ОБ N-АРНЫХ ПОДГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОЙ N-АРНОЙ ГРУППЫ

А.М. Гальмак[1], **Г.Н. Воробьёв**[1], **В.Д. Балан**[2]

[1] *Могилевский государственный университет продовольствия, Могилёв, Беларусь*
[2] *Политехнический университетет, Бухарест, Румыния*

mgup@mogilev.by, vbalan@mathem.pub.ro

Для любого $n \geq 3$ на декартовой степени A^{n-1} группы A, обладающей подгруппой B такой, что факторгруппа A/B циклическая порядка, делящего $n-1$, определяется n-арная группа $< A^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$ с n-арной операцией $[\ ]_{n,n-1}$, аналогичной n-арной операции, которую Э. Пост определил для n-арных подстановок. Изучается строение n-арной группы $< A^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$. В частности, показано, что она обладает полуинвариантными, но неинвариантными n-арными подгруппами.

Ключевые слова: операция, группа, n-арная группа, полуинвариантная n-арная подгруппа.

1 Введение

Если A – группоид, $k \geq 2$, $l \geq 2$, то на k-той декартовой степени A^k можно определить [1, 2] вначале бинарную операцию

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \circ (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (x_1 y_2, x_2 y_3, \ldots, x_{k-1} y_k, x_k y_1),$$

а затем l-арную операцию

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,k} = \mathbf{x}_1 \circ (\mathbf{x}_2 \circ (\ldots (\mathbf{x}_{l-2} \circ (\mathbf{x}_{l-1} \circ \mathbf{x}_l)) \ldots)).$$

Если A – полугруппа, $k = n-1$, $l = n$, то ввиду леммы 2.3.1 [3],

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_n]_{n,n-1} = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}),$$

где

$$y_j = x_{1j} x_{2(j+1)} \ldots x_{(n-j)(n-1)} x_{(n-j+1)1} \ldots x_{(n-1)(j-1)} x_{nj}, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Кроме того, ввиду леммы 2.3.2 и замечания 2.3.3 [3],

$$y_j = \mathbf{x}_{1j} \mathbf{x}_{2\alpha(j)} \ldots \mathbf{x}_{(n-1)\alpha^{n-2}(j)} \mathbf{x}_{nj}, \quad j = 1, \ldots, n-1, \ \alpha = (12 \ldots n-1) \in S_{n-1}.$$

Для полугруппы A универсальная алгебра $< A_{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$ согласно теореме 2.3.4 [3] является n-арной полугруппой. Если же A – группа, то согласно теореме 2.9.3 [3], $< A_{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$ – n-арная группа.

Определние n-арной полугруппы, n-арной группы и других встречающихся в данной работе понятий есть в [3,4]. Здесь же напомним, что n-арную подгруппу $< B, [\ ] >$ n-арной группы $< A, [\ ] >$ называют инвариантной в ней, если

$$[x \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [Bx \underbrace{B \ldots B}_{n-2}] = \ldots = [\underbrace{B \ldots B}_{n-2} xB] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x]$$

для любого $x \in A$. Если же

$$[x \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-1} x]$$

для любого $x \in A$, то $< B, [\ ] >$ называют полуинвариантной в $< A, [\ ] >$.

Далее считаем $n \geq 3$.

2 Основной результат

Понятно, что если B – подгруппа группы A, то $< B_{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A_{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$. Покажем, что декартова степень H^{n-1} подмножества H группы A, не являющегося ее подгруппой, может быть замкнутой относительно n-арной операции $[\ ]_{n,n-1}$ и, более того, быть n-арной подгруппой в $< A_{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$.

Теорема 1. Пусть A – группа, B – ее собственная нормальная подгруппа, факторгруппа A/B является циклической и имеет порядок, делящий $n-1$. Тогда для любого смежного класса H факторгруппы A/B декартова степень H^{n-1} замкнута относительно n-арной операции $[\ ]_{n,n-1}$, а универсальная алгебра $< H^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$ является полуинвариантной, но неинвариантной n-арной подгруппой n-арной группы $< A_{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$.

