиболее общем виде метрика таких пространств

$$ds = (dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)^{(1+r_1+r_2+r_3)/4} (dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)^{(1+r_1-r_2-r_3)/4} \times (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)^{(1-r_1+r_2-r_3)/4} (dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)^{(1-r_1-r_2+r_3)/4} \quad (16)$$

была получена в [35]. Три параметра (r_1, r_2 и r_3) характеризуют анизотропию пространств (16) и ограничены условиями

$$\begin{aligned} 1 + r_1 + r_2 + r_3 &\geq 0, & 1 + r_1 - r_2 - r_3 &\geq 0, \\ 1 - r_1 + r_2 - r_3 &\geq 0, & 1 - r_1 - r_2 + r_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Нужно отметить, что, при $r_1 = r_2 = r_3 = 0$, метрика (16) сводится к корню четвертой степени из произведения четырех 1-форм

$$ds_{B-M} = [(dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)(dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3) \times (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)(dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)]^{1/4}.$$

Таким образом, в данном частном случае мы получаем хорошо известную метрику Бервальда-Моора, записанную однако в базисе, который был введен в [35].

Рассмотрим теперь группу изометрий плоских финслеровых пространств (16). Однородная 3-параметрическая некомпактная группа изометрий, т.е. группа релятивистской симметрии пространства-времени (16) оказывается Абелевой, причем составляющие её преобразования имеют тот же смысл, что и обычные лоренцевы бусты. Явный вид этих преобразований следующий

$$x'_i = DL_{ik}x_k, \quad (17)$$

где

$$D = e^{-(r_1\alpha_1+r_2\alpha_2+r_3\alpha_3)},$$

унимодулярные матрицы L_{ik} представлены соотношениями

$$L_{ik} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & -\mathcal{B} & -\mathcal{C} & -\mathcal{D} \\ -\mathcal{B} & \mathcal{A} & \mathcal{D} & \mathcal{C} \\ -\mathcal{C} & \mathcal{D} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ -\mathcal{D} & \mathcal{C} & \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathcal{A} = \cosh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \cosh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \sinh \alpha_3,$$

$$\mathcal{B} = \cosh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \sinh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \cosh \alpha_3,$$

$$\mathcal{C} = \cosh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \cosh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \sinh \alpha_3,$$

$$\mathcal{D} = \cosh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \sinh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \cosh \alpha_3,$$

причем $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — групповые параметры. Наряду с параметрами α_i , в качестве групповых параметров могут также использоваться компоненты $v_i = dx_i/dx_0$ координатной скорости штрихованной системы отсчета. Параметры v_i и α_i связаны соотношениями

$$\begin{aligned} v_1 &= (\tanh \alpha_1 - \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3) / (1 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3), \\ v_2 &= (\tanh \alpha_2 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_3) / (1 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3), \\ v_3 &= (\tanh \alpha_3 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2) / (1 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3). \end{aligned} \quad (19)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{4} \ln \frac{(1 + v_1 - v_2 + v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3)}{(1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 - v_1 + v_2 + v_3)}, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{4} \ln \frac{(1 - v_1 + v_2 + v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3)}{(1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 + v_1 - v_2 + v_3)}, \\ \alpha_3 &= \frac{1}{4} \ln \frac{(1 - v_1 + v_2 + v_3)(1 + v_1 - v_2 + v_3)}{(1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Что касается генераторов X_i однородной 3-параметрической группы изометрий (17) пространства-времени (16), они могут быть представлены следующим образом

$$X_1 = -r_1 x_\alpha p_\alpha - (x_1 p_0 + x_0 p_1) + (x_2 p_3 + x_3 p_2),$$

$$X_2 = -r_2 x_\alpha p_\alpha - (x_2 p_0 + x_0 p_2) + (x_1 p_3 + x_3 p_1),$$

$$X_3 = -r_3 x_\alpha p_\alpha - (x_3 p_0 + x_0 p_3) + (x_1 p_2 + x_2 p_1),$$

где $p_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$ — генераторы 4-параметрической группы трансляций. Таким образом, с включением последней, неоднородная группа изометрий полностью анизотропного финслерова пространства событий (16) оказывается 7-параметрической группой. Что касается её генераторов, они удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [X_i X_j] &= 0, & [p_\alpha p_\beta] &= 0, \\ [X_1 p_0] &= r_1 p_0 + p_1, & [X_2 p_0] &= r_2 p_0 + p_2, & [X_3 p_0] &= r_3 p_0 + p_3, \\ [X_1 p_1] &= r_1 p_1 + p_0, & [X_2 p_1] &= r_2 p_1 - p_3, & [X_3 p_1] &= r_3 p_1 - p_2, \\ [X_1 p_2] &= r_1 p_2 - p_3, & [X_2 p_2] &= r_2 p_2 + p_0, & [X_3 p_2] &= r_3 p_2 - p_1, \\ [X_1 p_3] &= r_1 p_3 - p_2, & [X_2 p_3] &= r_2 p_3 - p_1, & [X_3 p_3] &= r_3 p_3 + p_0. \end{aligned}$$

3 Модель фазового пространства-времени и физические результаты, полученные на её основе

Пусть $M = R^4$ — дифференцируемое 4-мерное многообразие класса C^∞ . Пусть TM — его касательное расслоение с координатами $(x, y) = (x^i, y^i)$; $i = 0, 1, 2, 3$. Если c — параметризуемая кривая на M , $c: [ab] \rightarrow M$, $t \rightarrow (x^i(t))$, то её естественное продолжение

на TM есть $c : [ab] \rightarrow TM, t \rightarrow (x^i(t), y^i(t))$, где $y^i = dx^i/dt$. Длина дуги s , обычно выбираемая в качестве естественного параметра на кривой, будет, таким образом равна $s = \int_0^t \sqrt{g_{ij}y^i y^j} d\tau$; $i, j = 0, 1, 2, 3$. Пусть метрика зависит от y , введенного выше, т.е. $g_{ij} = g_{ij}(x, y)$. В общем случае такая метрика соответствует обобщенной Лагранжевой геометрии, $g_{ij}(x, y)$ — дважды ковариантный симметричный тензор на TM с единственными ограничениями: а) $\det(g_{ij}) \neq 0$ для любых (x, y) на TM и б) с изменением координат на TM , соответствующим изменениям координат на M , его компоненты изменяются по тому же правилу, что и компоненты (0,2)-тензора на основном многообразии M . Это означает, что TM является 8-мерным Римановым многообразием, аналогичным известному в физике 6-мерному фазовому пространству. Его геометрия достаточно сложна и использует такие понятия как нелинейная связность (Эресмана). Но если ограничиться линейными преобразованиями координат с постоянными коэффициентами и слабым гравитационным полем, т.е. $g_{ij}(x, y) = \eta_{ij} + \varepsilon_{ij}(x, y)$; $\eta_{ij} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$; $\varepsilon_{ij}(x, y) = \chi \tilde{\varepsilon}_{ij}(x, y)$; $\chi \ll 1$, то геометрия существенно упрощается, и определение y^i позволяет использовать лифт Сасаки для поднятия и опускания значка на вертикальной и горизонтальной компонентах расслоения, т.е. один и тот же метрический тензор. Тензор g_{ij} является однородным нулевого порядка по y , т.е. метрика зависит только от направления y , но не от его величины. Это выражается соотношением $(\partial g_{ij}/\partial y^k)y^k = 0$. Если при этом выполняется еще и условие $(\partial g_{ij}/\partial y^k)y^j = 0$, то введенная метрика становится обычной финслеровой [1], но в данном подходе это не предполагается.

Описанный формализм означает, что одновременно с появлением новой геометрии для моделирования явлений в физическом мире предполагается использовать не пространство и время Ньютона и не пространство-время Минковского, а 8-мерное фазовое пространство-время. Его дополнительные измерения имеют не формальный характер, как в теориях типа Калуцы-Клейна, но ясный физический смысл, обусловленный моделью, предлагаемой для описания реальности. Ясно, что соответствие Лагранжева и Гамильтонова формализма получает новый аспект. Следует обратить внимание, что так же, как при переходе от пространства и времени Ньютона к пространству-времени Минковского появилась фундаментальная константа c с размерностью скорости, так и при переходе от пространства-времени Минковского к 8-мерному фазовому пространству-времени появляется еще одна фундаментальная константа l — с размерностью длины. Можно связать её с фундаментальной скоростью, $l = c/H$, тогда новая константа H будет иметь размерность c^{-1} , т.е. при интерпретации следует иметь в виду соответствие вида $(x^0, x^1, x^2, x^3, y^0, y^1, y^2, y^3) \longleftrightarrow (ct, x, y, z, c/H, v_x/H, v_y/H, v_z/H)$. Обращает на себя внимание обстоятельство, состоящее в том, что все явления будут происходить на 7-мерном подпространстве 8-мерного фазового пространства-времени, одна из координат которого имеет постоянное значение. Группой симметрий данного пространства будет обобщенная группа Лоренца и группа де Ситтера. Последняя допускает сжатия на пространства Кэррола и Ньютона-Гука, представляющие интерес для астрономических приложений. Возможность разделения полученного пространства на следующие части (x, y, z) и $(ct, c/H, v_x/H, v_y/H, v_z/H)$ допускает и использование геометрии Лобачевского для описания пространства скоростей, ранее используемого только в теории частиц высоких энергий.

