ГАЛИЛЕЕВО НИЛЬПОТЕНТНОЕ ПРОСТРАНСТВО РАЗМЕРНОСТИ 3 С 2-МЕРНЫМ ВРЕМЕНЕМ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА.

А.И. Долгарев, И.А. Долгарев

Пензенский Государственный Университет, Пенза, Россия

delivar@yandex.ru

Исследованы кривые и поверхности. Определена кривизна кривой, кручением кривые не обладают. Доказана определяемость кривой функцией ее кривизны. Рассмотрены временные и пространственно-временные поверхности, определены их первая и вторая квадратичные формы, полная кривизна. Доказана определяемость поверхности коэффициентами их квадратичных форм.

Ключевые слова: нильпотентное галилеево пространство, 2-мерное время, кривизна кривой, определяемость кривой, временная поверхность, пространственно-временная поверхность, квадратичные формы поверхности, полная кривизна поверхности, определяемость поверхности.
Код УДК: 514.

Галилеево нильпотентное пространство размерности 3 с 2-мерным временем определено в [1], где обсуждены некоторые принципиальные вопросы. Настоящая работа является непосредственным продолжением [1], рассматривает геометрию этого пространства, которая является некоммутативной.

Свойства галилеева пространства-времени можно изучать в схеме Г. Вейля. Во многом эти свойства зависят от свойств алгебраической структуры, положенной в основу пространства. Рассматривается отображение пар точек пространства в галилеево векторное пространство, а также в более общую структуру – одуль Ли, [2, 3]. Выделяется пространство-время Галилея с 1-мерным временем, рассматриваемое как прямая сумма оси времени и евклидова пространства, [4, с.11-14]; все остальные пространства с галилеевым расстоянием между точками называются галилеевыми. Сюда относятся и пространства с некоммутативной геометрией, вызывающие все больший интерес. Значение галилеевой геометрии состоит в том, что она изучает локальные свойства окружающего нас пространства, неразрывно связанного со временем. Время многомерно, но еще не ясны подходы к изучению пространств с многомерным временем. Некоторые возможности дают некоммутативные структуры, в которых взаимосвязаны временные и пространственные компоненты. В [5,6] изучается некоммутативная галилеева геометрия 3-мерного пространства-времени с растраном, в котором время 2-мерно. Ниже рассмотрены геометрические свойства галилеева нильпотентного пространства размерности 3 с 2-мерным временем, определенного в [1]: введена кривизна линий, доказана основная теорема теории кривых. Изучаются временные и пространственно-временные поверхности, определены их квадратичные формы, полная кривизна поверхности, доказана основная теорема теории поверхностей.

Пространство с многомерным временем и 1-мерной пространственной компонентой есть пространство туннелей во времени.

1 Галилеево пространство с сибсоном с 2-мерным временем

1.1 Сибсон

Сибсон размерности 3 определен в [3] на многообразии $\mathbf{R}^3$ троек действительных чисел следующими операциями:

$$(x, y, z) + (a, b, c) = (x + a, y + b, z + c + ay); \tag{1}$$

$$t(x, y, z) = \left(xt, yt, zt + xy\frac{(t-1)t}{2}\right), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Операция сложения некоммутативна, нулевой является тройка $\vartheta = (0, 0, 0)$, противоположной для тройки $\sigma = (x, y, z)$ является тройка $-\sigma = -(x, y, z) = (-x, -y, -z + xy)$. Множество $(\mathbf{R}^3, +)$ с операцией сложения (1) является группой Ли, группа нильпотентна ступени 2. Операция (2) умножения $\omega_R(+)$ элементов группы $(\mathbf{R}^3, +)$ на действительные числа связана с операцией сложения свойствами

$$(t + s)\sigma = t\sigma + s\sigma, \quad s(t\sigma) = (st)\sigma, \quad 0\sigma = \vartheta, \quad 1\sigma = \sigma,$$

$$(-1)\sigma = -\sigma, \quad t(-\rho + \sigma + \rho) = -\rho + t\sigma + \rho.$$

Структура $\Sigma^3 = (\mathbf{R}^3, +, \omega_R(+))$ с операциями (1) и (2) является действительным одулем Ли – одулем Ли над полем $\mathbf{R}$. Нильпотентный одуль называется сибсоном, элементы сибсона называются сибсами. Одули над кольцом $\mathbf{K}$ на произвольной алгебраической структуре с внутренней бинарной операцией определены Л.В. Сабининым в [7], одули Ли рассмотрены в [3].

В Σ^3 обозначим: $\alpha = (1, 0, 0)$, $\beta = (0, 1, 0)$, $\gamma = (0, 0, 1)$. Для произвольного сибса справедливо однозначное разложение

$$\sigma = (x, y, z) = x\alpha + y\beta + z\gamma. \tag{3}$$

поэтому множество $\mathbf{Б} = (\alpha, \beta, \gamma)$ есть базис сибсона Σ^3 и сибсон Σ^3 является 3-мерным. Имеем коммутатор: $[\beta, \alpha] = -\beta - \alpha + \beta + \alpha = \gamma$. У сибсона Σ^3 два порождающих элемента α и β. Выполняется равенство:

$$(x, y, 0) + (a, b, 0) = (x + a, y + b, ay), \tag{4}$$

третья компонента сибсов порождается первыми двумя, сибсы α и β порождают подсибсон $< \alpha, \beta >$, совпадающий со всем сибсоном Σ^3.

1.2 Галилеева норма на сибсоне

Для сибсов в [3, с. 119-121] определено галилеево скалярное произведение и галилеева норма сибсов, в [1] указано два вида норм сибсов. Приведем здесь норму сибсов, согласно которой получается сибсон Σ^3_2 с 2-мерным временем; по [1] квадрат $\|\sigma\|^2_2$ нормы сибса $\sigma = (x, y, z)$ равен

$$\|\sigma\|^2_2 = xy, \text{ если } x \neq 0 \text{ или } y \neq 0; \quad \|\sigma\|^2_2 = z^2, \text{ если } x = y = 0.$$

Первые две компоненты сибсов считаются временными, третья компонента считается пространственной. Сибсы вида $(x, y, z), xy \neq 0$, называются галилеевыми, сибсы вида $(0, 0, z)$ называются евклидовыми. Всякий галилеев сибс перпендикулярен всякому евклидову сибсу. Евклидовы сибсы составляют 1-мерное евклидово пространство $\mathbf{V}^1$; галилеевы сибсы составляют временное многообразие $\mathbf{T}^2$, оно не замкнуто относительно операций на сибсоне Σ^3_2, т.е. не является алгебраической структурой, см. (4). Как отмечено в [1], 3-мерный сибсон Σ^3_2 с 2-мерным временем является неразделимой алгебраической структурой времени и пространства, причем временные компоненты порождают пространственную компоненту, (4).