Доказательство. Пусть факторгруппа A/B порождается смежным классом aB, то есть

$$A/B = \{B, aB, \ldots, a^{k-1}B\},$$

где k делит $n-1$. Будем для определенности считать, что $H = a^sB$ для некоторого $s = 0, 1, \ldots, k-1$.

Так как $(aB)^k = a^kB = B$, то $a^k \in B$, откуда и из условия k делит $n-1$, вытекает, что $a^{n-1} \in B$. Если теперь

$$\mathbf{h}_i = (h_i, \ldots, h_{i(n-1)}) = (a^sb_{i1}, \ldots, a^sb_{i(n-1)}), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

произвольные элементы из H^{n-1}, то, ввиду нормальности B в A, будем иметь

$$[\mathbf{h}_1 \ldots \mathbf{h}_n]_{n,n-1} = (y_1, \ldots, y_{n-1}),$$

где

$$y_j = a^sb_{1j}a^sb_{2(j+1)} \ldots a^sb_{(n-j)(n-1)}a^sb_{(n-j+1)1} \ldots a^sb_{(n-1)(j-1)}a^sb_{nj} = a^{sn}b_j$$

для некоторого $b_j \in B$. Но тогда, ввиду $a^{n-1} \in B$,

$$y_j = a^{sn}b_j = a^s(a^{n-1})^sb_j = a^sb_j^{'}$$

для некоторого $b_j^{'} \in B$. Следовательно, $y_j \in H$, откуда

$$[\mathbf{h}_1 \ldots \mathbf{h}_n]_{n,n-1} \in H^{n-1},$$

что означает замкнутость множества H^{n-1} относительно n-арной операции $[\ ]_{n,n-1}$. Таким образом, $< H^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$ – n-арная полугруппа.

Рассмотрим теперь в $< A^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$ уравнение

$$[\mathbf{x}\mathbf{h}_2 \ldots \mathbf{h}_{n-1}]_{n,n-1} = \mathbf{g} \tag{1}$$

где

$$\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_{n-1}) = (a^sc_1, \ldots, a^sc_{n-1}) \in H^{n-1}, \quad (c_1, \ldots, c_{n-1}) \in B.$$

Элементы $\mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_{n-1}$ были определены выше и также принадлежат множеству H^{n-1}. Так как $< A^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$ – n-арная группа, то уравнение (1) имеет решение

$$\mathbf{x} = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in A^{n-1}.$$

Приравнивая j-ые компоненты в левой и правой частях (1), получим

$$a_ja^sb_{2(j+1)} \ldots a^sb_{(n-j)(n-1)}a^sb_{(n-j+1)1} \ldots a^sb_{(n-1)(j-1)}a^sb_{nj} = a^sc_j.$$

Ввиду нормальности B в A и условия $a^{n-1} \in B$, левая часть последнего равенства принимает вид $a_j a^{(n-1)s} d = a_j b$ для некоторых $d, b \in B$, а само это равенство переписывается в виде $a_j b = a^s c_j$. Но тогда $a_j = a^s c_j b^{-1}$, где $c_j, b^{-1} \in B$. Следовательно, $a_j \in a^s B = H$,

$$\mathbf{x} = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in H^{n-1}.$$

Это означает, что уравнение (1) разрешимо в $< H^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$.

Аналогично доказывается разрешимость в $< H^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ уравнения

$$[\mathbf{h}_1 \ldots \mathbf{h}_{n-1}\mathbf{y}] = \mathbf{g}$$

для любых $\mathbf{h}_1 \ldots \mathbf{h}_{n-1}, \mathbf{g} \in H^{n-1}$. Тогда, согласно критерию Поста [5], $< H^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ – n-арная группа.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ – произвольный элемент из A^{n-1}. Используя нормальность B в A и условие $a^{n-1} \in B$, получим

$$[\mathbf{x}\underbrace{H^{n-1}\ldots H^{n-1}}_{n-1}]_{n,n-1} = \{[\mathbf{x}\mathbf{h}_2 \ldots \mathbf{h}_n]_{n,n-1} | \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n \in H^{n-1}\} =$$