Сохраняя только линейные члены, пропорциональные $\partial \varepsilon_{ij}/\partial x^k$, $\partial \varepsilon_{ij}/\partial y^k$ и $\partial^2 \varepsilon_{ij}/\partial x^k \partial y^l$, получим обобщенную геодезическую аналогично [36] в виде

$$\frac{dy^i}{ds} + \left(\Gamma^i_{lk} + \frac{1}{2} \eta^{it} \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x^j \partial y^t} y^j \right) y^k y^l = 0, \quad (21)$$

где $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \eta^{ih} (\partial \varepsilon_{hj}/\partial x^k + \partial \varepsilon_{hk}/\partial x^j - \partial \varepsilon_{jk}/\partial x^h)$ — символ Кристоффеля, зависящий от

y . Таким образом, для получения уравнения движения (уравнения динамики) в пределе слабого поля в анизотропном пространстве следует использовать уравнение (21), а не уравнение геодезической $dy^i/ds + \Gamma^i_{lk}y^ly^k = 0$, пригодное в том же приближении в пространстве с геометрией Римана. В результате известных упрощений и выделения антисимметричной части вспомогательного тензора, введенного в [8], уравнение движения в пространственном сечении, полученное из геодезической (21), приобретает вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{c^2}{2} \left\{ -\nabla\varepsilon_{00} + \left[\mathbf{v}, \text{rot} \frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\mathbf{v}} \right] + \nabla \left(\mathbf{v}, \frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\mathbf{v}} \right) \right\}, \quad (22)$$

где ε_{00} единственная (временная) компонента метрического тензора, которая остается в уравнении движения в случае слабого поля. Полагая (22) уравнением динамики, получаем выражение для обобщенной гравитационной силы [8]

$$\mathbf{F}^{(g)} = \frac{mc^2}{2} \left\{ -\nabla\varepsilon_{00} + \left[\mathbf{v}, \text{rot} \frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\mathbf{v}} \right] + \nabla \left(\mathbf{v}, \frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\mathbf{v}} \right) \right\}. \quad (23)$$

Оба последних уравнения получены из геодезической, соответствующей уравнениям поля для анизотропной метрики. Они не требуют специального выбора тензора энергии-импульса и каких-либо дополнительных априорных предположений. Уравнения поля в анизотропном пространстве в линейном приближении для слабого поля сохраняют свой вид [37], хотя их члены могут теперь зависеть от y .

Для исследования динамики спиральной галактики можно выбрать

$$\mathbf{u} \equiv \frac{c^2}{4} \frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\mathbf{v}} \equiv [\mathbf{\Omega}, \mathbf{r}],$$

причем

$$\mathbf{\Omega} = \frac{c^2}{4} \text{rot} \frac{\partial\varepsilon_{00}}{\partial\mathbf{v}}$$

и

$$\mathbf{\Omega} = \text{rot} \left(\int \frac{j^{(m)}(r)}{|r - r_0|} dV \right),$$

где $j^{(m)}(r)$ — плотность тока массы, а r_0 координата наблюдателя. Тогда уравнение для гравитационной силы примет вид

$$\mathbf{F}^{(g)} = \frac{mc^2}{2} \nabla \left\{ -\varepsilon_{00} + \frac{2}{c^2} \cdot 4(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right\}. \quad (24)$$

Если потребовать существования предельного перехода к ОТО, получим

$$\mathbf{F}^{(g)} = \frac{mc^2}{2} \nabla \left\{ -\sum_n \frac{r_{n,s}}{r_n} + \frac{2}{c^2} \cdot 4(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right\}, \quad (25)$$

и можно показать, что второе слагаемое под градиентом имеет такой же порядок величины, как и первое, на расстояниях порядка радиуса спиральной галактики, что препятствует обращению орбитальной скорости в ноль, требуемому ОТО. В то же время движения в плоскости галактики и в перпендикулярной плоскости описываются теперь разными законами, что снимает известный парадокс [38] в движении звездных шаровых скоплений.

Для моделирования элементарного (эффективного) источника гравитации в предлагаемом подходе — анизотропной геометродинамике (АГД) — понятие точечной массы уже не является естественным, и следует использовать систему «центр плюс ток», представляющую собой гравитационный аналог кругового витка с током вокруг центрального

заряда. Использование такой системы для моделирования спиральной галактики приводит к выражению $v_{orb} \sim const$ для орбитальной скорости, соответствующему наблюдаемой плоской кривой, и к эмпирическому закону Талли-Фишера $v_{orb} \sim L_{lum}^{1/4}$, не имеющему объяснения в ОТО. Эта же модель позволяет объяснить наблюдаемое в некоторых гравитационных линзах существенное превышение отклонения луча от теоретического расчета, которое оказывается обусловленным внутренними движениями масс в галактике-линзе. Можно также показать, что помимо «собирающих» гравитационных линз, в теории АГД возможно существование «рассеивающих» гравитационных линз, что может приводить к неправильному определению расстояния до источников, используемых в качестве «стандартных свечей». Это может поставить под вопрос существование недавно обнаруженного ускорения расширения Вселенной.

Теория, представленная в данном разделе, опирается на новую модель, служащую основой описания физической реальности — фазовое пространство-время, допускающее использование различных геометрий для описания своих подпространств. Подход АГД соответствует наблюдениям на галактическом масштабе и не нуждается во введении понятия темной материи. Кроме того, он не исключает новой (возможно, дополнительной) интерпретации закона Хаббла, учитывающей не радиальное расширение Вселенной, а разнообразное тангенциальное движение её удаленных частей. В рамках АГД последнее, с одной стороны, приводит к линейному закону убывания частоты с расстоянием до источников излучения, а с другой — имеет косвенные подтверждения в наблюдениях движения удаленных квазаров.

4 Математические и физико-геометрические аспекты алгебры гиперкомплексных чисел

Естественную основу для финслеровых геометрий специального типа (т. н. пространств Бервальда-Моора \mathcal{H}_n с метрикой

$${}^nG = \hat{S}(dx^1 \otimes dx^2 \cdots \otimes dx^n), \quad (26)$$

где \hat{S} — оператор симметризации (без числового множителя)) представляют хорошо известные ассоциативно-коммутативные алгебры P_n .

Этот раздел обзора посвящен изложению геометрических, алгебраических и физических результатов, полученных при исследовании поличисловых ассоциативно-коммутативных алгебр и связанных с ними геометрий Бервальда-Моора различных размерностей.

4.1 Конформные калибровки и нелинейные симметрии

Хорошо известно, что финслеровы пространства Бервальда-Моора \mathcal{H}_n обладают богатой (бесконечномерной) группой конформных симметрий \mathcal{CH}_n . Обозначим посредством \mathcal{H}_n^f многообразие Бервальда-Моора в некоторой *специальной конформной калибровке*, которое получается из \mathcal{H}_n действием некоторого $f \in \mathcal{CH}_n$. Преобразованиям многообразия \mathcal{H}_n из группы $\text{Iso}\mathcal{H}_n$ соответствуют теперь преобразования многообразия \mathcal{H}_n^f группы $(\text{Iso}\mathcal{H}_n)^f < \mathcal{CH}_n^f$, элементы ι^f которой определяются формулой $\iota^f \equiv f \circ \iota \circ f^{-1}$. Действие группы $(\text{Iso}\mathcal{H}_n)^f$ в пространстве координат многообразия \mathcal{H}_n^f описывается в общем случае нелинейными функциями, поэтому эту группу естественно называть *нелинейным f -представлением группы $\text{Iso}\mathcal{H}_n$* . В общем случае группу $(\text{Iso}\mathcal{H}_4)^f$ всегда можно рассматривать как группу (вообще говоря, нелинейных) изометрий $\text{Iso}\mathcal{H}_4^f$ некоторого многообразия \mathcal{H}_4^f , которое отличается от \mathcal{H}_4^f только своей метрикой. Вид этой метрики зависит от вида калибровочной функции f .

В работах [39, 40] на конкретных примерах иллюстрируется то обстоятельство, что группа изометрий и группа конформных симметрий метрики Бервальда-Моора могут нетривиальным образом взаимодействовать друг с другом, приводя к нелинейным симметриям известных геометрий.

4.2 Соприкасающиеся римановы метрики

Имея в распоряжении метрику (26) и векторные поля из алгебр Ли групп $\text{Iso}\mathcal{H}_n$ (и \mathcal{CH}_n), можно естественным образом получать из метрики (26) бесчисленное множество римановых метрик с помощью следующего общего приема. Рассмотрим "неполное" скалярное полипроизведение вида:

$$g = {}^n G(X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n-2)}, \ , \),$$

где $X_{(j)}$ — элементы алгебр Ли групп $\text{Iso}\mathcal{H}_n$ и (или) \mathcal{CH}_n , для удобства перенумерованные индексами, отвечающими их местам как аргументам метрики Бервальда-Моора. Очевидно, что g — (псевдо)риманова метрика, зависящая от выбранных полей $X_{(j)}$. Описанный прием приводит к обобщению понятия "римановой метрики, соприкасающейся к данной финслеровой метрике", рассмотренного в [1].

Рассмотрим в качестве опорного векторного поля общий элемент алгебры Ли подгруппы унимодулярных дилатаций $\text{Iso}_D\mathcal{H}_3$ полной группы $\text{Iso}\mathcal{H}_3$, который имеет вид:

$$X = b_1 D_1 + b_2 D_2 = b_1 x^1 \partial_1 + (b_2 - b_1) x^2 \partial_2 - b_2 x^3 \partial_3,$$

где b_1, b_2 — произвольные вещественные параметры. Соприкасающаяся вдоль этого поля риманова метрика имеет вид:

$$\begin{aligned} g = & b_1 x^1 (dx^2 \otimes dx^3 + dx^3 \otimes dx^2) + \\ & + (b_2 - b_1) x^2 (dx^1 \otimes dx^3 + dx^3 \otimes dx^1) - \\ & - b_2 x^3 (dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1). \end{aligned} \quad (27)$$

Эта метрика, вообще говоря, неплоская. Её определитель, задающий локальный элемент объема, дается выражением:

$$\det(g) = 2b_1 b_2 (b_2 - b_1) x^1 x^2 x^3.$$

Видно, что метрика (27) невырождена только при одновременном выполнении условий: $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $b_1 \neq b_2$. Стандартное исследование изометрий и конформных симметрий этой метрики устанавливает факт наличия у этой метрики 3-мерной алгебры изометрий и 10-мерной алгебры конформных симметрий. Столь богатая алгебра конформных симметрий является остаточным "следом" бесконечномерной алгебры конформных симметрий исходной метрики Бервальда-Моора (26) при $n = 3$.