Норма сибса σ есть корень квадратный из квадрата нормы:

$$\|\sigma\| = \sqrt{xy}, x \neq 0 \vee y \neq 0; \quad \|\sigma\| = |z|, x = y = 0. \tag{5}$$

Это финслерова норма на сибсоне.

Всякий сибс является суммой двух составляющих – временной и пространственной. Если для $\sigma = (x, y, z)$ обозначить, согласно (3):

$$x\alpha + y\beta = \tau, z\gamma = \vec{r},$$

то имеется однозначное разложение

$$\sigma = \tau + \vec{r}, \tau \in \mathbf{T}^2, \vec{r} \in \mathbf{V}^1, \tag{6}$$

здесь $\vec{r} = (0, 0, z)$ есть 1-мерный евклидов вектор; применение векторной символики оправдано.

1.3 Дифференцирование сибсонных функций

Отображение интервала $\mathbf{I}$, принадлежащего $\mathbf{R}$, в сибсон Σ^3 называется сибсонной функцией; обозначение сибсонных функций:

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in \mathbf{I}.$$

Покомпонентные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, являющиеся действительными функциями действительного аргумента, считаем их дифференцируемыми. В [3, с. 123 - 125] найдена производная сибсонной функции одного параметра. В вычислениях использовано следующее положение: предел сибсонной функции в точке есть кортеж пределов в этой точке компонент функции. Использованы операции (1) и (2) над сибсами. Норма сибсов не фиксируется. Следовательно, формулы дифференцирования и правила дифференцирования сибсонных функций сохраняют свой вид при различных нормах на сибсоне. Формула дифференцирования функции $\sigma(t)$ согласно [3, с. 124] такова:

$$\sigma'(t) = \left(x'(t), y'(t), z'(t)\left(\frac{1}{2}y'(t) - y(t)\right)\right). \tag{7}$$

В частности, если функции $x(t), y(t)$ постоянны, то

$$(C, y(t), z(t))' = (0, y'(t), z'(t)); (x(t), C, z(t))' = (x'(t), 0, z'(t) - Cx'(t)). \tag{8}$$

В (7) первая и вторая компоненты являются производными соответствующих компонент дифференцируемой функции $\sigma(t)$; третья компонента зависит от производных всех трех компонент исходной функции $\sigma(t)$. Как результат дифференцирования сибсонной функции в третьей компоненте, который обозначается ${}^{d}z$, имеем равенство:

$${}^{d}z = z'(t)\left(\frac{1}{2}y'(t) - y(t)\right). \tag{9}$$

Векторная (пространственная) составляющая сибса производной $\sigma'(t)$, в соответствии с (6), зависит от временных составляющих и, согласно (9), такова:

$${}^{d}\vec{r} = (0, 0, {}^{d}z) = \left(0, 0, z'(t)\left(\frac{1}{2}y'(t) - y(t)\right)\right). \tag{10}$$

Отображение области $\mathbf{D}$, содержащейся в $\mathbf{R}^2$, в сибсон Σ^3, есть сибсонная функция двух параметров

$$\sigma(t, v) = (x(t, v), y(t, v), z(t, v)), (t, v) \in \mathbf{D}.$$

Покомпонентные функции $x(t, v), y(t, v), z(t, v)$ считаем дифференцируемыми. Частные производные сибсонной функции $\sigma(t, v)$ отыскиваются по правилу (7). Смешанные производные второго порядка зависят от порядка дифференцирования: $\sigma_{tv} \neq \sigma_{vt}$.

1.4 Зависимость между компонентами сибса

В 3-мерном сибсоне Σ^3 имеется три независимых направления, которые определяются сибсами α, β, γ, п. 1.1. Всякий сибс σ однозначно разлагается по этим напрвлениям, см. (3); в разложении определяется компонента сибса в каждом направлении. Как показывает (4), между компонентами разложения есть зависимость, но направления α, β, γ независимы. Сравним разложение сибсов с разложением векторов из евклидова пространства $\mathbf{V}^3$ по базису $\mathbf{Б} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) : \vec{v} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Направления, определяемые векторами базиса, независимы, а компоненты x, y, z вектора $\vec{v}$ могут быть связаны некоторыми соотношениями. Например, возможно: $\vec{v} = (x, 0, x^2) = x\vec{i} + 0\vec{j} + x^2\vec{k}$. Приведенное разложение указывает на то, что вектор $\vec{v}$ не имеет компоненты в направлении вектора $\vec{j}$, а первая и третья компоненты вектора связаны соотношением $z = x^2$. Точно также и в сибсоне Σ^3_2 зависимости между временными направлениями α и β не существует, но между временными компонентами t^1, t^2 в разложении $\sigma = t^1\alpha + t^2\beta + x\gamma$ зависимость может быть, например, $t^2 = f(t^1)$, а может и не быть. Для события $(t^1, 1, x)$ в направлении β время зафиксировано значением 1, а в направлении α время течет равномерно. Сибс (kt^1, mt^2, x) при постоянных $k \neq m$ указывает, что скорости течения времени в направлениях α и β различны и постоянны. Скорости изменения времени могут быть изменяющимися, например, в событии $\sigma(t^1, t^2) = (u(t^1, t^2), v(t^1, t^2), x(t^1, t^2))$ и пространственная компонента зависит от временных параметров. В задании события $(t^1, t^2, x(t^1, t^2))$ указывается, что время в каждой из временных компонент течет равномерно и одинаково, а пространственная компонента функционально зависит от обеих временных компонент.

Согласно (5), длительность события $(0, 2, x)$ равна нулю, длительность событий $(1, 1, x), (\frac{1}{2}, 2, x)$ равна единице, длительность события (t^1, t^2, x) равна $\sqrt{t^1 t^2}$ и возрастает с изменением времени, а время течет вперед – в будущее; событие (0,0,2) длительности не имеет, протяженность его равна 2.

