АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И МАТЕРИИ НА ПЛОСКОСТИ ДВОЙНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Д.Г. Павлов[1], С.С. Кокарев[1,2]

[1] *НИИ Гиперкомплексных систем в геометрии и физике, Фрязино, Россия*

[2] *Российский научно-образовательный центр "Логос", Ярославль, Россия*

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

На основе алгебры двойных чисел развивается алгебраическая версия теории относительности, занимающая промежуточное положение между специальной и общей теориями относительности. В области пространства-времени, свободной от материи, основной объект развиваемой теории — гиперболический потенциал F — является h-голоморфной функцией двойной переменной и описывает расщепление пространства-времени на временное и пространственные направления в конформно-деформированном плоском пространстве-времени Минковского. Показано, что эффект конформной деформации является принципиально наблюдаемым с помощью экспериментов, включающих сравнение темпа хода часов, движущихся по различным мировым линиям. Область пространства-времени, занятая веществом, определяется условием $F_{,\bar{h}} \neq 0$. Динамика гиперболического потенциала описывается действием специального вида, в котором потенциальный член является функцией гиперболического модуля неголоморфности $F_{,\bar{h}}$. Показано, что уравнения поля представляют собой сопряженные нелинейные волновые уравнение с самодействием. Особенностями полученных уравнений являются: а) безусловное наличие 1-интеграла; б) условие совместности (интегрируемости), которое определяет класс допустимых полей $\mathcal{G}(\mathcal{H}_2)$. Последнее условие, которое можно рассматривать как обобщение условия h-голоморфности, является решающим для построения согласованной и содержательной единой физической модели пространства-времени и материи в 2-мерном случае. Рассмотрен достаточно общий пример статической 2-мерной вселенной. Обсуждается соотношение развиваемого подхода с СТО и ОТО. Формулируется принцип суперэкстремума, позволяющий вычислять фундаментальные константы теории и начально-краевые условия.

Ключевые слова: гиперболическое поле, h-голоморфность, неголоморфность, конформные преобразования, суперэкстремум.

1 Введение

В работах [1]-[2] были сделаны наброски теории голоморфных функций двойной переменной. В качестве физических приложений теории были отмечены 2-мерные краевые задачи, приводящие к волновому уравнению, алгебраическая формулировка специальной теории относительности и динамическая теория некоторых фундаментальных скалярных полей.

Интересная возможность, которую предоставляют h-голоморфные функции двойной переменой и которая осталась за рамками статей [1]-[2], связана с интерпретацией конформных преобразований, определяемых h-голоморфными функциями, как переходов между неинерциальными системами отсчета в плоском двумерном пространстве-времени. Включение в рассмотрение конформных деформаций пространства-времени естественным образом расширяет рамки двумерной специальной теории относительности, в кинематике которой задействуются лишь изометрические преобразования, трактуемые как переходы между инерциальными системами отсчета. Хорошо известно, что подобная возможность в принципе отсутствует в трех- и четырехмерных псевдоевклидовых пространствах (из-за отсутствия соответствующей бесконечномерной конформной группы симметрий). Менее известно, что такая возможность имеется в двумерии, и совсем мало известно о наличии бесконечномерных конформных групп в целой серии плоских геометрий финслерова типа, — пространствах с метрикой Бервальда-Моора (частным случаем которых, кстати, является и пространство двойных чисел [5, 6]).

Подход, который мы развиваем в настоящей статье, навеян аналогией свойств двойных чисел и функций от них со свойствами комплексных чисел и функций от них. Хорошо известно, что среди приложений комплексного анализа особое место занимает теория комплексного потенциала, которая эффективно работает при решении эллиптических 2-мерных задач математической физики. Компоненты любой аналитической функции комплексной переменной являются сопряженными гармоническими функциями и решают некоторую статическую (например, в случае электростатики) или стационарную (в случае стационарных течений в гидродинамике идеальной жидкости) задачу в пространстве вне источников с соответствующими граничными условиями. Плоскость двойной переменной, в отличие от комплексной плоскости, обладает естественной псевдоевклидовой структурой и поэтому теория гиперболического потенциала решает некоторые гиперболические задачи математической физики в 2-мерном пространстве-времени. Отталкиваясь от этой аналогии, мы идем в своих построениях дальше и даем физико-геометрическую интерпретацию гиперболическому потенциалу как универсальному полю, отвечающему как за геометрические свойства пространства-времени, так и за физические свойства его материального наполнения.