$$= \{[(x_1, \ldots, x_{n-1})(a^s b_{21}, \ldots, a^s b_{2(n-1)}) \ldots (a^s b_{n1}, \ldots, a^s b_{n(n-1)})]_{n,n-1} \mid b_{ij} \in B\} =$$
$$= \{(x_1 a^s b_{22} \ldots a^s b_{(n-1)(n-1)} a^s b_{n1}, \ldots, x_{n-1} a^s b_{21} \ldots a^s b_{(n-1)(n-2)} a^s b_{n(n-1)}) \mid b_{ij} \in B\} =$$
$$= \{(x_1 b_1, \ldots, x_{n-1} b_{n-1}) \mid b_1, \ldots, b_{n-1} \in B\} = x_1 B \times \ldots \times x_{n-1} B,$$

то есть

$$[\mathbf{x}\underbrace{H^{n-1}\ldots H^{n-1}}_{n-1}]_{n,n-1} = x_1 B \times \ldots \times x_{n-1} B. \tag{2}$$

Аналогично доказывается равенство

$$[\underbrace{H^{n-1}\ldots H^{n-1}}_{n-1}\mathbf{x}]_{n,n-1} = B x_1 \times \ldots \times B x_{n-1}. \tag{3}$$

Из нормальности B в A вытекает равенство правых частей равенств (2) и (3), а значит и равенство левых частей этих равенств. Таким образом,

$$[\mathbf{x}\underbrace{H^{n-1}\ldots H^{n-1}}_{n-1}]_{n,n-1} = [\underbrace{H^{n-1}\ldots H^{n-1}}_{n-1}\mathbf{x}]_{n,n-1},$$

что означает полуинвариантность $< H^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ в $< A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$.

Так как $B \neq A$, то найдутся такие $u, v \in A$, что $uB \neq vB$. Положим

$$w = (a^{-1})^s v (a^{-1})^{(n-2)s}, \tag{4}$$

и выберем в A^{n-1} элемент $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ так, что

$$x_1 = u,\ x_2 = w. \tag{5}$$

Если теперь предположить инвариантность $< H^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ в $< A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$, то

$$[\mathbf{x}\underbrace{H^{n-1}\ldots H^{n-1}}_{n-1}]_{n,n-1} = [H^{n-1}\mathbf{x}\underbrace{H^{n-1}\ldots H^{n-1}}_{n-2}]_{n,n-1}$$

для выбранного $\mathbf{x}$. Применим (2) к левой части полученного равенства, а в правой части, используя нормальность B в A, проведем вычисления, аналогичные тем, которые были сделаны при получении (2). В результате будем иметь

$$(x_1 B, x_2 B, \ldots, x_{n-1} B) = (a^s x_2 a^{(n-2)s} B, \ldots, a^s x_{n-1} a^{(n-2)s} B, a^s x_1 a^{(n-2)s} B).$$

Следовательно, $x_1B = a^s x_2 a^{(n-2)s}B$, откуда, ввиду (4) и (5), вытекает $uB = vB$, что противоречит выбору $uB \neq vB$. Таким образом, $< H^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$ не является инвариантной в $< A^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$. Теорема доказана.

Согласно теореме 1, всякий смежный класс H факторгруппы A/B из этой теоремы определяет полуинвариантную n-арную подгруппу $< H^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$ n-арной группы $< A^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$. Поэтому существует n-арная факторгруппа $< A^{n-1}/H^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$. Возникает вопрос: как связаны между собой n-арные факторгруппы, определяемые различными смежными классами факторгруппы A/B?

Так как, согласно предложению 7.4 [6], всякая полуинвариантная n-арная подгруппа $< V, [\ ] >$ n-арной группы $< U, [\ ] >$ определяет на ней конгруэнцию ρ_V, классы которой совпадают со смежными классами n-арной факторгруппы $< U/V, [\ ] >$, то представляет интерес еще один вопрос: как связаны между собой конгруэнции n-арной группы $< A^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$, которые определяются полуинвариантными n-арными подгруппами, построенными с помощью различных смежных классов факторгруппы A/B из теоремы 1?