1.5 Пространства с сибсоном

Пусть $\mathbf{W}$ непустое множество, его элементы называются точками и обозначаются $A, B, \ldots$. Задав отображение $\mathbf{W} \times \mathbf{W} \longrightarrow \Sigma^3$, в котором каждой паре (A, B) соответствует единственный сибс σ, что записывается в виде $\sigma = AB$, и удовлетворяются аксиомы Г. Вейля, [2]:

1^o для всякой точки A и всякого сибса σ существует единственная точка B, что $AB = \sigma$;

2^o для любых трех точек A, B, C, если $AB = \sigma, BC = \tau$, то $AC = \sigma + \tau$;

получаем одулярное пространство с сибсоном, называемое ЛС-пространством, [3]. Для трех точек A, B, C имеем: $AB + BC + AC, BA = -AB, AA = \vartheta$.

Пространство с сибсоном является нильпотентным, его геометрия некоммутативна, [3]. Размерность сибсона есть размерность ЛС-пространства. Если $\mathbf{B} = (O, \alpha, \beta, \gamma)$ репер ЛС-пространства, $O \in \mathbf{W}$ – начало отсчета, и $\sigma = (x, y, z)$ в базисе $\mathbf{Б} = (\alpha, \beta, \gamma)$ сибсона, то координаты сибса $OM = \sigma$ в базисе $\mathbf{Б}$ называются координатами точки M в репере $\mathbf{B}$.

Вводя в сибсоне Σ^3 галилееву норму сибсов, получаем нильпотентное одулярное галилеево пространство-время с некоммутативной геометрией. Если норма сибсов есть (5), т.е. $\Sigma^3 = \Sigma^3_2$, то ЛС-пространство превращается в ФС-пространство, [1], далее обозначаем его $\mathbf{S}^3$. Точки пространства-времени $\mathbf{S}^3$ называются еще событиями, т.е. $\mathbf{S}^3$ есть пространство событий с 2-мерным временем.

Прямой линией в ЛС-пространстве, см. [3], определяемой точкой A и ненулевым сибсом σ, называется множество точек

$$< A, \sigma >= \{M | AM = v\sigma, v \in \mathbf{R}\}.$$

Плоскостью в ЛС-пространстве, определяемой точкой точкой A и независимыми сибсами σ, τ, называется множество точек

$$< A, \sigma, \tau >= \{M | AM = v\sigma + u\tau, (v, u) \in \mathbf{R}^2\},$$

при этом требуется $< \sigma, \tau > \neq \Sigma^3$; сибсы σ и τ независимы, если $\tau \notin < \sigma >$. Не всякие два независимых сибса определяют в ЛС-пространстве плоскость, например, сибсы α и β репера $\mathbf{B}$ плоскости не определяют, т.к. $< \alpha, \beta >= \Sigma^3$. Если $\sigma = AB, \tau = AC$, то плоскость $< A, \sigma, \tau >$ определяется тремя неколлинеарными точками: $< A, \sigma, \tau >= (A, B, C)$. Не через всякие три неколлинеарные точки в ЛС-пространстве проходит плоскость. Прямые и плоскости ЛС-пространства являются соответственно прямыми и плоскостями ФС-пространства.

Координатные оси $< O, \alpha >$ и $< O, \beta >$ являются временными, это изотропные прямые; координатная ось $< O, \gamma >$ – пространственная. Через всякую точку A ФС-пространства проходит единственная пространственная прямая, т.е. прямая с евклидовыми расстояниями между точками, см. (5). Всякая временная прямая $< A, \sigma >$, $\sigma = v\alpha + u\beta + w\gamma, v \neq 0, u \neq 0$, неизотропна, т.к. $\| \sigma \| = \sqrt{vu} \neq 0$.

Не существует координатной плоскости с сибсами α, β. Координатные плоскости $< O, \alpha, \gamma >$ и $< O, \beta, \gamma >$ обладают пространственными неизотропными прямыми, остальные прямые изотропны. ФС-пространство не содержит евклидовых плоскостей, т.к. сибсон Σ_2^3 содержит только 1-мерное евклидово подпространство $\mathbf{V}^1 =< \gamma >$, п, 1.2. Существуют плоскости $< A, \sigma, \gamma >$, где $\sigma = (v, v, w), v \neq 0$. Действительно, всякий сибс из оболочки $< \sigma, \gamma >$ имеет вид $s\sigma + g\gamma = \left(vs, vs, ws + v^2 \frac{(s-1)s}{2} + g \right)$, сибсы этого вида не исчерпывают сибсон, их первые две компоненты одинаковы. Плоскости $< A, \sigma, \gamma >$ галилеевы и $\sigma + \gamma = \gamma + \sigma$. Норма сибса σ равна $\| \sigma \| = |v|$. В репере (A, σ, γ) плоскости точка M плоскости имеет координаты $M = \left(s, ws + v^2 \frac{(s-1)s}{2} + g \right)$. При $s \neq 0 : \| OM \| = |sv|$, при $s = 0 : \| OM \| = |g|$. Расстояние от начала отсчета вычисляется так же, как в классической плоскости Галилея. Существуют и другие галилеевы плоскости ФС-пространства.

Для произвольных точек $A(a^1, a^2, a)$ и $B(b^1, b^2, b)$ имеем сибс

$$AB = (b^1 - a^1, b^2 - a^2, b - a - (b^1 - a^1)a^2),$$

см. [1] и [3]; компоненты сибса AB вычисляются по (1) с использованием противоположного сибса, п. 1.1; $AB = -OA + OB$. Если $b^1 \neq a^1$ $b^2 \neq a^2$, то, по (4), длительность $\| AB \|$ события AB равна

$$d = \| AB \| = \sqrt{(b^1 - a^1)(b^2 - a^2)}$$

и существует, т.е. действительная, или не существует, т.е. мнимая, в зависимости от знака произведения $(b^1 - a^1)(b^2 - a^2)$; расстояние между событиями A и B, или протяженность события AB, равна

$$d = \| AB \| = |b - a|,$$

она существует при $b^1 = a^1$ и $b^2 = a^2$, это расстояние между событиями, одновременными в каждой временной компоненте.