Статья состоит из четырех частей и заключения. В первой части мы приводим сведения из теории двойных чисел и функций от них, необходимые для дальнейшего изложения. Во-второй части мы рассматриваем кинематические и геометрические аспекты подхода и выводим формулу для относительной конформной деформации хода часов, которую можно использовать в качестве основы для экспериментальных тестов теории или для сравнения ее предсказаний с соответствующими предсказаниями СТО и ОТО. Третья часть посвящена принципам динамической теории гиперболического потенциала. В этой части мы рассматриваем неголоморфные гиперболические потенциалы. Мы постулируем, что именно неголоморфность гиперболического потенциала отличает области пространства-времени, заполненные материей, от вакуумных областей. Важное соотношение (70), возникающее как условие интегрируемости уравнений движения, обеспечивает согласованность и содержательность физической интерпретации рассматриваемого подхода. Применяя стандартные теоретико-полевые рассуждения, мы получаем явный вид компонент тензора энергии-импульса гиперболического поля-вещества (в пустоте, где потенциал голоморфен, эти компоненты всегда обращаются в нуль или описывают энергию физического вакуума $\mathcal{U}(0)$) и выводим выражения, связывающие гиперболический потенциал с локальными плотностью энергии и давлением. Для иллюстрации подхода мы рассматриваем задачу о нахождении гиперболического потенциала, управляющего статической вселенной с источником в виде одномерного покоящегося упругого стержня.

В разделе 5 мы формулируем важную и на наш взгляд перспективную с точки зрения приложений концепцию *супервариационного принципа*, который позволяет вычислять существенные фундаментальные константы теории и даже вид ее лагранжиана, не выходя за рамки теории. Ряд рассмотренных примеров применения супервариационного принципа обнаруживает его нетривиальность и содержательность как в рамках стандартных физических теорий, так и в рамках излагаемого нами подхода. Для теории h-поля мы вычисляем суперэкстремальный потенциал с точностью до пары постоянных.

В заключении мы резюмируем основные положения развиваемого подхода.

Основные сведения по алгебре двойных чисел и теории относительности предполагаются известными. Читатель может познакомиться с ними по руководствам и статьям [1, 3, 5, 7].

2 Некоторые предварительные сведения

2.1 СТО на плоскости двойной переменной

Остановимся вкратце на некоторых ключевых положениях 2-мерной СТО, формулируя их в терминах алгебры двойных чисел. Будем отождествлять элементы $\mathcal{H}_2$ с точками-событиями 2-мерного пространства-времени Минковского $\mathcal{M}_2$. Таким образом, с каждым элементом $h \in \mathcal{H}_2$ мы ассоциируем 2-мерный радиус-вектор-событие $h = t + jx$ $(j^2 = +1)$. Вводя базис 1-форм $\{dh, d\bar{h}\}$, рассмотрим вещественную квадратичную форму:

$$\eta = \mathrm{Re}(dh \otimes d\bar{h}) = dt \otimes dt - dx \otimes dx. \tag{1}$$

Формула (1) иллюстрирует глубокую связь алгебры двойных чисел и псевдоевклидовой геометрии, а ее поличисловые версии в высших измерениях приводят к метрическим пространствам Бервальда-Моора, которых мы здесь не касаемся.