Исследование остаточных симметрий соприкасающихся римановых метрик к метрикам Бервальда-Моора допускает и более общую постановку, в рамках которой получаются следующие базовые соотношения:

$$L_{X_i} g_{(j)} = L_{X_{(i)}} G(X_{(j)}, \ , \) = G([X_{(i)}, X_{(j)}], \ , \) = c_{ij}^k g_{(k)} \quad (28)$$

и

$$L_{\bar{X}_i} \bar{g}_{(j)} = L_{\bar{X}_{(i)}} G(\bar{X}_{(j)}, \ , \) = \phi_i \bar{g}_{(j)} + \bar{c}_{ij}^k \bar{g}_{(k)} = (\phi_i \delta_j^k + \bar{c}_{ij}^k) \bar{g}_{(k)}, \quad (29)$$

где $X_{(j)}$ — элемент алгебры Ли группы $\text{Iso}\mathcal{H}_3$, $\bar{X}_{(j)}$ — элемент алгебры Ли конформной группы \mathcal{CH}_3 , c_{ij}^k и \bar{c}_{ij}^k — структурные константы или структурные функции алгебры Ли групп $\text{Iso}\mathcal{H}_3$ и \mathcal{CH}_3 соответственно.

Таким образом, семейства метрик $\{g_{(j)}\}$ и $\{\bar{g}_{(j)}\}$ образуют дифференциальные идеалы относительно их Ли-дифференцирования вдоль семейств полей $\{X_{(j)}\}$ и $\{\bar{X}_{(j)}\}$ соответственно. Это общее свойство и позволяет сформулировать ряд общих теорем относительно симметрии римановых метрик $g_{(j)}$ и $\bar{g}_{(j)}$ [41].

4.3 Метрические бинглы в \mathcal{H}_3

Изучение свойств углов в финслеровой геометрии представляет особый интерес для её физических приложений. Один из подходов к проблеме построения аддитивных бинглов и тринглов заключается в составлении и решении соответствующих функциональных уравнений, удовлетворяющих условию аддитивности [42]. Вместо решения функционально-дифференциальных уравнений в пространстве базисных конформных инвариантов геометрии БМ, можно с самого начала связать все типы полиуглов с аддитивными по своему определению величинами, типа длин, площадей или объемов, вычисляемых на единичной сфере геометрии БМ (индикатриссе).

Оказывается, для любой пары неизотропных векторов A и B можно ввести два типа бинглов — взаимный и относительный. Выражение для взаимного бингла имеет следующий вид:

$$\phi[A, B] = |A^{\flat} - B^{\flat}| \quad (30)$$

где \flat — операция би-проекция \mathcal{H}_3 , которая на произвольный элемент $X \in \mathcal{H}_3$ действует по правилу:

$$(X^{\flat})^i = \ln \frac{X^i}{|X|}.$$

Норма в (30) вычисляется по стандартной метрике Бервальда-Моора в изотропных координатах. Бингл, определенный по формуле (30), оказывается аддитивным по определению, т.е. для любой тройки "компланарных" векторов A, B, C выполняется условие, аналогичное евклидову:

$$\phi[A, C] = \phi[A, B] + \phi[B, C]. \quad (31)$$

При этом условие компланарности векторов A, B, C имеет вид условия коллинеарности соответствующих \flat -образов:

$$(A^{\flat} - B^{\flat}) \wedge (A^{\flat} - C^{\flat}) = 0. \quad (32)$$

Выражения для второго (взаимного) бингла (их может быть три типа в зависимости от взаимной ориентации векторов A и B) имеют вид:

$$\text{cfh } \psi_i[A, B] = e^{(B^{\flat\flat})_i - (A^{\flat\flat})_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (33)$$

а функция, обратная к финслерово-гиперболическому косинусу cfh определяется интегралом:

$$\begin{aligned} \text{arccfh}(\xi) &\equiv \\ &\equiv -\frac{1}{2} \int_{2^{-1/3}}^{\xi} \left(\frac{(x^2 - \sqrt{x(x^3 + 4)})(3x^2 + \sqrt{x(x^3 + 4)})(\sqrt{x(x^3 + 4)} + x^3 - 2)}{x^4(x^3 + 4)} \right)^{1/3} dx. \end{aligned} \quad (34)$$

Наконец, выражение для величины аналогичной телесному углу на векторах A, B, C да-

ется следующим интегралом:

$$\Sigma(A, B, C) = \frac{3}{2} \phi^2[A, B] (\text{cfh } \psi_1[B, C] \text{cfh } \psi_1[A, B] - \text{cfh } \psi_2[B, C] \text{cfh } \psi_2[A, B])^2 \times \quad (35)$$

$$\int_{\text{cfh } \psi_1[A, B]}^{\text{cfh } \psi_1[A, C]} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 4x} \left(x/\text{cfh } \psi_1[B, C] - (\sqrt{x^4 + 4x} - x^2)/(2x \text{cfh } \psi_2[B, C]) \right)^2}.$$

Точные формулировки, доказательства и иллюстрации можно найти в [43].

4.4 Классификация однородных кубических метрик

Симметричный анализ геометрических объектов остается одним из основных средств изучения их внутренних инвариантных (т.е. не зависящих от координат) свойств. Для понимания места метрики Бервальда-Моора в ряду других однородных кубических метрик было предпринято исследование групп изометрий общей однородной кубической формы вида

$$G = G_{\alpha\beta\gamma} dx^\alpha \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma, \quad (36)$$

где $G_{\alpha\beta\gamma}$ — постоянные вещественные компоненты кубической формы. Результаты исследования резюмируются в следующей сводной таблице:

Симметричные классы	1	2	3	4	5	6	7	8
Проективные классы	III, XII	V	(1): VIII, (2): VI, XIII, (3): VII	IV	II, X, XI	?	—	Общ., I, IX

Она показывает, что симметричный анализ обнаруживает 6 различных симметричных классов (7-й класс оказывается пустым, 6-й совпадает с 5-ым), по которым распределяются 13 проективных классов известных ранее [44]. Метрика Бервальда-Моора попадает в 1-ый симметричный класс. Одним из важных выводов проведенного исследования является вывод о неполноте классификации однородных кубических метрик по их алгебрам изометрий [45].

4.5 h -голоморфные функции двойной переменной

Для интерпретации R^2 как плоскости двойной переменной \mathcal{H} естественно ограничиться отображениями, сохраняющими гиперболическую комплексную структуру плоскости, т.е. отображениями $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ вида: $h \mapsto s = F(h)$. Дифференцируемые функции $R^2 \rightarrow R^2$, удовлетворяющие условию: $F_{,h} = 0$ называются h -голоморфными функциями двойной переменной h .

Сформулируем некоторые важные свойства h -голоморфных функций в виде теорем.

Теорема 1. *h -голоморфная функция всегда отображает делители нуля в делители нуля.*

Теорема 2. *Компоненты U и V h -голоморфной функции $F = U + jV$ удовлетворяют гиперболическим условиям Коши-Римана: $U_{,t} = V_{,x}$; $U_{,x} = V_{,t}$.*

Теорема 3. *Для h -голоморфной в области D функции имеет место интегральная теорема Коши:*

$$\oint_{\Gamma} F(h) dh = 0,$$

где Γ — простой замкнутый кусочно-гладкий и не имеющий изотропных элементов контур, целиком лежащий в D .

Теорема 4. Для h -голоморфной в области D функции имеет место интегральная формула Коши:

$$\oint_{\Gamma} \frac{F(h)}{h - h_0} dh = 0,$$

где Γ — простой замкнутый кусочно-гладкий и не имеющий изотропных элементов контур, целиком лежащий в D и охватывающий точку h_0 .

Другие варианты интегральной формулы Коши приведены в [46].

Теорема 5. Для простого замкнутого кусочно-гладкого не имеющего изотропных элементов контура Γ , охватывающего точку h_0 , имеет место формула:

$$\oint_{\Gamma} (h - h_0)^{\alpha} dh = \begin{cases} 0, & \alpha \neq -1; \\ j\ell_H, & \alpha = -1. \end{cases} \quad (37)$$

где α — произвольное вещественное число, ℓ_H — несобственная "фундаментальная константа" плоскости двойной переменной, определяющая размер пространства гиперболических углов (аналогичная константе 2π на комплексной плоскости).

Теорема 6. Псевдоевклидова метрика $\eta = \text{Re}(dh \otimes d\bar{h})$ конформна относительно произвольного h -голоморфного отображения плоскости двойной переменной.

В работе [46] изучены свойства основных элементарных h -голоморфных функций двойной переменной.