Ответы на сформулированные вопросы содержатся в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть H – произвольный смежный класс из теоремы 1. Тогда:
1) $< A^{n-1}/H^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} > = < A^{n-1}/B^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} > = < (A/B)^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$;
2) $\rho_{H^{n-1}} = \rho_{B^{n-1}}$.

Доказательство. 1) Полагая в (2) $H = B$, получим

$$[\mathbf{x}\underbrace{B^{n-1}\dots B^{n-1}}_{n-1}]_{n,n-1} = x_1B \times \dots \times x_{n-1}B, \tag{6}$$

где $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in A^{n-1}$, откуда и из (2) вытекает

$$[\mathbf{x}\underbrace{H^{n-1}\dots H^{n-1}}_{n-1}]_{n,n-1} = [\mathbf{x}\underbrace{B^{n-1}\dots B^{n-1}}_{n-1}]_{n,n-1}$$

для любого элемента $x \in A^k$. Поэтому n-арные факторгруппы $< A^{n-1}/H^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$ и $< A^{n-1}/B^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$ совпадают.

Совпадение n-арных факторгрупп $< A^{n-1}/B^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$ и $< (A/B)^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >$ вытекает из (6).

2) Так как по предложению 7.4 [6]

$$< A^{n-1}/\rho_{B^{n-1}}, [\ ]_{n,n-1} > = < A^{n-1}/B^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >,$$

$$< A^{n-1}/\rho_{H^{n-1}}, [\ ]_{n,n-1} > = < A^{n-1}/H^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} >,$$

то из 1) вытекает

$$< A^{n-1}/\rho_{B^{n-1}}, [\ ]_{n,n-1} > = < A^{n-1}/\rho_{H^{n-1}}, [\ ]_{n,n-1} >,$$

Это означает совпадение конгруэнций $\rho_{B^{n-1}}$ и $\rho_{H^{n-1}}$. Теорема доказана.

Теорему 2 можно сформулировать иначе, более конкретно.

Теорема 3. Пусть A – группа, B – ее собственная нормальная подгруппа, факторгруппа A/B является циклической, порождается элементом aB и имеет порядок k, делящий $n-1$: $A/B = \{B, aB, \dots, a^{k-1}B\}$. Тогда:

1) справедливы следующие равенства для n-арных групп:

$$< A^{n-1}/B^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} > = < A^{n-1}/(aB)^{n-1}, [\ ]_{n,n-1} > = \dots$$

$$\ldots = < A^{n-1}/(a^{k-1}B)^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} > = < (A/B)^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >;$$

2) справедливы следующие равенства для конгруэнций

$$\rho_{B^{n-1}} = \rho_{(aB)^{n-1}} = \ldots = \rho_{(a^{k-1}B)^{n-1}}$$

3 Следствия и примеры

Полагая в теореме 1 $H = B$, получим

Следствие 1. Пусть A – группа, B – ее собственная нормальная подгруппа, факторгруппа A/B является циклической, порождается смежным классом aB и имеет порядок, делящий $n-1$. Тогда универсальная алгебра $< (aB)^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ является полуинвариантной, но неинвариантной n-арной подгруппой n-арной группы $< A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$.

Напомним, что согласно Э. Посту [5] (см. также [7]), группа A называется обертывающей для n-арной группы $< H, \eta >$, если она порождается множеством H, а бинарная операция в группе A и n-арная операция η связаны условием

$$\eta(x_1 x_2 \ldots x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$$

для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$. Множество

$$B = \{a_1 \ldots a_{n-1} | a_1, \ldots, a_{n-1} \in H\}$$

является нормальной подгруппой в A, факторгруппа A/B по которой – циклическая, имеющая порядок, делящий $n-1$. Группу B называют соответствующей для n-арной группы $< H, \eta >$.

Следствие 2. Пусть $< H, \eta >$ – n-арная группа, A и B – ее обертывающая и соответствующая группы, aB – смежный класс, порождающий факторгруппу A/B, $H_s = a^s B$ $(s = 0, 1, \ldots, |A/B| - 1)$. Тогда $< H_s^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ – полуинвариантная, но неинвариантная n-арная подгрупа n-арной группы $< A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$.