По аналогии с комплексными числами для всякого двойного числа можно определить его экспоненциальное и гиперболически-тригонометрическое представления:

$$h = \epsilon\varrho e^{j\psi} = \epsilon\varrho(\cosh\psi + j\sinh\psi),$$

где для каждого из клиньев I, II, III, IV, представленных на рис. 1, имеют место следующие определения величин:

$$\begin{array}{rlll} \mathrm{I}: & \epsilon = 1, & \varrho = \sqrt{t^2 - x^2}, & \psi = \mathrm{Arth}(x/t); \\ \mathrm{II}: & \epsilon = j, & \varrho = \sqrt{x^2 - t^2}, & \psi = \mathrm{Arth}(t/x); \\ \mathrm{III}: & \epsilon = -1, & \varrho = \sqrt{t^2 - x^2}, & \psi = \mathrm{Arth}(x/t); \\ \mathrm{IV}: & \epsilon = -j, & \varrho = \sqrt{x^2 - t^2}, & \psi = \mathrm{Arcth}(t/x). \end{array} \tag{2}$$

Величины ϱ и ψ, определенные в каждом из клиньев формулами (2), называются *модулем* и *аргументом* двойного числа h.

Отметим, что множество двойных чисел с нулевым модулем ϱ не описывается ни одной из координатных карт введенной выше гиперболической полярной системы координат. Множество двойных чисел вида

$$h_0 + h_1(1 \pm j), \tag{3}$$

$(h_0, h_1$ — произвольные двойные числа) будем называть *конусом числа* h_0 и обозначать $\mathrm{Con}(h_0)$. Физически множество $\mathrm{Con}(h_0)$ — это множество событий, связанных с h_0 световыми сигналами. Алгебраически векторы положений $h - h_0$, где $h \in \mathrm{Con}(h_0)$, являются делителями нуля в алгебре $\mathcal{H}_2$.

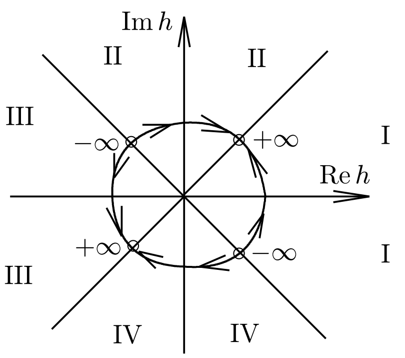

Рис. 1: Область $R \sqcup -R \sqcup R \sqcup -R$ изменения угла ψ на плоскости $\mathcal{H}$. Ориентация согласована в противоположных клиньях и противоположна в соседних. Для различения углов в различных клиньях можно нумеровать угол ψ индексом k: ψ_k, $(k = 1, 2, 3, 4)$.

Изометрии метрики (1) образуют группу Пуанкаре $\mathrm{P}(1,1)$. Ее однородная часть (1-параметрическая группа Лоренца Lor) реализуется умножениями на элементы алгебры единичного модуля вида $\epsilon e^{j\psi}$. При этом числа с $\epsilon = 1$ описывают причинные преобразования Лоренца, не меняющие ориентации времени, а остальные варианты описывают либо сверхсветовые преобразования Лоренца, либо преобразования Лоренца с обращением времени. Переходя к параметру скорости:

$$v = \tanh\psi, \tag{4}$$

приходим к формуле для активных преобразований Лоренца:

$$h' = e^{j\psi}h = \left[(1-v^2)^{-1/2} + jv(1-v^2)^{-1/2}\right](t+jx) = \frac{t+vx}{\sqrt{1-v^2}} + j\frac{x+vt}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{5}$$

Отметим, что описание пассивных преобразований Лоренца, соответствующих смене системы отсчета, реализуется элементами коалгебры $\mathcal{H}_2^*$ [2].

Изометрии метрики (1) сохраняют класс инерциальных систем отсчета, которые на плоскости $\mathcal{H}_2$ изображаются семействами параллельных прямых с направляющими векторами положительного квадрата нормы $h\bar{h}$. Произвольное движение точечной частицы описывается криволинейной мировой линией, на которой определено векторное поле 2-скорости

$$u = \frac{dh}{ds}, \tag{6}$$

где s — параметр псевдоевклидовой длины. При этом $|u| = 1$, а физическая скорость v определяется отношением:

$$v = \frac{\operatorname{Im} u}{\operatorname{Re} u}, \tag{7}$$

либо эквивалентно формулами (4)-(5). Физически вектор 4-скорости задает направление линий собственного времени пробного тела или системы отсчета (необязательно инерциальной) в пространстве-времени. При этом факт его единичности, который следует непосредственно из определения, выражает *постулат о глобальном постоянстве хода собственного времени любых часов во всех системах отсчета.* Другой формой выражения этого постулата является *совпадение собственного времени часов с длиной соответствующей части их мировой линии.* Математически эти постулаты выражаются следующими определениями собственного времени τ:

$$\tau = \int\limits_{\Gamma} |u|\, ds = \int\limits_{\Gamma} ds. \tag{8}$$

В дальнейшем мы, используя приведенные соотношения в рамках h-голоморфной конформной теории относительности, придем к более общей картине поведения часов, в которой скорость хода собственного времени становится функцией точки пространства-времени.

2.2 h-голоморфные функции двойной переменной

Произвольное гладкое отображение $f\colon R^2 \to R^2$ можно представлять парой вещественных компонент, либо парой компонент, зависящих от сопряженных двойных переменных $\{h, \bar{h}\}$:

$$(h,\bar{h}) \mapsto (h',\bar{h}') : \quad h' = F_1(h,\bar{h}); \quad \bar{h}' = F_2(h,\bar{h}). \tag{9}$$

Для интерпретации R^2 как плоскости двойной переменной $\mathcal{H}_2$ естественно ограничиться отображениями, сохраняющими гиперболическую комплексную структуру плоскости, т.

е. отображениями $\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ вида: $h \mapsto F(h)$. Дифференцируемые[1] функции $R^2 \to R^2$, удовлетворяющие условию

$$F_{,\bar{h}} = 0, \tag{10}$$

будем называть *h-голоморфными* функциями двойной переменной h. Функции, удовлетворяющие условию

$$F_{,h} = 0, \tag{11}$$

будем называть *h-антиголоморфными* функциями двойной переменной.

По аналогии с голоморфными функциями комплексной переменной голоморфные функции двойной переменной можно определять формальными степенными рядами, сходимость которых часто вытекает из сходимости соответствующих вещественных рядов.

Имеет место следующее утверждение: *всякая h-голоморфная или h-антиголоморфная функция двойной переменной отображает делители нуля в делители нуля* или, выражаясь геометрическим языком, *оставляет инвариантным конус любой точки.* Формально это свойство выражается равенством:

$$F(\mathrm{Con}(h)) = \mathrm{Con}(F(h)),$$

для всякой точки h из области голоморфности функции F (доказательство см. в [1]). При этом голоморфная функция сохраняет компоненты конуса, а антиголоморфная переводит компоненты $\lambda(1 \pm j)$ друг в друга.

С учетом покомпонентного определения операторов дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial h} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + j\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{h}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - j\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{12}$$

условие (10) в декартовых координатах для h-голоморфной функции $F = U + jV$ принимает вид:

$$F_{,\bar{h}} = (U + jV)_{,\bar{h}} = \frac{1}{2}[(U + jV)_{,t} - j(U + jV)_{,x}] = \frac{1}{2}[U_{,t} - V_{,x} + j(V_{,t} - U_{,x})] = 0,$$

откуда следуют *условия гиперболической аналитичности Коши-Римана:*

$$U_{,t} = V_{,x}; \quad U_{,x} = V_{,t}. \tag{13}$$

Легко проверить, что из условий (13) следует гиперболическая гармоничность вещественной и мнимой частей аналитической функции F, которая выражается уравнениями:

$$\Box U = \Box V = 0, \tag{14}$$

где

$$\Box \equiv 4\partial_h \partial_{\bar{h}} = \partial_t^2 - \partial_x^2 \tag{15}$$

— 2-мерный волновой оператор — даламбертиан ("гиперболический лапласиан").