4.6 Гиперболическая теория поля на плоскости \mathcal{H}_2

Будем рассматривать произвольную h -голоморфную функцию $F(h) = U + jV$ как комплексный h -потенциал некоторого 2-мерного векторного поля (h -поле) на плоскости двойной переменной. Вещественную часть U этой функции будем связывать с потенциалом поля (h -потенциальная функция), а мнимую часть V с силовой функцией этого поля. Определим напряженность \mathcal{E} h -поля по формуле:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_t + j\mathcal{E}_x = -\frac{\overline{dF}}{dh} = -\frac{d\bar{F}}{d\bar{h}} = -U_{,t} + jU_{,x}, \quad (38)$$

которую можно рассматривать как двойную форму представления для векторного поля градиента функции U относительно псевдоевклидовой метрики. Формула (38) получается с учетом гиперболических условий Коши-Римана.

В силу соотношения $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\bar{z})$ (антиголоморфность напряженности), вытекающего из определения (38), приходим к следующему тождеству:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h} = \frac{1}{2}[\mathcal{E}_{t,t} + \mathcal{E}_{x,x} + j(\mathcal{E}_{t,x} + \mathcal{E}_{x,t})] = 0, \quad (39)$$

которое эквивалентно двум тождествам:

$$\text{divh } \mathcal{E} \equiv \mathcal{E}_{t,t} + \mathcal{E}_{x,x} = 0; \quad \text{roth } \mathcal{E} \equiv \mathcal{E}_{t,x} + \mathcal{E}_{x,t} = 0, \quad (40)$$

выражающим соответственно *соленоидальность* и *h -потенциальность* электростатического поля².

²Отметим, что дивергенция векторного поля определяется одинаково в комплексном и гиперболическом случаях, в отличие от операции ротора векторного поля, которая в гиперболическом случае включает симметричную комбинацию частных производных.

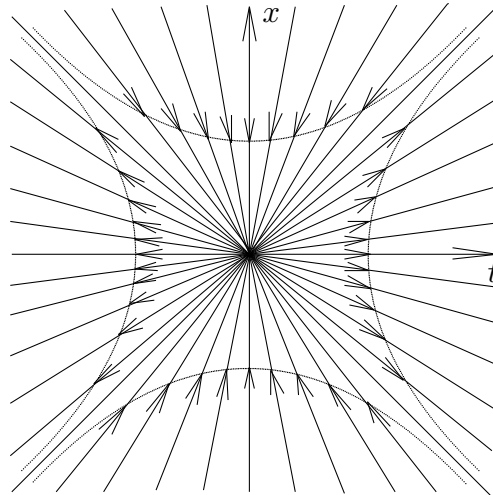
В качестве примера рассмотрим h -потенциал вида

$$F(h) = -q \ln h, \quad (41)$$

который является очевидным гиперболическим обобщением кулоновского потенциала. Напряженность поля, которая ему соответствует, вычисляется по формуле (38) и имеет вид:

$$\mathcal{E} = \frac{q}{h} = \frac{qh}{|h|^2} = q \left(\frac{t}{t^2 - x^2} + j \frac{x}{t^2 - x^2} \right). \quad (42)$$

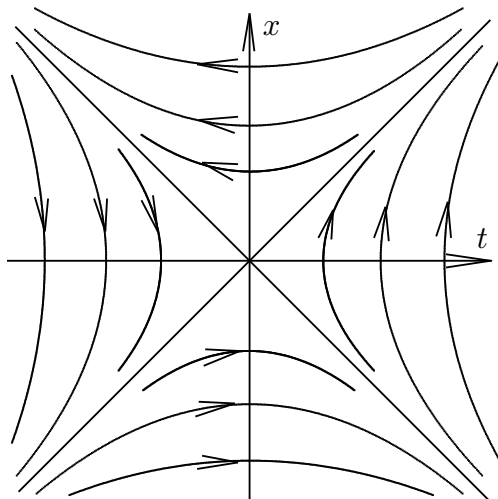
Силовые линии гиперболического точечного источника — это радиальные прямые с $\psi = \text{const}$, а эквипотенциальные линии — гиперболы $\rho = \text{const}$. Картина силовых линий во всех 4-х клиньях представлена на рисунке:



Дуальная интерпретация точечного гиперболического источника получается переходом от потенциала $F(h)$ в (41) к потенциалу $jF(h)$. При этом для нового дуального поля \mathcal{B} получается выражение:

$$\mathcal{B} = j \frac{d\bar{F}}{dh} = -\frac{qj}{h} = -q \frac{x + jt}{t^2 - x^2}. \quad (43)$$

Поле \mathcal{B} является гиперболическим аналогом точечного вихря. Его силовые линии — гиперболы — показаны на рисунке:



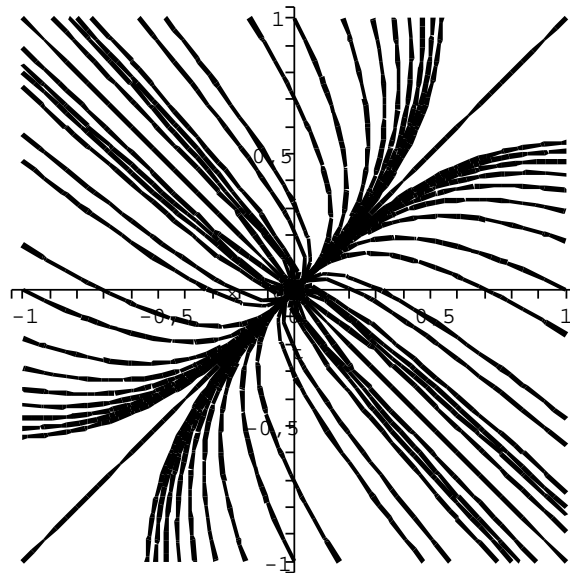
По аналогии с комплексным случаем можно объединить две предыдущие ситуации в одну, вводя в рассмотрение концепцию *гиперболического вихреисточника* с комплексным зарядом $\mathcal{Q} = q - jm$. Потенциал принимает вид:

$$F(z) = -\mathcal{Q} \ln h = -q \ln \varrho + m\psi - j(-m \ln \varrho + q\psi). \quad (44)$$

Такой потенциал наиболее естественно интерпретировать в рамках дуально-симметричной гиперболической теории поля, в которой гиперболические электрические и магнитные заряды и токи присутствуют на "равных правах". Уравнение для силовых линий такого поля получается из (44) приравниванием мнимой части константе:

$$(t+x)^{1-\alpha}(t-x)^{1+\alpha} = \text{const}, \quad (45)$$

где $\alpha = q/m$. Картина силовых линий для $\alpha = -2$ показана на рисунке:



Для физических приложений необходимо обобщение концепции h -поля на случай коммутативно-ассоциативных алгебр высших размерностей. Проиллюстрируем идею такого обобщения на примере алгебры 3-чисел P_3 .

Будем стартовать с изотропного базиса в P_3 , в котором h -голоморфная функция имеет следующее представление:

$$F(h) = F(\xi_1)e_1 + F(\xi_2)e_2 + F(\xi_3)e_3. \quad (46)$$

Операторы дифференцирования по независимым переменным h, h^\dagger, h^\ddagger имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial h} = e_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + e_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3}; \quad \frac{\partial}{\partial h^\dagger} = e_1 \frac{\partial}{\partial \xi_3} + e_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + e_3 \frac{\partial}{\partial \xi_2}; \quad \frac{\partial}{\partial h^\ddagger} = e_1 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + e_2 \frac{\partial}{\partial \xi_3} + e_3 \frac{\partial}{\partial \xi_1}. \quad (47)$$

В силу (47) непосредственной проверкой в компонентах легко убедиться в справедливости равенств для функции F в виде (46):

$$\frac{\partial F}{\partial h^\dagger} = \frac{\partial F}{\partial h^\ddagger} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial h} = \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} e_1 + \frac{\partial F_2}{\partial \xi_2} e_2 + \frac{\partial F_3}{\partial \xi_3} e_3, \quad (48)$$

где здесь и далее $F_i \equiv F(\xi_i)$ — одна и та же функция от разных изотропных переменных. Условия голоморфности в симметричном неизотропном базисе $\{j_1, j_2, j_3\}$ (т.е. многомерный аналог стандартных условий Коши-Римана) определяем соотношениями:

$$j_1 = e_1 - e_2 - e_3; \quad j_2 = -e_1 + e_2 - e_3; \quad j_3 = -e_1 - e_2 + e_3, \quad (49)$$

и правилами умножения:

$$j_i^2 = -(j_1 + j_2 + j_3); \quad j_i \cdot j_k = j_l \quad (j \neq k \neq l), \quad (50)$$

имеют вид матричных дифференциальных уравнений:

$$\begin{pmatrix} -(\bar{\partial} + \partial_3) & \partial_{2-1} & \partial_{1-2} \\ \partial_{2-3} & -(\bar{\partial} + \partial_1) & \partial_{3-2} \\ \partial_{1-3} & \partial_{3-1} & -(\bar{\partial} + \partial_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = 0; \quad (51)$$

$$\begin{pmatrix} -(\bar{\partial} + \partial_2) & \partial_{1-3} & \partial_{3-1} \\ \partial_{1-2} & -(\bar{\partial} + \partial_3) & \partial_{2-1} \\ \partial_{3-2} & \partial_{2-3} & -(\bar{\partial} + \partial_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = 0, \quad (52)$$

для всякой h -голоморфной функции $F(h) = U_1 j_1 + U_2 j_2 + U_3 j_3$. Здесь $\partial_{i-j} \equiv \partial_i - \partial_j$, $\bar{\partial} = \partial_1 + \partial_2 + \partial_3$. Ввиду инвариантности свойства h -голоморфности относительно выбора базиса алгебры, можно утверждать, что общее решение системы (51)-(52) записывается с помощью представления U_i через F_i (компоненты в изотропном базисе) выраженные через x -координаты:

$$\begin{aligned} U_1 &= F(x_2 - x_1 - x_3) + F(x_3 - x_1 - x_2); & U_2 &= F(x_1 - x_2 - x_3) + F(x_3 - x_1 - x_2); \\ U_3 &= F(x_1 - x_2 - x_3) + F(x_2 - x_1 - x_3). \end{aligned} \quad (53)$$

Этот факт можно проверить непосредственной подстановкой (53) в (51)-(52). Комбинации координат в аргументах функции F являются высшими аналогами запаздывающего и опережающего аргументов на двойной плоскости.