Согласно обратной теореме Поста о смежных классах [5, 7], если факторгруппа A/B группы A по ее нормальной подгруппе B является циклической с образующим элементом aB и имеет порядок, делящий $n-1$, то $< aB, \eta >$ – n-арная группа с n-арной операцией

$$\eta(a_1 a_2 \ldots a_n) = a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Обертывающей группой для $< aB, \eta >$ является A, а соответствующей группой – B.

Если распространить действие операции η на всю группу A:

$$\eta(g_1 g_2 \ldots g_n) = g_1 g_2 \ldots g_n,\ g_1, g_2, \ldots, g_n \in A,$$

то $< H, \eta >$ становится n-арной подгруппой n-арной группы $< A, \eta >$, производной от группы A. Легко проверяется справедливость следующего, более общего утверждения.

Предложение 1. Если факторгруппа A/B является циклической с образующим элементом aB и имеет порядок k, делящий $n-1$, то для любого $s = 0, 1, \ldots, k-1$ $< H_s = a^s B, \eta >$ – инвариантная n-арная подгрупа n-арной группы $< A, \eta >$.

Если $< A, \eta >$ – n-арная группа, то на декартовой степени A^{n-1} можно определить [3] n-арную операцию $\widetilde{\eta}$ аналогично n-арной операции $[\ \ ]_{n,n-1}$:

$$\widetilde{\eta}((a_{11}, \ldots, a_{1(n-1)})(a_{21}, \ldots, a_{2(n-1)}) \ldots (a_{n1}, \ldots, a_{n(n-1)})) =$$

$$= (\eta(a_{11} a_{22} \ldots a_{(n-1)(n-1)} a_{n1}), \eta(a_{12} \ldots a_{(n-2)(n-1)1} a_{(n-1)1} a_{n2}), \ldots, \eta(a_{1(n-1)} a_{21} \ldots a_{n(n-1)})).$$

По теореме 5.4.1 [3] $< A^{n-1}, \widetilde{\eta} >$ – n-арная группа.

Замечание 1. Понятно, что для любой группы A и ее производной n-арной группы $< A, \eta >$ n-арные операции $[\ \ ]_{n,n-1}$ и $\widetilde{\eta}$ совпадают. Это позволяет получить утверждение теоремы 1 о том, что $< H^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ – n-арная группа, как следствие предложения 1 и теоремы 5.4.1 [3].

Замечание 2. n-арная группа $< A, \eta >$ из предложения 1 является объединением своих непересекающихся инвариантных n-арных подгрупп $< H_s, \eta >$, $s = 0, 1, \ldots, k-1$:

$$A = H_0 \bigcup H_1 \bigcup \ldots \bigcup H_{k-1},\ H_i \bigcap H_j = \varnothing (i \neq j).$$

В то же время, n-арная группа $< A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ из теоремы 1 или, что то же самое, n-арная группа $< A^{n-1}, \widetilde{\eta} >$ не является объединением своих непересекающихся n-арных подгрупп $< H_s^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$. Например, объединение

$$H_0^{n-1} \bigcup H_1^{n-1} \bigcup \ldots \bigcup H_{k-1}^{n-1}$$

не содержит элемент $(h_0, h_1, \ldots, h_{k-1}) \in A^{n-1}$, где $h_j \in H_i$ для любого $j = 0, 1, \ldots, k-1$.

Пример 1. Пусть Z_{n-1} – кольцо классов вычетов по модулю $n-1$ $(n \geq 3)$, $H_s = s + (n-1)Z$ – его элементы $(s = 0, 1, \ldots, n-2)$. Так как Z/H_0 – аддитивная циклическая группа порядка $n-1$, порождаемая классом вычетов H_1, то по теореме 1 $< H_s^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ – полуинвариантная, но неинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы $< Z^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$. В частности, этому утверждению при $s = 1$ удовлетворяет класс вычетов H_1.