При отображении

$$\mathcal{H}_2 \xrightarrow{F} \mathcal{H}_2, \tag{16}$$

[1]Понятие производной функции $F(h, \bar{h})$ по аргументам вводится аналогично определению вещественного анализа. Именно, мы определяем дифференцируемость функции F в точке $(h, \bar{h})$ как следующее свойство ее приращения: $\Delta F = A(h, \bar{h})\,\Delta h + B(h, \bar{h})\,\Delta \bar{h} + o(\|\Delta h\|_{\mathcal{H}})$, где $\|\Delta h\|_{\mathcal{H}} \equiv [|\Delta t^2 - \Delta x^2|]^{1/2}$ — псевдоевклидова норма приращения переменной. Переходя к различным пределам при $\|\Delta h\|_{\mathcal{H}} \to 0$, получаем определения частных производных или "производных по направлениям". Проблема при таком определении возникает только в случае производных вдоль компонент конуса: $\partial_{\mathrm{Con}} = \partial_{\lambda(1\pm j)}$. Мы не останавливаемся подробно на этом вопросе в настоящей статье.

где F — голоморфная функция, метрика η преобразуется (в обратную сторону) по закону:

$$\eta \mapsto \eta' = |F'(h)|^2 \eta, \tag{17}$$

где $F'(h)/dh$. Формула (17) означает, что функция $F(h)$ в области своей голоморфности и в точках, где $|F'(h)|^2 \neq 0$ осуществляет конформное отображение двойной плоскости на себя, т.е. сохраняет гиперболические углы. Это обстоятельство тесно связано с установленным выше фактом инвариантности конусов Con относительно h-голоморфных отображений. Отметим, что $|F'|^2 = |\nabla U|^2 = |\nabla V|^2 = \Delta_F$, где ∇ — оператор градиента в псевдоевклидовой метрике, а Δ_F — якобиан отображения F, рассматриваемого как отображение $R^2 \to R^2$. Как это следует из условий (13) или соображений конформности, линии $U = \mathrm{const}$ и линии $V = \mathrm{const}$ для всякой голоморфной функции $F(h)$ образуют на плоскости $\mathcal{H}_2$ ортогональную (в гиперболическом смысле) криволинейную систему координат, поскольку в каждой точке выполняется равенство:

$$\eta(\nabla U, \nabla V) = U_{,t}V_{,t} - U_{,x}V_{,x} = U_{,t}U_{,x} - U_{,x}U_{,t} = 0. \tag{18}$$

По аналогии с комплексным случаем это проясняет геометрический смысл отношения *гиперболической сопряженности* пары функций U и V, которые являются вещественной и мнимой частью некоторой h-голоморфной функции $F(h)$: *сопряженные функции имеют взаимно-ортогональные линии уровня и равные нормы градиентов в каждой точке.*

Отметим, что множество конформных преобразований псевдоевклидовой метрики, как и в евклидовом случае, не исчерпывается h-голоморфными функциями. Отметим также, что в отличие от общего конформного преобразования псевдоевклидовой метрики, которое может индуцировать кривизну, h-голоморфные преобразования, рассматриваемые здесь, оставляют пространство-время плоским. Ввиду этого можно сказать, что излагаемая ниже теория представляет собой промежуточное звено между специальной и общей теориями относительности в 2-мерном случае.

3 Теория гиперболического потенциала в пустоте

3.1 Принципы конформной теории относительности

Расширим теперь группу Пуанкаре, действующую на двумерном пространстве-времени $\mathcal{M}_2$, до группы произвольных h-голоморфных преобразований, которые действуют на точки-события пространства-времени как на элементы алгебры $\mathcal{H}_2$. Ввиду нелинейности преобразования F, глобальная афинная структура $\mathcal{M}_2$ в общем случае не сохраняется и необходимо переходить к локальной версии отображения — его дифференциалу. На алгебраическом языке дифференциал отображения F осуществляет отображение касательных пространств по формуле:

$$\xi_h \mapsto \chi_{F(h)} = F'\xi_h. \tag{19}$$

где $\xi_h \in T_h\mathcal{M}_2$, $\chi_{F(h)} \in T_{F(h)}\mathcal{M}_2$, $h = t + jx$. Используя экспоненциальное представление для производной F':

$$F'(h) = \epsilon |F'|(t, x) e^{j\psi(t,x)}, \tag{20}$$

приходим к заключению о том, что локально h-голоморфные преобразования осуществляют:

1. преобразования Лоренца, зависящие от точки (поворот на гиперболический угол $\psi(t, x)$);
2. отражения осей времени и пространственной координаты (параметр ϵ);
3. растяжение длин векторов (скалярный множитель $|F'|(t, x)$).