Оператор третьего порядка

$$\Delta^{(3)} \equiv \frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial}{\partial h^\dagger} \frac{\partial}{\partial h^\ddagger} = (e_1 + e_2 + e_3) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \quad (54)$$

пропорционален алгебраической единице, поэтому

$$\Delta^{(3)} F = (\Delta^{(3)} U_1) j_1 + (\Delta^{(3)} U_2) j_2 + (\Delta^{(3)} U_3) j_3 \quad (55)$$

для всякой гладкой функции $F(h, h^\dagger, h^\ddagger)$. Если функция F — h -голоморфная, то ввиду того, что оператор $\Delta^{(3)}$ содержит дифференцирования по h^\dagger и h^\ddagger , имеет место соотношение $\Delta^{(3)} F \equiv 0$, эквивалентное трем его компонентам:

$$\Delta^{(3)} U_i \equiv 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (56)$$

Соотношения (56) является 3-мерным аналогом условий гармоничности или гиперболической гармоничности, которым тождественно удовлетворяют голоморфные функции комплексной или соответственно двойной переменной.

Обсуждение и некоторое развитие изложенных идей можно найти в работе [47].

4.7 Конформная 2-мерная теория относительности

Расширим группу Пуанкаре, действующую на двумерном пространстве-времени \mathcal{M}_2 , до группы произвольных h -голоморфных преобразований, которые действуют на точки-события пространства-времени как на элементы алгебры \mathcal{H}_2 . Используя экспоненциальное представление для производной F' :

$$F'(h) = \epsilon |F'| (t, x) e^{j\psi(t, x)}, \quad (57)$$

приходим к заключению о том, что локально h -голоморфные преобразования осуществляют кроме известных в теории относительности бустов и отражений также растяжение длин векторов (скалярный множитель $|F'| (t, x)$). Будем рассматривать функцию $F = U + jV$ как комплексный потенциал опорного векторного поля 2-скорости или *опорного поля собственного времени*. Само поле 2-скорости u будет определяться формулой:

$$u = \frac{dF}{dh} = \frac{\partial U}{\partial t} + j \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (58)$$

в которой использованы определение оператора комплексного дифференцирования и гиперболические условия Коши-Римана. Квадрат модуля 2-скорости

$$|u|^2 = (\nabla U)^2 = (\nabla V)^2 = |F'|^2. \quad (59)$$

"Поле скоростей" собственного времени на всякой интегральной кривой Γ этого поля задается соотношением:

$$\frac{d\tau}{ds} = |F'|. \quad (60)$$

Теперь в рассматриваемой нами h -голоморфной теории относительности интервалы псевдоевклидовой длины и хроноинтервалы оказываются различными и связь между ними в каждой точке управляется гиперкомплексным потенциалом F .

Интегральные кривые поля ∇V — это пространственные сечения 2-мерного пространства-времени, ортогональные в каждой точке линиям времени. Таким образом, масштабный множитель "управляет" как ходом собственного времени, так и пространственными расстояниями.

Для произвольных движений пробных частиц промежутки времени и длины вычисляются:

$$\frac{d\tau}{ds} = \eta(\nabla U, w); \quad \frac{d\ell}{ds} = \eta(\nabla V, w), \quad (61)$$

где w — стандартный вектор 2-скорости пробной частицы ($|w| = 1$).

Простейший вариант вариационного принципа динамической теории гиперболического поля, учитывающий неголоморфность гиперболического потенциала внутри источников, определяется действием вида:

$$\mathcal{S}[F, \bar{F}] = \alpha \int_{\mathcal{H}_2} \{|F_{,h}|^2 - \mathcal{U}(|F_{,\bar{h}}|^2)\} dh \wedge d\bar{h}, \quad (62)$$

где первое слагаемое под интегралом является гиперболическим "кинетическим членом" и отвечает за динамику гиперболического потенциала в пустоте, а второе слагаемое представляет собой гиперболический "потенциальный член" и отвечает за свойства и вклад источников. Это последнее слагаемое зависит только от гиперболического модуля величины неголоморфности и в области вне источников, где неголоморфность обращается в нуль, оно определяет в действии некоторую "полную дивергенцию не дающую вклада в

уравнения движения. Стандартная процедура варьирования действия (62) по полевым переменным \bar{F} , F приводит к уравнениям поля, которые можно привести к виду:

$$\frac{1}{4}\square F = (\mathcal{U}'F_{,\bar{h}})_{,h} \quad (63)$$

— неоднородного волнового уравнения с источником в правой части, зависящим лишь от неголоморфности F . Как и следовало ожидать, уравнения поля получились нелинейными, поскольку поле F , как это следует из принципов развиваемой теории, описывает и свои источники за счет эффективного самодействия. В этом отношении развиваемая теория примыкает к вариантам единой теории поля Ми.

Замечательной особенностью уравнений (63) является наличие у них первого интеграла, независимо от конкретного вида потенциальной функции \mathcal{U} :

$$F_{,\bar{h}}(1 - \mathcal{U}') = \varphi(\bar{h}), \quad (64)$$

содержащего произвольную функцию $\varphi(\bar{h})$.

Явные выражения для плотности энергии алгебраизованной материи ε и её давления p , полученные с помощью стандартного формализма теории поля (теоремы Нетер), имеют вид:

$$\varepsilon = \mathcal{U} - \mathcal{U}'X + (1 - \mathcal{U}')\sqrt{XY}; \quad p = \mathcal{U} - \mathcal{U}'X - (1 - \mathcal{U}')\sqrt{XY}, \quad (65)$$

где $Y \equiv |F_{,h}|^2$.

С помощью изложенного в [48] супервариационного принципа можно рассчитать общий вид потенциала \mathcal{U} в рассматриваемой теории

$$\mathcal{U}(X) = 3X + U_0 + 2U_1 \ln \left| 1 - \frac{X}{U_1} \right| \quad (66)$$

где U_0 и U_1 — пара фундаментальных постоянных теории.

5 Дифференциально-геометрические аспекты теории финслеровых пространств Бервальда-Моора различных размерностей

С целью выявления фундаментальной взаимосвязи между скалярным полипроизведением и индуцированными им геометрическими объектами и в продолжение исследований этой взаимосвязи, начатых в работах М.Мацумото, Х.Шимада, С.Нумата, К.Окубо и Румынских геометров (см.[56 - ссылки [29-32] и [43]] и [61 - ссылки [3-4]]), были получены новые соотношения между m -степенью псевдо-нормы Бервальда-Моора и геометрическими объектами в классическом Финслеровском контексте ([61, §2 и 5-7]). Соотношения того же вида были исследованы в работах [60] и [58]. Их роль является методологической, что позволяет получить результаты, касающиеся свойств структуры (например, проективности [61]) или перейти от алгебраических аспектов теории метрик m -корня к аспектам, специфическим для дифференциальной геометрии Финслеровых пространств.

5.1 Описание полученных результатов

Исследование связностей, согласующихся с замечательными геометрическими структурами, было выполнено в работе [58], где для связностей, характерных для Финслеровой геометрии (Картан, Бартел, Мирон), авторы подчеркнули свойства индуцированных связностей на гиперплоскостях в контексте исследований средней Y -кривизны в случае N -экстремальности. В той же работе описано оригинальное программное обеспечение, разработанное авторами с целью выявления и использования геометрических объектов Финслерова типа, которые появляются при исследовании Y -минимальных подмногообразий. С

помощью символьных вычислений в пакете Maple были определены коэффициенты этих геометрических объектов для многообразий малых размерностей для метрик 3-й и 4-й степеней корня и для конформных метрик Бервальда-Моора. Описанный подход, реализованный нами с помощью Maple, был предложен М. Мацумото (см. [58 - ссылки [39-40]]) и имеет широкие возможности приложений для исследований анизотропных сред.

Более того, в работе [61, §3] автор указывает связности, которые существенно используются для определения, принадлежит ли Финслерово пространство к типу Бервальда-Моора или к типу Дугласа. Результаты, касающиеся пространств типа Бервальда-Моора являются оригинальными.

С другой стороны, в работе [54] пространства Ландсберга характеризуются с помощью определенных связностей (Вайсмана и Леви-Чивиты) и указаны связности, индуцированные ими в структурном и трансверсальном слоях расслоения.

В работе [49, §2-3] было проведено предварительное исследование касательного пространства, наделенного метрикой Бервальда-Моора, там же были определены тензоры ν -кривизны и T -тензор дуального пространства Бервальда-Моора для случая метрики m -корня типа Шимады; затем результаты были конкретизированы для случая дуальных пространств с метрикой m -корня и с индикатрисой, являющейся произведением импульсов. В этом случае классические результаты о взаимном сокращении кокасательного вектора кручения и T -вектора, полученные М. Мацумото и Х. Шимада [49 - ссылки [5,11]] для касательного расслоения, а также свойство S^3 -подобия дуального пространства Бервальда-Моора впервые получены и для дуального случая.

Определение связностей и индуцированных геометрических объектов на подмногообразиях в пространствах, наделенных метрикой m -корня, выполнено в работе [58] с помощью суммирования известных результатов и оригинального внесения их в код программы Maple с использованием макросов и дополнительных процедур, что упрощает использование кода и позволяет расширить результаты, полученные при исследовании индикатрисы.