Если $A(a^1, a^2, a), \sigma = (r^1, r^2, r)$, то прямая $< A, \sigma >$ описывается сибсонной функцией

$$\sigma(v) = \left(r^1 v + a^1, r^2 v + a^2, tv + r^1 r^2 \frac{(v-1)v}{2} + r^1 a^2 v + a \right), v \in \mathbf{R};$$

плоскость $< A, \sigma, \gamma >$ описывается сибсонной функцией

$$\sigma(v,u) = \left(r^1 v + a^1, r^2 v + a^2, tv + r^1 r^2 \frac{(v-1)v}{2} + r^1 a^2 v + u + a\right), \quad (v,u) \in \mathbf{R}^2;$$

см. [3, с. 166, 167]. При $r^1 r^2 \neq 0$ прямая $< A, \sigma >$ описывается степенной функцией 2-го порядка. Это галилеев цикл. Функция 1-го порядка описывает изотропную прямую ФС-пространства.

2 Кривые ФС-пространства

2.1 Естественная параметризация кривой

Кривую ФС-пространства $\mathbf{S}^3$ определяем как отображение $\mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{S}^3, \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$; описывается кривая сибсонной функцией

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)), \ t \in \mathbf{I}.$$

Считаем, что функции $x(t), y(t), z(t)$ не менее двух раз дифференцируемы, т.е. существуют производные $\sigma'(t), \sigma''(t)$, таким образом, $\sigma(t)$ есть функция класса C^2. Считаем еще, что $\sigma'(t) \neq \vartheta$ и сибс не изотропный.

Кривая $\sigma(t)$ является регулярной класса C^2 все ее точки обыкновенные.

Для кривых пространства с сибсоном Σ^3_1 с 1-мерным временем в [3, с. 123] установлено, что положение касательной к кривой не зависит от ее параметризации. Производная сибсонной функции не зависит от нормы сибсов, как отмечено выше, в п. 1.3, поэтому и положение касательной к кривой ФС-пространства не зависит от ее параметризации.

Кривые принято изучать в естественной параметризации; это такая параметризация, в которой одуляр (в частности вектор) касательной имеет единичную, т.е. постоянную норму, а его производная ему перпендикулярна. Кривизна кривой определяется как норма одуляра главной нормали кривой, полученной в результате дифференцирования одуляра касательной. Для кривых галилеевых пространств важно, чтобы одуляр главной нормали был евклидовым, так как кривизна кривой является пространственным а не временным понятием. В соответствии с указанными соображениями, кривую в ФС-пространстве рассматриваем в параметризации, удовлетворяющей следующим условиям.

1^o. Сибс $\sigma(t)$, описывающий кривую, дифференцируем не менее двух раз.

2^o. Сибс производной первого порядка $\sigma'(t)$ обладает постоянной нормой и ненулевой.

3^o. Сибс производной второго порядка $\sigma''(t)$ является евклидовым и поэтому перпендикулярен сибсу производной первого порядка.

Перечисленным условиям удовлетворяют кривые в параметризации

$$\sigma(t) = (pt + a, \ qt + b, x(t)), \quad t \in \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}; \ pq \neq 0, \ p, \ q, \ a, \ b = const. \tag{11}$$

Такая параметризация кривой называется естественной. Производные обозначаем: $\dot{\sigma}, \dot{x}, \ddot{\sigma}, \ddot{x}$.

2.2 Кривизна кривой

Согласно формуле (7) дифференцирования сибсонных функций, имеем сибс касательной к кривой (11):

$$\dot{\sigma}(t) = \left(p, q, \dot{x}(t) + pq\left(\frac{1}{2} - t\right)\right). \tag{12}$$

Сибс $\dot{\sigma}$ определяет направление касательной к кривой, через всякую точку во всяком направлении в ФС-пространстве проходит кривая в естественной параметризации. Норма сибса первой производной постоянна и отлична от нуля:

$$\|\dot{\sigma}\| = \sqrt{pq}.$$

Норма является действительной или мнимой. Сибс $\dot{\sigma}$ определен в каждой точке регулярной кривой (11), тем самым вдоль кривой осуществляется касательное отображение в сибсон Σ_2^3.

Дифференцируем (12) по формуле (7). Сибс второй производной является евклидовым:

$$\ddot{\sigma}(t) = (0, 0, \ddot{x} - pq). \tag{13}$$

Согласно п. 1.2, евклидов сибс перпендикулярен всякому галиллеву сибсу, т.е.

$$\ddot{\sigma}(t) \perp \dot{\sigma}(t)$$

и сибс $\ddot{\sigma}(t)$ евклидов, т.е. это вектор нормали кривой (11); других нормалей кривая не имеет. Единичным вектором нормали кривой (11) является

$$\vec{n} = \gamma = (0, 0, 1). \tag{14}$$

По (9), (13) и (12) имеем пространственные составляющие сибсов производных

$$^{d}x = \dot{x}(t) + pq\left(\frac{1}{2} - t\right) - pb, \quad ^{dd}x = \ddot{x}(t) - pq. \tag{15}$$

А если функция (11) представлена в виде разложения (6) – т.е. в виде суммы временной и пространственной составляющих:

$$\sigma(t) = \tau(t) + \vec{r}(t), \tag{16}$$

то имеем векторы

$$^{d}\vec{r} = \left(0, 0, \dot{x}(t) + pq\left(\frac{1}{2} - t\right) - pb\right), \quad ^{dd}\vec{r} = (0, 0, \ddot{x} - pq). \tag{17}$$

В результате норма сибса второй производной записывается в виде модуля скалярного произведения векторов

$$\|\ddot{\sigma}\| = |\ddot{\sigma}\vec{n}| = |\ddot{x} - pq|. \tag{18}$$

Величина

$$\|\ddot{\sigma}\| = |\ddot{x} - pq| > 0 \tag{19}$$

называется *кривизной* кривой (11). Вектор $\ddot{\sigma}(t)$ есть *вектор кривизны* кривой (11). Установлена

Лемма. *Кривизна кривой (11) равна модулю скалярного произведения вектора кривизны кривой и единичного вектора ее нормали.* #

Функция

$$^{dd}x = \ddot{x} - pq = k(t) \tag{20}$$

называется *функцией кривизны* кривой (11). И сибсонная функция (13) тоже называется функцией кривизны кривой (11). Согласно (14),

$$\ddot{\sigma}(t) = (\ddot{x} - pq)\vec{n} = (\ddot{x} - pq)\gamma = k(t)\gamma. \tag{21}$$

Выполняется следующее

Свойство. *Модуль вектора кривизны $\ddot{\sigma}(t)$ является разностью функции второй производной пространственной составляющей кривой (11) и квадрата нормы сибса $\dot{\sigma}(t)$ касательной кривой (11) в естественной параметризации.*

\# См. (18).#

Пространственные составляющие сибсов производных (15) и вторая производная (17) векторной составляющей кривой (11) позволяют использовать скалярное произведение (21) евклидовых векторов из сибсона Σ_2^3. Этим мы воспользуемся ниже при изучении поверхностей.