Если $n = 2$, то в тернарной группе $< Z^2, [\ \ ]_{3,2} >$ имеются полуинвариантные, но неинвариантные тернарные подгруппы $< (2Z)^2, [\ \ ]_{3,2} >$ декартова квадрата четных чисел и $< (1+2Z)^2, [\ \ ]_{3,2} >$ декартова квадрата нечетных чисел.

Заметим, что если $< Z, \eta >$ – тернарная группа, производная от аддитивной группы Z целых чисел, то тернарные подгруппы $< (2Z)^2, \eta >$ и $< (1+2Z)^2, \eta >$ инвариантны в $< Z^2, \eta >$.

Полагая в теореме 1 $n = 3$, получим

Следствие 3. Если A – группа, B – ее подгруппа индекса 2, $a \notin B$, то $< B^2, [\ \ ]_{3,2} >$ и $< (B)^2, [\ \ ]_{3,2} >$ полуинвариантные, но неинвариантные тернарные подгруппы тернарной группы $< A^2, [\ \ ]_{3,2} >$.

Пример 2. Полагая в следствии 3, $A = S_n$ – симметрическая группа степени n, $B = A_n$ – знакопеременная группа, $S_n \backslash A_n$ – множество всех нечетных подстановок из S_n, видим, что в тернарной группе $< S_n^2, [\ \ ]_{3,2} >$ имеются полуинвариантные, но неинвариантные тернарные подгруппы $< A_n^2, [\ \ ]_{3,2} >$ и $< (S_n \backslash A_n)^2, [\ \ ]_{3,2} >$.

Если η – тернарная операция, производная от операции в группе S_n, то в тернарной группе $< S_n^2, \eta >$ тернарные подгруппы $< A_n^2, \eta >$ и $< (S_n \backslash A_n)^2, \eta >$ инвариантны.

Пример 3. Если $E(2)$ – множество всех движений плоскости, $E_1(2)$, $E_2(2)$ – множества всех движений плоскости первого и второго рода соответственно, то по следствию 3 в тернарной группе $< E^2(2), [\ \ ]_{3,2} >$ имеются полуинвариантные, но неинвариантные тернарные группы $< E_1^2(2), [\ \ ]_{3,2} >$ и $< E_2^2(2), [\ \ ]_{3,2} >$.

Аналогичное утверждение справедливо для группы $E(3)$ всех движений пространства.

Пример 4. Если D_n – диэдральная группа, C_n и B_n – ее подгруппы поворотов и отражений соответственно, то по следствию 3 в тернарной группе $< D_n^2, [\ \ ]_{3,2} >$ имеются полуинвариантные, но неинвариантные тернарные подгруппы $< C_n^2, [\ \ ]_{3,2} >$ и $< B_n^2, [\ \ ]_{3,2} >$.

4 m-арные матрицы

Упорядоченный набор $(A_1, A_2, \ldots, A_{m-1})$ матриц одного и того же порядка n над полем комплексных чисел C Э. Пост назвал [5] m-арной или полиадической матрицей над C. На множестве всех m-арных матриц, у которых определители всех компонент отличны от нуля, Э. Пост определил m-арную операцию

$$[A_1 \ldots A_m] = [(A_{11}, \ldots, A_{1(m-1)}) \ldots (A_{m1}, \ldots, A_{m(m-1)})] = (Y_1, \ldots, Y_{m-1}), \tag{7}$$

где

$$Y_j = A_{1j}A_{2(j+1)} \ldots A_{(n-j)(n-1)}A_{(n-j+1)1} \ldots A_{(n-1)(j-1)}A_{nj},\ j = 1, \ldots, m-1.$$

Э. Пост доказал, что указанное множество вместе с n-арной операцией (7) является m-арной группой, которую он назвал m-арной линейной группой.

Мы будем рассматривать упорядоченные наборы матриц одного и того же порядка над произвольным полем. Множество всех упорядоченных наборов $A = (A_1, \ldots, A_{m-1})$ матриц одного и того же порядка n над полем F, у которых определитель каждой компоненты A_j отличен от нуля, обозначим через $GL(n, m-1, F)$. Элементы этого множества, следуя Э. Посту, будем называть m-арными матрицами над F.