Процедура для получения средней кривизны и минимальных (Y -экстремальных) поверхностей/гиперповерхностей и соответствующие результаты компьютерной симуляции представлены в работе [58], в которой имеются 2 Приложения, посвященные 4-мерному случаю. В них средняя кривизна и уравнения Y -экстремальных (гипер)поверхностей получены в явном виде при использовании символьного вычисления. Специфическим элементом оригинального исследования является вычисление в явном виде нормального поля подмногообразия (теоретически описанного в [58 - ссылка [40]]), сделанного в виде конкретного приложения с помощью программных процедур в результате решения системы нелинейных уравнений. Также средняя кривизна получена в результате применения процедур, характерных для релятивистского псевдо-Финслерова подхода, использующего энергию пространственно-подобного или светоподобного нормального векторного поля. Этот подход налагает ограничения на уровень подмногообразия для указанных практических приложений, цель которых — найти решения для уравнений Y -экстремальных подмногообразий.

Другая цель ранее запланированного исследования, касающаяся определения специфических типов когомологий в пространствах с метрикой m -корня, была достигнута в работах [63, 54], где оригинальное исследование было проведено для гомологии псевдо-Финслерова пространства, а именно для пространства Бервальда-Моора. Начало было положено в недавней работе [54 - ссылка [2]]. Эти работы впервые представляют новые результаты, касающиеся расслоенных структур Финслерова типа: в [63] доказано существование диффеоморфизма между 2-джет вертикальным расслоением индуцированным каноническим расслоением и расслоением произведения горизонтального, вертикального и смешанного расслоений 2-джетов индуцированных вторым расслоением. В [54] вводится связность Вайсмана. Показано, что пара связностей Леви-Чивиты и Вайсмана индуци-

руют пару связностей того же типа, что и исходные, в структурном расслоении, только если основное многообразие M является пространством Ландсберга, и что касательное пространство с разрезом (касательное пространство TM без образа нулевого сечения, обозначаемое далее TM_0) есть пространство Рейнхарта тогда и только тогда, когда основное многообразие есть пространство Римана. Далее были изучены двулистные джеты на TM_0 . Получена декомпозиция этого пространства и одномерная группа когомологии Чеха на TM_0 с коэффициентами из пучка базисных функций определена в терминах полей на листе 2-джета. Определена группа когомологии Мاستроджакомо по отношению к связности на структурном пучке индуцированной связностью на многообразии TM_0 и показано, что ассоциированная группа когомологии изоморфна 1-мерной группе когомологии Чеха на многообразии TM_0 , имеющей в качестве коэффициентов ростки функций на TM_0 , которые связаны с индуцированной связностью; в частности, для 4-мерного случая m -корня показано, что этот пучок изоморфен пучку базисных функций на TM_0 .

В работе [65] проведено исследование линейных систем кривых на проективной плоскости, имеющих несколько точек базы, иррациональных спиралей и невырожденных гладких проективных кривых с определенными свойствами. В ней впервые исследовалось существование гладких неприводимых и невырожденных кривых ранга d генератора g заданного в проективном пространстве (проблема $HC(n)$ Хальфена-Кастельнуово). Для областей D_{1n} и D_{2n} , построенных на плоскости $(d; g)$, с помощью кривых локализованных на рациональных поверхностях ассоциированных с некоторыми сечениями гиперэллиптического типа, и нескольких хорошо известных теорем, доказанных Чилиберто, Сернези и Пасареску, показано, что D_{1n} является просто связной. Более того, на основе использования результатов Горовица, Чилиберто, Харриса и Эйзенбуда в работе показано, что область D_n является требуемой лакунарной областью.

Геодезические и поля Якоби исследовались в работах [61, §2] и [60, §3], где уравнения геодезических и коэффициенты спреев были выведены и описаны для полиномиальных флаг-метрик. В работе [61] $h\nu$ -тензор кривизны определен для произвольной структуры m -корня; затем это используется для получения характеристик пространств Ландсберга и Бервальда. Соотношения между коэффициентами двух спреев для неразложимой метрики получены в явном виде для кубической метрики m -корня в работе [60, §6]. Все эти результаты являются оригинальными, дополняющими известные результаты, полученные для пространств m -корня М. Мацумото и Х. Шимада. Подчеркнута роль флаговой кривизны, играющей ключевую роль в описании поведения геодезических. Это прослеживается в работе [59] где автор описывает уравнения геодезических, возмущенных присутствием электромагнитного поля. В пространствах с Финслеровой геометрией 1-форма 4-потенциала оказывается анизотропной (она имеет вид горизонтальной 1-формы на касательном расслоении, имеющей специфические свойства).

Были введены и детально исследованы релятивистские модели с 4-мерными пространствами m -корня. Для такого случая были получены [66] оригинальные результаты расчета эффекта ОМПР (оптико-метрического параметрического резонанса) с приложениями к теории относительности и экспериментальной физике (детектирование гравитационных волн). Эта работа выполнялась в сотрудничестве с Российским физиком С.В. Сипаровым. Воздействия слабой деформации плоской псевдо-Финслеровой метрики на тензор электромагнитного поля были исследованы в [59], в частности — для случая метрики m -корня типа Бервальда-Моора. Там были получены обобщенные геодезические модели (§3.3) и подчеркнут физический смысл такого обобщения и его роль в уравнениях электромагнетизма в Финслеровых пространствах. Геодезические и уравнения Якоби исследовались также в [56, §1-2] в контексте структурной устойчивости систем дифференциальных уравнений второго порядка, где авторы получили оригинальные результаты для пучка кривых и для сил, которые отклоняют траектории от геодезических в случае конформной де-

формации структуры m -корня или локальной метрики Минковского (в §4-5). С помощью дополнительных программных средств при получении геодезических с помощью компьютера получены оригинальные процедуры для определения инвариантов, характеризующих устойчивость структур.

В работе [61, §3-6] исследовались пространства Бервальда и Ландсберга с метрикой m -корня и проективные плоские пространства, а в работе [60, §4] - кубические пространства. В [61, Т.17 и Т.18] автор характеризует Финслеровы проективные пространства типа m -корня, и в частности, Римановы проективные пространства типа m -корня [61, Т.19, 20 и Пр.22]. Все эти результаты являются оригинальными и для случая метрик m -корня дополняют известные результаты, полученные С. Баско, Ж. Жабо, Л. Тамасси и Ч. Винче.

В работе [56] в разделах 1-3 авторы представляют основные понятия, которые описывают теорию структурной устойчивости (ККЧ - Косамби - Картан - Черн), созданную П.Л. Антонелли, И. Букатару и В.С. Сабау [56 - ссылки [1-8, 48-49]] и разработанную В. Баланом и И.Р. Никола для биологических и экологических моделей ([56 - ссылки [10-13]]). Описаны пять инвариантов теории, а в Приложении даны оригинальные программы в Maple, которые определяют инварианты, характеризующие устойчивость Якоби динамических систем, ассоциированных с Финслеровым подходом. В §4-5 получены оригинальные результаты для случая конформно-деформированных метрик m -корня и описаны свойства ассоциированных алгебр деформации.

Для Z -, H - и E -спектров тензоров Бервальда-Моора и Чернова в 4-мерном пространстве в работах [52, 50] были расширены известные результаты для суперсимметричных положительно определенных тензоров. Алгебраические свойства этих тензоров индуцируют геометрические свойства: показано, что индикатрисы ассоциированной Финслеровой метрики нелинейчатые и компактны, и что задача минимизации расстояния между началом координат и индикатрисой имеет решение зависящее от Z -собственного значения с максимальной абсолютной величиной и с ассоциированным направлением, задаваемым порождающим Z -собственным вектором. Задача асимптотического поведения индикатрисы решается путем использования спектральных свойств суперсимметричного тензора ассоциированного с фундаментальной Финслеровой функцией. Авторами определены: векторы рецессии, вырожденные векторы, особые точки индикатрисы и наилучшее приближение первого ранга. Качественное описание трех типов собственных значений было получено в работе [57] при использовании теории резольвент для метрики Бервальда-Моора третьего ранга.

Предметами дальнейшего исследования являются уравнения Гамильтона, дуальность Лежандра и физические модели ассоциированные с пространствами с метриками m -корня на касательных и кокасательных расслоениях. В этом аспекте в работе [53] указано на существующий параллелизм между различными преобразованиями, имеющими физический смысл, и подчеркнута отношение типа Лежандра между Лагранжевым и Гамильтоновым формализмами. Исследована альтернатива связанная с использованием преобразований Рашевского, обычно используемых в механике, их вырожденная природа. Выявлен гиперболический характер фундаментальных функций Финслера и Картана и отличия от формализма касательного/кокасательного расслоений, а также соответствие между основными геометрическими объектами и дуальными к ним, заданными преобразованием Лежандра-Финслера для общих пространств Бервальда-Моора произвольной размерности.

В работах [69,70,67,68] построены модели для теорий гравитационного и электромагнитного полей, основанные на обобщенной модели Лагранжа, в частности, на Финслеровой локальной метрике Минковского типа Бервальда-Моора.

В работе [51] исследуется геометрия подмногообразий в пространствах с метрикой m -корня, а в работе [53] подчеркивается гиперболический характер метрики Бервальда-

Моора; в работе [51] разработан псевдо-Финслеров формализм для Финслеровых метрик типа локальных метрик Минковского, включая метрики Бервальда-Моора, особое внимание уделено объектам, позволяющим охарактеризовать минимальные поверхности. Исследованы линейные и нелинейные связности Картана и получены уравнения Гаусса-Вайнгартена, Гаусса-Кодацци, Петерсона-Майнарди и Риччи-Кюна. В работах [52,50] получены геометрические свойства индикатрисы Бервальда-Моора на основе развития спектральной теории ассоциированного суперсимметричного тензора; спектры получены с помощью пакета Maple 12.