Кручение кривой в галилеевых пространствах, см. [3], вводится при дифференцировании вектора кривизны, в результате дифференцирования получается вектор бинормали, перпендикулярный вектору главной нормали. В сибсоне ФС-пространства Σ_2^3 векторная составляющая 1-мерна, п. 1.2, поэтому кривые ФС-пространства *не обладают кручением.*

Для примера найдем кривизну прямой ФС-пространства. Параметрическое задание прямой указано в п. 1.5. Это задание линии в естественной параметризации, пространственная составляющая такова:

$$x(v) = tv + r^1 r^2 \frac{(v-1)v}{2} + r^1 a^2 v + a,$$

здесь $p = r^1, q = r^2$, параметр обозначен через v. Имеем согласно (9):

$${}^d x = r + r^1 r^2 v - \frac{1}{2} r^1 r^2 + r^1 a^2 + t^1 \left(\frac{1}{2} r^2 - r^2 v - a^2 \right) = r,$$

таким образом,

$$\dot{\sigma}(v) = (r^1, r^2, r), \ddot{\sigma} = (0,0,0) = \vartheta, \|\ddot{\sigma}\| = k = 0.$$

и кривизна прямой линии равна нулю.

2.3 Натуральное уравнение кривой

По функции (16) кривизны кривой (11) может быть получена сибсонная функция (11), описывающая кривую. Функция $x(t)$ пространственной составляющей сибсонной функции (11) является решением обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{x} = k(t) + pq,$$

полученного по (20) при условии, что функция кривизны $k(t)$ задана и задано направление $(p\alpha, q\beta, 0)$ временной составляющей линии (11).

Рассмотрим случай, когда $k(t) = 0$, числа p и q заданы. Здесь $\ddot{x} = pq; \dot{x} = pqt + C_1$, $x = \frac{1}{2} pqt^2 + C_1 t + C_2$. Линия, определяемая рассматриваемыми условиями, описывается в естественной параметризации функцией вида

$$\sigma(t) = (t^1(t), t^2(t), x(t)) = \left(pt + a, qt + b,\ \frac{1}{2} pqt^2 + C_1 t + C_2 \right).$$

Следующие начальные условия

$$t_0 = 0, t_0^1 = pt_0 + a, t_0^2 = qt_0 + b, x_0 = c, \dot{t}_0^1 = a, \dot{t}_0^2 = b, \dot{x}_0 = r$$

во множестве функций $\sigma(t, C_1, C_2)$ выделяют функцию со значениями $C_2 = c, C_1 = r$:

$$\sigma(t) = \left(pt + a, qt + b, rt + pq\frac{(t-1)t}{2} + pbt + c\right).$$

Действительно, по формуле производной (7) и по пространственной составляющей первой производной (9) имеем $\dot{t}^1 = p, \dot{t}^2 = q, \dot{x} = r$. Сибс касательной к линии $\sigma(t)$ есть $\dot{\sigma}(t_0) = (p, q, r)$. Рассматриваемая линия является прямой $< P, \dot{\sigma}(t_0) >$, где $P = P(t_0) = (a, b, c)$.

Мы получили, что всякая линия ФС-пространства, кривизна которой равна нулю, есть прямая линия.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Заданные ненулевые числа p, q и функция кривизны $k = k(t)$ однозначно определяют в ФС-пространстве кривую*

$$\sigma(t) = (pt + a, qt + b, x(t)),$$

пространственная составляющая которой $x(t)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\ddot{x} = k(t) + pq, \tag{22}$$

начальные условия

$$t_0 = 0, t_0^1 = pt_0 + a, t_0^2 = qt_0 + b, x_0 = s, \dot{t}_0^1 = a, \dot{t}_0^2 = b, \dot{x}_0 = r$$

выделяют единственную кривую, проходящую через точку $\sigma(t_0) = (pt_0 + a, qt_0 + b, s)$ в направлении сибса касательной $\dot{\sigma}(t_0) = (p, q, r)$.

Как уже отмечено в начале настоящего п. 2.3, обыкновенное дифференциальное уравнение (22) получено по функции кривизны (20), его решение есть функция $x(t)$ – пространственная составляющая кривой $\sigma(t)$. Временные составляющие сибсов $\sigma(t)$ и $\dot{\sigma}(t)$ заданы начальными условиями. Функция $x(t)$ отыскивается в результате двукратного интегрирования выражения $k(t) + pq$. Его значение при $t = t_0$ есть заданная величина s. Кривая $\sigma(t)$ проходит через заданную точку. Находя значение выражения $k(t) + pq$ после его однократного дифференцирования при $t = t_0$ имеем значение r и определяется сибс касательной.

По доказанной теореме, функция кривизны $k = k(t)$ однозначно определяет кривую ФС-пространства с точностью до положения в ФС-пространстве. Поэтому $k = k(t)$ является *натуральным уравнением* кривой ФС-пространства. Теорема об определяемости кривой ее функцией кривизны является основной теоремой теории кривых.

3 Поверхности ФС-пространства $\mathbf{S}^3$

3.1 Виды поверхностей

Поверхность описывается сибсонной функцией двух параметров. В ФС-пространстве имеется две возможности: (а) оба параметра функции временные, (б) один из параметров временной, другой пространственный. Поверхность первого вида называем *временной*, поверхность второго вида называем *пространственно-временной*.