Ясно, что множество $GL(n, m-1, F)$ совпадает с $(m-1)$-ой декартовой степенью полной линейной группы $GL(n, F) : GL(n, m-1, F) = (GL(n, F))^{m-1}$, а операция (7), определенная на $GL(n, m-1, F)$, совпадает с операцией $[\ \ ]_{m,m-1}$ на $(GL(n, F))^{m-1}$. Поэтому, полагая в теореме 2.9.3 [3], $A = GL(n, F)$, получим

Предложение 2. Множество $GL(n, m-1, F)$ замкнуто относительно m-арной операции $[\ \ ]_{m,m-1}$, а универсальная алгебра $< GL(n, m-1, F), [\ \ ]_{m,m-1} >$ является m-арной группой.

Так как $GL(n, m-1, C) = (GL(n, C))^{m-1}$, а операция (7), как уже отмечалось, совпадает с операцией $[\ \ ]_{m,m-1}$, то из предложения 2 вытекает отмеченный выше результат Э. Поста.

Следствие 4. [5] Множество $GL(n, m-1, C)$ замкнуто относительно m-арной операции $[\ \ ]_{m,m-1}$, а универсальная алгебра $< GL(n, m-1, C), [\ \ ]_{m,m-1} >$ является m-арной группой.

Во множестве $GL(n, m-1, F)$ выделим подмножество $SL(n, m-1, F)$ всех m-арных матриц, у которых определитель каждой компоненты равен единице поля F. Так как $SL(n, m-1, F) = (SL(n, F))^{m-1}$, то, снова применяя теорему 2.9.3 [3], получим

Предложение 3. Множество $SL(n, m-1, F)$ замкнуто относительно m-арной операции $[\ \ ]_{m,m-1}$, а универсальная алгебра $< SL(n, m-1, F), [\ \ ]_{m,m-1} >$ является m-арной подгруппой m-арной группы $< GL(n, m-1, F), [\ \ ]_{m,m-1} >$.

m-Арную группу $< SL(n, m-1, F), [\ \ ]_{m,m-1} >$ по аналогии с бинарным случаем естественно называть m-арной специальной линейной группой.

Понятно, что при $m = 2$ m-арные матрицы – это обычные матрицы, а m-арные группы $GL(n, 1, F)$ и $SL(n, 1, F)$ совпадают соответственно с полной линейной группой $GL(n, F)$ и специальной линейной группой $SL(n, F)$.

Далее будем использовать стандартные обозначения: F_q или $GF(q)$ – поле Галуа, то есть конечное поле с числом элементов $q = p^\alpha$, p – простое; $GL(n, q)$ – полная линейная группа над полем $GF(q)$, то есть группа всех обратимых матриц порядка n над $GF(q)$; $SL(n, q)$ – специальная линейная группа степени n над полем $GF(q)$, то есть подгруппа всех матриц из $GL(n, q)$ с определителем, равным единице поля $GF(q)$.

Так как факторгруппа $GL(n,q)/SL(n,q)$ изоморфна мультипликативной группе F_q^* поля F_q, которая является циклической и имеет порядок $q-1$, то полагая в обратной теореме Поста о смежных классах и в предложении 1 $= GL(n,q)$, $B = SL(n,q)$, получим

Предложение 4. Пусть $< GL(n,q), \eta >$ – q-арная группа, производная от группы $GL(n,q)$. Тогда любой смежный класс H факторгруппы $GL(n,q)/SL(n,q)$ замкнут относительно q-арной операции η, а универсальная алгебра $< H, \eta >$ является инвариантной q-арной подгруппой в $< GL(n,q), \eta >$. Если порождает $GL(n,q)/SL(n,q)$, то обертывающей и соответствующей группами для q-арной группы $< H, \eta >$ являются соответственно группы $GL(n,q)$ и $SL(n,q)$.