Исследование классов когомологий для пространств, наделенных метрикой m -корня и изучение прилегающих расслоений расширяют известные результаты обращением к исходному контексту Финслерова пространства (в частности с локальной метрикой Минковского). Результаты являются оригинальными; они включают явное описание связности Вайсмана для вертикального слоя по отношению к вертикальному расслоению и доказательство того факта, что его листы представляют собой пространства Рейхарта [62]. Далее, в работе [63] в вертикальном слое Финслерова многообразия определен базис, адаптированный к расслоению Лиувилля, вертикальное расслоение 2-джета и листы вертикальных расслоений 2-джета трансверсального и смешанного типов, а также показано, что существует канонический диффеоморфизм между полным пространством вертикального расслоения 2-джета и одним из произведений расслоений вертикального, трансверсального и смешанного листов 2-джета.

Исследование существования гладких проективных кривых заданного ранга и рода в связи с задачей HC_n Хальфена-Кастельнуово было продолжено в работе [64]; здесь рассматривалась открытая задача $HC(n)$ Хальфена-Кастельнуово для гладких кривых в \mathbb{P}^n , $n > 6$ (для меньших размерностей задача уже решена); область параметров разделена на две части: лакунарная и нелакунарная области. Исследовалась первая из них: были определены препятствия к существованию и построены примеры кривых на рациональной и иррациональной поверхностях спирали. Сделаны заключения о лакунарной области.

Специфические вариационные особенности энергии в пространствах с метрикой m -корня и поведение геодезических были рассмотрены в работах [69, 70]; исследовались расширения геодезических Лоренцевского типа для релятивистских моделей обобщенно Лагранжевого типа, полученных при малых деформациях метрики Бервальда-Моора и локальной метрики Минковского. В работе [70] описан класс решений уравнений поля Эйнштейна для такой модели. В работе [55] система дифференциальных уравнений второго порядка рассмотрена в качестве расширений уравнений геодезических и исследована с использованием подхода ККЧ.

Исследование пространств с постоянной скалярной кривизной и постоянной флаговой кривизной было продолжено в работе [51]; там была рассмотрена горизонтальная кривизна, связанная с псевдо-Финслеровым многообразием. Показано, что в случае Бервальда-Моора горизонтальная и флаговая кривизны окружающего пространства исчезают, в то время, как кривизны, индуцированные на подмногообразиях, вообще говоря, нетривиальны.

Исследование реономных ККЧ-моделей было продолжено в работе [55]; оно расширяет автономный случай на реономный за счет геометризации классической теории ККЧ на 1-джет пространства. Здесь авторы исследуют соотношения между пространственными и временным полуспреями и определяют нелинейную связность 1-джет пространства. Они находят пять инвариантов теории и выявляют различия между реономным и автономным случаями, рассматривая геометрические объекты, связанные с индуцированными связностями и ККЧ инвариантами.

Литература

- [1] Рунд Х. Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М., Наука, 1981.
- [2] Bao D., Chern S. S. and Shen Z. An Introduction to Finsler Geometry. NY, Springer-Verlag, 2000.
- [3] Гарасько Г. И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М., Тетру, 2009.
- [4] Богословский Г. Ю. О специальной релятивистской теории анизотропного пространства-времени // *Доклады Академии Наук СССР*, 213, 1973, с. 1055.
- [5] Bogoslovsky G. Yu. A special relativistic theory of the locally anisotropic space-time, Part I. The metric and group of motions of the anisotropic space of events // *Nuovo Cimento*, B 40, 1977, p. 99;
Bogoslovsky G. Yu. A special relativistic theory of the locally anisotropic space-time, Part II. Mechanics and electrodynamics in the anisotropic space // *Nuovo Cimento*, B 40, 1977, p. 116.
- [6] Богословский Г. Ю. Теория локально анизотропного пространства-времени. М., Изд-во МГУ, 1992.
- [7] Киржниц Д. А., Чечин В. А. Космические лучи сверхвысоких энергий и возможное обобщение релятивистской теории // *Ядерная физика*, 15, 1972, с. 1051.
- [8] Сипаров С. В. Теория эффекта нулевого порядка для исследования геометрических свойств пространства-времени // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(6), 2006, с.155;
Siparov S. Theory of the Zero Order Effect Suitable to Investigate the Space-Time Geometrical Properties // *Acta Mathematica APN*, 24(1), 2008, p. 135;
Siparov S. On the problem of anisotropy in geometrodynamics // arXiv: 0809.1817 v3;
Сипаров С. В. К вопросу об анизотропной геометродинамике // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(10), 2008, с. 64;
Siparov S. Gravitation law and source model in the anisotropic geometrodynamics // arXiv: 0910.3408;
Сипаров С. В. Закон гравитации и модель источника в анизотропной геометродинамике // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(12), 2009, с. 140;
S. Siparov, Anisotropic metric for the gravitation theory — new ways to interpret the classical GRT tests // *BSG Proc.*, 17, 2010, p. 205;
S. Siparov, Anisotropic Geometrodynamics in Cosmological Problems // *AIP Conf. Proc.*, 1283, 2010, p. 222.
- [9] DeWitt B. S. Relativity, Groups and Topology. C. DeWitt and B.S. DeWitt, Eds. New York (Gordon and Breach) 1964.
- [10] Brans C. and Dicke R. H. Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation // *Phys. Rev.*, 124, 1961, p. 925.
- [11] Mannheim P. D. and Kazanas D. Newtonian limit of conformal gravity and the lack of necessity of the second order Poisson equation // *Gen. Rel. Gravit.*, 26, 1994, p. 337.
- [12] Moffat J. W. Nonsymmetric Gravitational Theory // *Phys. Lett.*, B 355, 1995, p. 447.
- [13] Bekenstein J. D. Relativistic gravitation theory for the modified Newtonian dynamics paradigm // *Phys. Rev.*, D 70, 2004, p. 083509.
- [14] Milgrom M. A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis // *Astrophys. J.*, 270, 1983, p. 384.
- [15] Lense J., Thirring H. Uber den Einfluss der Eigenrotation der Zentralkorper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie // *Phys. Z.*, 19, 1918, p. 156.

- [16] Ruggiero M. L., Tartaglia A. Gravitomagnetic effects // arXiv:gr-qc/0207065v2.
- [17] Сипаров С. В. К вопросу об анизотропной геометродинамике // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(10), 2008, с. 64;
Siparov S. On the problem of anisotropy in geometrodynamics // arXiv:0809.1817 v3.
- [18] Muller H., Chiow S. W., Herrmann S., Chu S., Chung K. Y. Atom Interferometry tests of the isotropy of post-Newtonian gravity // *Phys. Rev. Lett.*, 100, 2008, p. 031101; arXiv:gr-qc/0710.3768.
- [19] CMS Collaboration, Observation of Long-Range Near-Side Angular Correlations in Proton-Proton Collisions at the LHC // *JHEP*, 09, 2010, p. 091; arXiv:hep-ex/1009.4122v1.
- [20] Colladay D., Kostelecký V. A. Lorentz-violating extension of the standard model // *Phys. Rev.*, D 58, 1998, p. 116002.
- [21] Bailey Q. G., Kostelecký A. Signals for Lorentz violation in post-Newtonian gravity // *Phys. Rev.*, D 74, 2006, p. 045001.
- [22] Kostelecký V. A. (Ed.) CPT and Lorentz symmetry. Singapore, World Scientific, 1999;
CPT and Lorentz symmetry II, Singapore, World Scientific, 2002;
CPT and Lorentz symmetry III, Singapore, World Scientific, 2005;
CPT and Lorentz symmetry IV, Singapore, World Scientific, 2008;
CPT and Lorentz symmetry V, Singapore, World Scientific, 2011.
- [23] Blas D., Sibiryakov S. Technically natural dark energy from Lorentz breaking // arXiv:hep-ex.1104.3579v1.
- [24] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F. Finslerian spaces possessing local relativistic symmetry // *Gen. Relativ. Gravit.*, 31, 1999, p. 1565.
- [25] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group // *J. Math. Phys.*, 16, 1975, p. 1615.
- [26] Винтернитц П., Фриш И. Инвариантные разложения релятивистских амплитуд и подгруппы собственной группы Лоренца // *Ядерная физика*, 1, 1965, p. 889.
- [27] Bogoslovsky G. Yu. Lorentz symmetry violation without violation of relativistic symmetry // *Phys. Lett.*, A 350, 2006, p. 5.
- [28] Cohen A. G. and Glashow S. L. Very Special Relativity // *Phys. Rev. Lett.*, 97, 2006, p. 021601; arXiv:hep-ph/0601236v1.
- [29] Cohen A. G. and Glashow S. L. A Lorentz-Violating Origin of Neutrino Mass? // arXiv:hep-ph/0605036v1.
- [30] Gibbons G. W., Gomis J. and Pope C. N. General very special relativity is Finsler geometry // *Phys. Rev.*, D 76, 2007, p. 081701; arXiv:hep-ex/0707.2174.
- [31] Gibbons G. W., Gomis J. and Pope C. N. Deforming the Maxwell-Sim Algebra // *Phys. Rev.*, D 82, 2010, p. 065002; arXiv:hep-ex/0910.3220.
- [32] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F. Concerning the generalized Lorentz symmetry and the generalization of the Dirac equation // *Phys. Lett.*, A 323, 2004, p. 40; arXiv:hep-th/0402172.
- [33] Bogoslovsky G. Yu. Some physical displays of the space anisotropy relevant to the feasibility of its being detected at a laboratory // arXiv:gr-qc/0706.2621v1.
- [34] Богословский Г. Ю. Финслерова модель пространства-времени // *ЭЧАЯ*, 24, 1993, p. 813.
- [35] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F. On the possibility of phase transitions in the geometric structure of space-time // *Phys. Lett.*, A 244, 1998, p. 222; arXiv:gr-qc/9804082.
- [36] Siparov S. and Brinzei N. Space-time anisotropy: theoretical issues and the possibility of