Случай (а). *Временные поверхности*. Временные параметры обозначаем t, v. Поверхность задается функцией

$$\sigma(t, v) = (t, v, x(t, v)), (t, v) \in \mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^2. \tag{23}$$

Координатную сеть на поверхности образуют t-линии и v-линии:

$$\sigma(t, v_0) = (t, v_0, x(t, v_0)), \ \ \sigma(t_0, v) = (t_0, v, x(t_0, v)).$$

Одна из временных компонент может быть функцией другой, обе эти возможности принципиально не различаются. Пусть $v = v(t)$. Имеется линия на поверхности

$$\sigma(t) = \sigma(t, v(t)) = (t, v(t), x(t, v(t))).$$

Пространственную компоненту $x(t, v)$ считаем не менее двух раз дифференцируемой. Мы рассматриваем линии в естественной параметризации, поэтому $v(t) = qt + b$, см. (11) в п. 2.1. Таким образом, через всякую точку поверхности (23) во всяком направлении $q = \frac{dv}{dt}$ на поверхности проходит линия

$$\sigma(t) = \sigma(t, v(t)) = (t, v(t), x(t, v(t))), v(t) = qt + b. \tag{24}$$

Вдоль рассматриваемых линий на поверхности (23) осуществляется касательное отображение, определяющее сибсы производных:

$$\sigma_t = (1, 0, x_t(t, v) - v), \ \ \sigma_v = (0, 1, x_v(t, v)), \tag{25}$$

см. (8). Сибсы частных производных σ_t, σ_v не коллинеарны. Поверхность (23) регулярна, всякая ее точка является обыкновенной. Оболочка $< \sigma_t, \sigma_v >$ содержит все базисные сибсы α, β, γ сибсона Σ_2^3 и совпадает с Σ_2^3. Это означает, что во всякой своей обыкновенной точке регулярная поверхность не обладает касательной плоскостью.

Вдоль линии (24) поверхности (23) сибс касательной, вычисляемый согласно (7), таков:

$$\dot{\sigma}(t) = \left(1, \frac{dv}{dt}, x_t + x_v \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dv}{dt} - v(t)\right). \tag{26}$$

Случай (б). *Пространственно-временные поверхности.* Временной параметр обозначаем t, пространственный – u. Имеем поверхность

$$\sigma(t, u) = (t, v(t), x(t, u)), (t, u) \in \mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^2. \tag{27}$$

Выше, в п. 1.1, отмечено, что пространственная составляющая сибсов зависит от времени, см. (4); время от пространственной составляющей не зависит. Поэтому в (27) вторая компонента есть только функция времени.

По соображениям, рассмотренным выше в настоящем п. 3.1, в (27):

$$v(t) = qt + b.$$

На поверхности имеется сеть t-линий и u-линий:

$$\sigma(t, u_0) = (t, v(t), x(t, u_0)), \ \ \sigma(t_0, u) = (t_0, v(t_0), x(t_0, u)).$$

В направлении $\bar{q} = \dfrac{du}{dt}$ на поверхности проходит линия

$$\sigma(t) = \sigma(t, u(t)) = (t, qt + b, x(t, u)). \tag{28}$$

Сибсы частных производных, согласно (7) и (8), таковы:

$$\sigma_t = \left(1, q, x_t + q\left(\frac{1}{2} - t\right) - b\right), \ \ \sigma_u = (0, 0, x_u) = x_u \gamma. \tag{29}$$

Они независимы. В каждой точке поверхности существует касательная плоскость $< \sigma_t, \gamma >$. Сибс касательной к (28) есть

$$\dot{\sigma}(t) = \left(1, \frac{dv}{dt}, x_u \frac{du}{dt} + q\left(\frac{1}{2} - t\right)\right) = \left(1, q, x_u \bar{q} + q\left(\frac{1}{2} - t\right)\right). \tag{30}$$

3.2 Первая квадратичная форма поверхности

Эта квадратичная форма определяет норму сибсов касательных к линиям поверхности.

Временные поверхности. Временные компоненты изменяются, поэтому вдоль всех линий на поверхности касательные сибсы являются галилеевыми и первая квадратичная форма поверхности есть

$$ {}^{t}ds^2 = qdt^2. \tag{31} $$

Верхний левый индекс t означает, что равенство относится к временным поверхностям.

Пространственно-временные поверхности. Сибс σ_u евклидов, (29), т.е. вектор; судя по (29) и (30), это единственный вектор, т.е. евклидов сибс касательной к линиям на поверхности в каждой ее точке; остальные сибсы касательных галилеевы. Первая квадратичная форма поверхности есть

$$ {}^{u}ds^2 = qdt^2 \vee^{u} ds^2 = x_u^2 du^2. \tag{32} $$

Первое равенство применяется в случае, если время изменяется, второе – в случае постоянного времени. Верхний левый индекс u означает, что равенство относится к пространственно-временным поверхностям. По аналогии с коэффициентом первой квадратичной формы поверхности пространства-времени Галилея Γ^3, [3, с. 73], обозначаем

$$ x_u^2 = E. \tag{33} $$

3.3 Вторая квадратичная форма поверхности. Кривизна поверхности

Кривизну поверхности, как принято, находим на основе кривизны линий на поверхности. Кривизна линий является и нормальной кривизной линий на поверхности, так как нормалью поверхностей (23) и (28) является пространственная прямая ФС-пространства, единичный вектор нормали есть $\vec{n} = \gamma$. Используем методы галилеевой геометрии [3].

На поверхности фиксируем точку $P(t_0, v_0)$ или $P(t_0, u_0)$ и рассматриваем линии (24), соответственно (28), проходящие на поверхности во всевозможных направлениях q, соответственно $\bar{q}$.

Временная поверхность. Вычислим кривизну линии (24) поверхности (23), основываясь на п. 2.2. Находим вторую производную $\ddot{\sigma}$, используя первую производную (26):

$$ \ddot{\sigma} = \left(0, 0, x_{tt} + x_{tv}\frac{dv}{dt} + x_{tv}\frac{dv}{dt} + x_{vv}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + x_v\frac{d^2v}{dt^2} - q\right); $$

или в другой форме записи, учитывая, что $q = \dfrac{dv}{dt}$:

$$ \ddot{\sigma} = \left(0, 0, x_{tt} + 2\left(x_{tv} - \frac{1}{2}\right)\frac{dv}{dt} + x_{vv}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + x_v\frac{d^2v}{dt^2}\right). $$

По лемме, п. 2.2, кривизну линии можно получить, вычислив скалярное произведение векторов $\ddot{\sigma}$ и $\vec{n} = \gamma$:

$$ \ddot{\sigma}\vec{n} = x_{tt} + 2\left(x_{tv} - \frac{1}{2}\right)\frac{dv}{dt} + x_{vv}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + x_v\frac{d^2v}{dt^2}. \tag{34} $$