Теорема 4. Пусть $n \geq 2$, $q \geq 3$. Тогда:

1) $< GL(n,q-1,F_q), [\ \ ]_{q,q-1} >$ и $< SL(n,q-1,F_q), [\ \ ]_{q,q-1} >$ – неполуабелевые q-арные группы с пустым центром, а значит и без единиц;

2) любой смежный класс H факторгруппы $GL(n,q)/SL(n,q)$ замкнут относительно q-арной операции $[\ \ ]_{q,q-1}$, а универсальная алгебра $< H^{q-1}, [\ \ ]_{q,q-1} >$ является полуинвариантной, но неинвариантной q-арной подгруппой в $< GL(n,q-1,F_q), [\ \ ]_{q,q-1} >$; в частности $< SL(n,q-1,F_q), [\ \ ]_{q,q-1} >$ полуинвариантная, но неинвариантная q-арная подгруппа в $< GL(n,q-1,F_q), [\ \ ]_{q,q-1} >$;

3) полуинвариантные q-арные подгруппы $< H^{q-1}, [\ \ ]_{q,q-1} >$ и $< SL(n,q-1,F_q), [\ \ ]_{q,q-1} >$ из 2) определяют на $< GL(n,q-1,F_q), [\ \ ]_{q,q-1} >$ одну и ту же конгруэнцию: $\rho_{H^{q-1}} = \rho_{sL(n,q-1,F_q)}$.

4) для любого смежного класса H группы $GL(n,q)/SL(n,q)$ q-арные факторгруппы $< GL(n,q-1,F_q)/H^{q-1}, [\ \ ]_{q,q-1} >$, $< GL(n,q-1,F_q)/SL(n,q-1,F_q), [\ \ ]_{q,q-1} >$ и $< (GL(n,q)/SL(n,q))^{q-1}, [\ \ ]_{q,q-1} >$ совпадают.

Доказательство. Для сокращения записей положим $A = GL(n,q)$, $B = SL(n,q)$.

1) По теореме 2.9.3 [3] $< A^{q-1}, [\ \ ]_{q,q-1} >$ и $< B^{q-1}, [\ \ ]_{q,q-1} >$ – q-арные группы. Их неполуабелевость следует из неабелевости групп A и B и предложения 2.8.2 [3], а отсутствие элементов в центрах указанных q-арных групп гарантирует предложение 2.9.6 [3]. Осталось заметить, что

$$GL(n,q-1,F_q) = A^{q-1},\ SL(n,q-1,F_q) = B^{q-1}.$$

2) факторгруппа A/B является циклической и имеет порядок $q-1$. Далее применяется теорема 1.

3) Используется утверждение 2) теоремы 2.

4) Используется утверждение 1) теоремы 2. Теорема доказана.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10РА-002) и Румынской академии наук.

Литература

[1] Гальмак А.М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях // *Весці НАН Беларусі*, 2008, №3, с.28-34.

[2] Гальмак А.М. Многоместные операции на декартовых степенях // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2008, №.2, с.172-192.

[3] Гальмак А.М. Многоместные операции на декартовых степенях. Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

[4] Гальмак А.М. n-арные группы // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 2007, №2(18), т.4, с.76-95.

[5] Post E.L. Polyadic groups // *Trans. Amer. Math.Soc.*, 1940, Vol. 48, №2, p.208-350.

[6] Гальмак А.М. Конгруэнции полиадических групп. Минск: Беларуская навука, 1999. – 182 с.

[7] Русаков С.А. Алгебраические n-арные системы. Мн.: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

ON N-ARY SUBGROUPS OF A SPECIAL N-ARY GROUP

A.M. Gal'mak[1], G.N. Vorob'ev[1], V.D. Balan[2]

[1] *Mogilev State University of Food Technology, Belarus*

[2] *Polytechnical University of Bucharest, Romania*

mgup@mogilev.by, vbalan@mathem.pub.ro

We consider the Cartesian power A^{n-1} $(n \geq 3)$ of the group A, which admits a subgroup B such that the factor group A/B is cyclic and with its order dividing $n-1$. On A^{n-1} we construct an $n-$ary group structure $< A^{n-1}, [\ \ ]_{n,n-1} >$ with its operation similar to the one defined by E. Post for $n-$ary permutations. This structure is shown to admit semi-invariant - but generally not invariant, $n-$ary subgroups.

Key Words: operation, group, n-ary group, semiinvariant subgroup.