- an observational test // arXiv:gr-qc/0806.3066 ;
 Brinzei N., Siparov S. On the possibility of the OMPR effect in spaces with Finsler geometry, Part I, // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 4, 2007, p. 41;
 Siparov S., Brinzei N. On the possibility of the OMPR effect in spaces with Finsler geometry, Part II // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 5, 2008, p. 56.
- [37] Voicu N. New considerations on Einstein equations in anisotropic spaces // *AIP Conf. Proc.*, 1283, 2010, p. 249.
- [38] Aguirre A., Burgess C.P., Friedland A. and Nolte D. Astrophysical Constraints on Modifying Gravity at Large Distances // *CQG*, 18, 2001, p. R223.
- [39] Павлов Д. Г., Кокарев С. С. Конформные калибровки геометрии Бервальда-Моора и индуцированные ими нелинейные симметрии // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(10), 5, 2008, p. 3.
- [40] Kokarev S.S. Are different geometries really that different? // *Proceedings of PIRT-2009* (Physical Interpretations of Relativity Theory), arxiv:0906.2921 .
- [41] Павлов Д. Г., Кокарев С. С. Римановы метрики, соприкасающиеся с 3-мерной финслеровой метрикой Бервальда-Моора // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(10), 5, 2008, с. 15.
- [42] Павлов Д. Г., Кокарев С. С. Аддитивные углы в пространстве \mathcal{H}_3 // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(10), 5, 2008, с. 25.
- [43] Павлов Д. Г., Кокарев С. С. Метрические бинглы и тринглы в \mathcal{H}_3 // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(11), 6, 2009, с. 42.
- [44] Соколов Н. П. Пространственные матрицы и их приложения. М., ГИФМЛ, 1960.
- [45] Kokarev S.S. Isometry classification of cubic homogeneous 3-dimensional forms // *Symmetry: Culture and Science*, 20, 1-4, 2009, p. 371-392.
- [46] Павлов Д. Г., Кокарев С. С. h -голоморфные функции двойной переменной и их приложения // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(13), 7, 2010, с. 44.
- [47] Павлов Д. Г., Кокарев С. С. Гиперболическая теория поля на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(13), 7, 2010, с. 78.
- [48] Павлов Д. Г., Кокарев С. С. Алгебраическая единая теория пространства-времени и материи на плоскости двойной переменной // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2(13), 7, 2010.
- [49] Atanasiu Gh., Neagu M. On Cartan spaces with the m -th root metric $\sqrt[m]{a^{i_1 i_2 \dots i_m} p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_m}}$ // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 2 (12), Vol 6, 2009; arXiv:0802.2887v2 math.DG 10 Oct 2008.
- [50] Balan V. Spectral properties and applications of numerical multilinear algebra of m -root structures // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics* 2 (10), vol. 5, 2008, pp. 101-108.
- [51] Balan V. Notable submanifolds in Berwald-Moor spaces // *BSG Proceedings 17* (ISI Proceedings), Geometry Balkan Press, 2010, pp. 21-30.
- [52] Balan V. Numerical multilinear algebra of symmetric m -root structures. Spectral properties and applications // *Symmetry: Culture and Science*, Symmetry Festival 2009, Symmetry in the History of Science, Art and Technology; Part 2; Geometric Approaches to Symmetry, Budapest, Hungary, 21, 1-3, 2010, pp. 119-131.
- [53] Balan V., Lebedev S. On the Legendre transform and Hamiltonian formalism in Berwald-Moor geometry // *Diff. Geom. Dyn. Syst.* 12, 1, 2010, pp. 4-11.
- [54] Balan V., Manea A. Leafwise 2-jet cohomology on foliated Finsler manifolds // *BSG Proceedings 16* (ISI Proceedings), Geometry Balkan Press, 2009, pp. 28-41.

- [55] Balan V., Neagu M. Jet geometrical extension of the KCC-invariants // *Balkan J. Geom. Appl.* 15 (ISI), 1, 2010, pp. 8-16; arXiv:math.DG/0906.2903v1.
- [56] Balan V., Nicola I-R. Berwald-Moor metrics and structural stability of conformally-deformed geodesic SODE // *Diff. Geom. Dyn. Syst.*, 1, 2009, 1, pp. 41-53.
- [57] Balan V., Perminov N. Applications of resultants in the spectral m -root framework // *Appl. Sci.* 12, 1, 2010, pp. 20-29.
- [58] Balan V., Pitea A. Symbolic software for Y-energy extremal Finsler submanifolds // *Appl. Sci.* 1, 2009, 1, pp. 19-34.
- [59] Brinzei N. Equations of electromagnetism in some special anisotropic spaces // *Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics*, 2 (10), 5, 2008, pp. 44-55.
- [60] Brinzei N. On cubic Berwald spaces // arXiv:math.DG/0810.4009v1; *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 17, 1&2, 2009, pp. 1-10.
- [61] Brinzei N. Projective relations for m -th root metric spaces // *Journal of the Calcutta Mathematical Society*, 5, 1&2, 2009, pp. 21-3.
- [62] Manea A. The Vaisman connection of the vertical bundle of a Finsler manifold // *Bull. Transilvania Univ. Braşov, Series III, Mathematics-Informatics, Physics*, 2, 51, 2009, pp. 199-206.
- [63] Manea A. Some new types of vertical 2-jets on the tangent bundle of a Finsler manifold // *Sci. Bull. Univ. Politehnica Bucharest, Series A Mathematics-Physics*, 172, 2010, 1, pp. 177-194.
- [64] O. Păsărescu Curves on some irrational scrolls // [technical report], submitted to Math. Nachrichten.
- [65] O. Păsărescu Curves on rational surfaces with hyperelliptic hyperplane sections // [technical report], submitted to Math. Nachrichten.
- [66] Siparov S., Brinzei N. Space-time anisotropy: theoretical issues and the possibility of an observational test // arXiv:gr-qc/0806.3066v2, pp. 1-17.
- [67] Voicu N. Anisotropy and analogies between gravity and electromagnetism // *"Physical Interpretation of Relativity Theory": Proceedings of XV International Meeting. (PIRT) 2009 Moscow*, 6-9 July 2009, pp. 124-132.
- [68] Voicu N. New considerations on Einstein equations in pseudo-Finsler spaces // *AIP Conf. Proceedings 1283 (Proc. of the Int. Conf. "Mathematics and Astronomy: a Joint Long Journey"*, Madrid, Spain, 23-27 Nov. 2009), Melville, New York, 2010, pp. 249-257.
- [69] Voicu-Brinzei N., Siparov S. A new approach to electromagnetism in anisotropic spaces // *BSG Proceedings 17 (ISI Proceedings)*, Geometry Balkan Press, Bucharest 2010, pp. 235-245; arXiv:0905.4747v2 [math-ph] 11 Nov 2009.
- [70] Brinzei N., Siparov S. Space-time anisotropy - mathematical formalism and the possibility of an experimental test // Proceedings of the 4-th Gamow International Conference in Odessa, "Astrophysics and Cosmology after Gamow: recent progress and new horizons" and 9-th Gamow Summer School "Astronomy and beyond: Astrophysics, Cosmology, Radioastronomy, High Energy Physics and Astrobiology 17-23 August, 2009, Odessa, Ukraine; "Astrophysics and Cosmology after Gamow"(AIP Conference Proceedings 1206), 2009, 152-162.

GEOMETRICAL MODELS OF THE LOCALLY ANISOTROPIC SPACE-TIME

V. Balan¹, G.Yu. Bogoslovsky^{2,3}, S.S. Kokarev^{3,4}, D.G. Pavlov³,
S.V. Siparov^{3,5}, N. Voicu⁶

¹ *University Politehnica of Bucharest, Bucharest, Romania*

² *Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, MSU, Moscow, Russia*

³ *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Fryazino, Russia*

⁴ *RSEC Logos, Yaroslavl, Russia*

⁵ *State University of Civil Aviation, St-Petersburg, Russia*

⁶ *"Transilvania" University of Braşov, Braşov, Romania*

vladimir.balan@upb.ro, bogoslov@theory.sinp.msu.ru, logos-center@mail.ru, geom2004@mail.ru,
sergey@siparov.ru, nico.brinzei@unitbv.ro

Lately, the problem of the Lorentz symmetry-breaking has been widely discussed in literature. It is worthy to note that, in addition to the construction of phenomenologically focused effective field theories, the research based on the Finslerian geometric models of space-time becomes more and more popular. Finsler approach to the Lorentz symmetry-breaking problem is characterized by the fact that there the Lorentz symmetry-breaking is not accompanied by the relativistic symmetry-breaking. This means that the preservation of the relativistic symmetry is a rigid criterion of the viability for any non-Lorentz-invariant effective field theory. Though this paper has a review character, it mainly contains original results obtained by the authors, concerning Finsler extensions of Relativity Theory.

Key Words: Lorentz-, Poincare- and gauge symmetry, spontaneous symmetry breaking, alternative gravity theories, space-time anisotropy, Finsler differential geometry.