В полученном выражении выделим составляющую, позволяющую получить квадратичную форму. В фиксированной точке поверхности, через которую проходят всевозможные линии (24), коэффициенты скалярного произведения векторов $\ddot{\sigma}\vec{n}$ постоянны, изменяется направление $q = \dfrac{dv}{dt}$ линии. Нормальную кривизну линий на поверхности считаем равной

$$^{t}k_n = x_{tt} + 2\left(x_{tv} - \frac{1}{2}\right)\frac{dv}{dt} + x_{vv}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2,$$

вводим обозначения коэффициентов (по аналогии с обозначениями в [3]):

$$x_{vv} = A, x_{tv} - \frac{1}{2} = B, x_{tt} = C; \qquad (35)$$

(здесь пространственная компонента вектора $\gamma = \vec{n}$ равна 1 и поэтому $A = x_{vv} \cdot 1 = x_{vv}$ и т.д.) во введенных обозначениях нормальная кривизна линий на поверхности (23) равна

$$^{t}k_n = Aq^2 + 2Bq + C, \quad q = \frac{dv}{dt}, \qquad (36)$$

как в галилеевых пространствах, см. формулу (12.12) в [3, с. 74] и далее. Левая часть равенства для кривизны может быть записана в виде

$$\frac{Adv^2 + 2Bdvdt + Cdt^2}{dt^2},$$

числитель этой дроби принимаем за *вторую квадратичную форму* временной поверхности (23):

$$^{t}II = Adv^2 + 2Bdvdt + Cdt^2 \qquad (37)$$

с коэффициентами (35).

Для поверхности пространства-времени Галилея в [3, с. 81] получено, что ее полная кривизна равна определителю второй квадратичной формы. По аналогии с этим считаем, что в ФС-пространстве полная кривизна поверхности (23) равна

$$^{t}K = AC - B^2. \qquad (38)$$

Для пространственно-временной поверхности (28) имеем $v(t) = qt$ и

$$\sigma_t = \left(1, q, x_t + x_u\frac{du}{dt} + \frac{1}{2}q - qt\right), \quad \sigma_u = (0, 0, x_u) = x_u\gamma.$$

В направлении $\bar{q} = \dfrac{du}{dt}$ проходит линия

$$\sigma(t) = \sigma(t, u(t)) = (t, qt, x(t, u(t)).$$

Сибс касательной к этой линии есть

$$\dot{\sigma} = \left(1, q, x_t + x_u\frac{du}{dt} + q\left(\frac{1}{2} - t\right)\right).$$

Тогда

$$\ddot{\sigma} = \left(0, 0, x_{tt} + x_{tu}\frac{du}{dt} + x_{ut}\frac{du}{dt} + x_{uu}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + x_u\frac{d^2u}{dt^2} - q\right),$$

$$\ddot{\sigma}\vec{n} = x_{tt} - q + 2x_{tu}\frac{du}{dt} + x_{uu}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + x_u\frac{d^2u}{dt^2}. \tag{39}$$

Вводим нормальную кривизну:

$$^u k_n = x_{tt} - q + 2x_{tu}\frac{du}{dt} + x_{uu}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + x_u\frac{d^2u}{dt^2}. \tag{40}$$

Обозначим коэффициенты:

$$x_{uu} = A, x_{tu} = B, x_{tt} - q = C; \tag{41}$$

в этих обозначениях нормальная кривизна такова:

$$^t k_n = A\bar{q}2 + 2B\bar{q} + C.$$

Вторая квадратичная форма поверхности (28) есть

$$^t II = Adu^2 + 2Bdudt + Cdt^2$$

с коэффициентами (41). Полная кривизна поверхности (28) равна

$$^u K = AC - B^2. \tag{42}$$

Плоскость $< A, \sigma, \gamma >$ из п. 1.5 является пространственно-временной поверхностью. Находим: $A = 0, B = 0, C = r^2(r^1 - 1);^u K = 0$. Полная кривизна поверхности ФС-пространства равна нулю.

3.4 Основные теоремы теории поверхностей

Венцом теории поверхностей евклидова пространства является теорема Петерсона-Бонне об определяемости поверхности коэффициентами первой и второй квадратичных форм, доказательство которой сложно и драматично, [8, 9]. Основная теорема теории поверхностей пространства-времени Галилея Γ^3 доказана в [10], для нильпотентного галилеева пространства-времени – в [11]. Ниже мы установим основные теоремы для поверхностей ФС-пространства. Сначала рассмотрим временные поверхности.

Первая квадратичная форма временной поверхности (23) $\sigma(t, v) = (t, v, x(t, v))$ есть (31), ее коэффициент есть q – постоянная величина: вторая квадратичная форма поверхности есть (36) с коэффициентами (35). Считаем, что коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности (23) заданы:

$$q, \quad A(t, v), \quad B(t, v), \quad C(t, v). \tag{43}$$

По формулам (34) составляем систему дифференциальных уравнений с частными производными

$$\begin{cases} x_{vv} = A(t, v), \\ x_{vt} = B(t, v), \\ x_{tt} = C(t, v), \end{cases} \tag{44}$$

Частные производные второго порядка функции $x(t, v)$ подчиняются следующим условиям. Производные $(x_v)_t$ и $(x_v)_v$ вместе с соответствующими дифференциалами аргументов составляют полный дифференциал функции $x_v(t, v)$, поэтому функция $x_v(t, v)$ является решением дифференциального уравнения с полным дифференциалом

$$A(t, u)dv + B(t, v)dt = 0. \tag{45}$$

Также функция $x_t(t,v)$ является решением дифференциального уравнения с полным дифференциалом

$$B(t,v)dv + C(t,v)dt = 0. \tag{46}$$

Поэтому выполняются равенства:

$$A_t(t,u) = B_v(t,v), \quad B_t(t,v) = C_v(t,v). \tag{47}$$

Решение системы дифференциальных уравнений (44) есть семейство функций $x(t,v,C_i)$, зависящее также и от постоянных интегрирования C_i. Выбрать единственное решение можно задав начальные условия, определяющие поверхность, проходящую через заданную точку $P(t_0,v_0)$, и имеющую заданные независимые касательные сибсы (25) в точке P.

Теорема 2. *Решение системы дифференциальных уравнений с частными производными (44), удовлетворяющее начальным условиям*

$$t = t_0, v_0 = qt_0, x_0 = x(t_0,v_0), x_{t0} = x_t(t_0,v_0), x_{v0} = x_v(t_0,v_0). \tag{48}$$

определяет в ФС-пространстве единственную временную поверхность $\sigma(t,v) = (t,v,x(t,v))$*, проходящую через точку* $P(t_0,v_0)$ *и обладающую, согласно (25), касательными сибсами в точке* P:

$$\sigma_{t0} = (1,0,x_{t0} - v_0), \;\; \sigma_{v0} = (0,1,x_{v0})$$

Система уравнений (44) сводится к двум уравнениям (45) и (46), решения $(x_v)_t$ и $(x_v)_v$ которых позволяют получить уравнение с полным дифференциалом

$$x_t dt + x_v dv = 0,$$

а его решение дает семейство поверхностей, имеющих квадратичные формы с заданными коэффициентами (41). Начальные условия (48) выделяют единственную временную поверхность ФС-пространства, проходящую через данную точку $P(t_0,v_0)$ и имеющую заданные независимые касательные сибсы. #

Пространственно-временная поверхность (27) $\sigma(t,u) = (t,v(t),x(t,u))$ имеет квадратичные формы (32) и (36), их коэффициенты

$$q, E(t,u), A(t,u), B(t,u), C(t,u). \tag{49}$$

Пространственная составляющая $x(t,u)$ является решением системы дифференциальных уравнений с частными производными

$$\begin{cases} x_u^2 = E(t,u), \\ x_{uu} = A(t,u), \\ x_{ut} = B(t,u), \\ x_{tt} = C(t,u), \end{cases} \tag{50}$$

составленной по формулам (33) и (41). Коэффициенты второй квадратичной формы удовлетворяют условиям (47), несмотря на различие формул для коэффициентов $C(t,v)$ и $C(t,u)$, и добавляется условие

$$A = \frac{E_u}{2\sqrt{E}}, \tag{51}$$

см. (33) и (41). Выполняется

Теорема 3. *Решение системы дифференциальных уравнений с частными производными (50), удовлетворяющее начальным условиям*

$$t = t_0,\ u_0 = \bar{q}t_0,\ x_0 = x(t_0, u_0),\ x_{t0} = x_t(t_0, u_0),\ x_{u0} = x_u(t_0, u_0). \tag{52}$$

определяет в ФС-пространстве единственную пространственно-временную поверхность $\sigma(t, u) = (t, v(t), x(t, u))$, *проходящую через точку* $P(t_0, u_0)$ *и обладающую в точке* P, *согласно (29), касательными сибсами*

$$\sigma_{t0} = \left(1, q, x_{t0} + q\left(\frac{1}{2} - t_0\right)\right),\ \ \sigma_{u0} = x_{u0}\gamma.$$

\# Функция x_u определяется по формуле $x_u^2 = E$, отсюда получаем (51) - значение коэффициента A; функция x_t является решением уравнения

$$B(t, u)du + (C(t, u) - q)dt = 0,$$

затем получаем $x(t, u)$ как решение уравнения с полным дифференциалом

$$x_u du + x_t dt = 0.$$

Начальные условия (52) выделяют единственную пространственно-временную поверхность (27) с заданными коэффициентами (49). #

4 Заключение

Рассмотренные выше методы окажутся полезными в исследовании свойств нильпотентного одулярного галилеева пространства с многомерным временем и многомерной пространственной составляющей, при условии, что в пространстве задана норма сибсов, аналогичная рассмотренной выше. Но нет уверенности, что использованных методов будет достаточно в исследовании всех геометрических свойств пространства-времени. Наличие только двух временных измерений в ФС-пространстве позволило традиционно воспользоваться квадратичными формами поверхностей. Но и в случае 3-мерного времени при соответствующей норме сибсов возможно использование квадратичных форм.

Литература

[1] Долгарев А.И., Долгарев И.А. 3-мерное галилеево одулярное нильпотентное пространство с 2-мерным временем // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1(9), том 5, М.: МГТУ им Н.Э. Баумана, 2008, с. 140–152.

[2] Вейль Г. Пространство. Время. Материя. Лекции по общей теории относительности. М.: Едиториал УРСС, 2004, 456с.

[3] Долгарев А.И. Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств. Монография. Пенза: ИИЦ ПГУ, 2005, 306с.

[4] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989, 472с.

[5] Долгарев А.И., Зелева Е.В. Растран с 2-мерным временем // *Известия высших ученых заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки.* 3(7), Пенза: ИИЦ ПГУ, 2008, с. 20–29.

[6] Долгарев А.И., Зелева Е.В. Кривые 3-мерного галилеева пространства с растраном с 2-мерным временем // *Известия высших ученых заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки.* 1(9), Пенза: ИИЦ ПГУ, 2009, с. 55–68.

[7] Сабинин Л.В. Одули как новый подход к геометрии со связностью // *ДАН СССР*, 1977, N 5, с. 800–803.

[8] Выгодский М.Я. Дифференциальная геометрия. М.-Л., 1949, 512с.

[9] Фиников С.П. Курс дифференциальной геометрии. М.: КомКнига, 2006, 344с.

[10] Долгарев И.А. Системы дифференциальных уравнений в частных производных для поверхностей пространства Галилея. Дис. канд. физ.-мат. наук. Пенза: ПГУ, 2007, 119с.

[11] Долгарев И.А. Система дифференциальных уравнений с частными производными для поверхностей в некоммутативном галилеевом пространстве с сибсоном. Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского, том 36. Лобачевске чтения - 2007. Материалы международной молодежной научной школы-конференции (Казань, 16 - 19 дек. 2007г) - Казань: КМО - КГУ, 2007. с. 66–68.

GALILEAN NILPOTENT SPACES OF DIMENSION 3 WITH 2-DIMENSIONAL TIME. GEOMETRIC PROPERTIES

A.I. Dolgarew, I.A. Dolgarew

Penza State University, Penza, Russia

delivar@yandex.ru

Studied the curves and surfaces. Determined curvature, torsion curves do not possess. Proved definability of the curve function of its curvature. Considered time and space-time surface, defined by their first and second quadratic forms, the total curvature. Proved definability surface coefficients of their quadratic forms.

Key Words: nilpotent Galilean space, 2-dimensional time, curvature, definability of the curve, surface of time, surface of the space-time, quadratic forms of surface, total curvature, definability surface.