Первые два типа преобразований, по существу, рассматриваются и в стандартной версии СТО. Разница преобразований Лоренца в конформной СТО и обычной СТО заключается в том, что первые действуют локально, т.е. параметр ψ зависит от точки, в то время как в стандартной СТО мы используем глобальные преобразования Лоренца, сохраняющие аффинную структуру пространства-времени[2].

Таким образом, в локальной версии преобразований пространства-времени единственными новыми элементами являются растяжения псевдоевклидовых длин (интервалов), описываемое модулем производной $|F'|$. В случае стандартных преобразований Лоренца $|F'| = 1$ и конформная степень свободы исчезает.

Перейдем к физической интерпретации h-голоморфных отображений. При этом в качестве эвристического руководящего принципа мы будем придерживаться *принципа аналогии с комплексной плоскостью.* Голоморфная функция на комплексной плоскости может быть как динамическим (электростатика), так и кинематическим (гидродинамика) потенциалом. Эти две точки зрения могут быть в определенном смысле эквивалентными друг другу, аналогично тому как силовой и геометрический способы описания гравитации в некоторых ситуациях эквивалентны друг другу в рамках ОТО.

Будем рассматривать функцию $F = U + jV$ как комплексный потенциал опорного векторного поля 2-скорости или *опорного поля собственного времени.* Само поле 2-скорости u будет определяться формулой:

$$u = \frac{dF}{dh} = \frac{\partial U}{\partial t} + j\frac{\partial U}{\partial x}, \tag{21}$$

в которой использованы определение (12) оператора комплексного дифференцирования и гиперболические условия Коши-Римана (13). Квадрат модуля 2-скорости

$$|u|^2 = (\nabla U)^2 = (\nabla V)^2 = |F'|^2. \tag{22}$$

Первый знак равенства в формуле (8) остается в силе и определяет теперь нетривиальное "поле скоростей" собственного времени, которое на всякой интегральной кривой Γ этого поля задается соотношением:

$$\frac{d\tau}{ds} = |F'|. \tag{23}$$

Теперь в рассматриваемой нами h-голоморфной теории относительности интервалы псевдоевклидовой длины и хроноинтервалы оказываются различными и связь между ними в каждой точке управляется гиперкомплексным потенциалом F.

Составим уравнения интегральных кривых опорного поля собственного времени (линий времени или линий тока времени):

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{\partial U}{\partial t}; \quad \frac{dx}{d\lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}. \tag{24}$$

Потенциальность поля собственного времени приводит к тому, что параметр λ оказывается пропорциональным натуральному параметру s на интегральной кривой. Для доказательства этого факта вычислим смешанные производные $\partial^2 U/\partial t\partial x$ из первого и второго уравнения в (24) независимо. Имеем для первого уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{dt}{d\lambda} = \frac{d^2 t}{d\lambda^2}\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^{-1}.$$

[2]Отметим, что попытка использовать локализованные преобразования Лоренца посредством умножения на элементы вида $e^{j\psi(t,x)}$ выводит за рамки h-голоморфных преобразований.

Аналогично для второго уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{dx}{d\lambda} = \frac{d^2 x}{d\lambda^2}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^{-1}.$$

Приравнивая полученные выражения получаем после простых преобразований

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2\right) = 0, \tag{25}$$

откуда следует

$$\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 = C = \mathrm{const}, \tag{26}$$

что и требовалось доказать. В дальнейшем мы везде полагаем $C = 1$.

Интегральные кривые поля ∇V — это пространственные сечения 2-мерного пространства-времени, ортогональные в каждой точке линиям времени. Для вычисления пространственных длин вдоль пространственных сечений произвольной конформной калибровки можно воспользоваться формулой

$$\ell = \int |F'|\, ds, \tag{27}$$

где параметр s — натуральный параметр интегральной кривой поля ∇V, определяемой парой уравнений:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\partial V}{\partial t}; \quad \frac{dx}{ds} = \frac{\partial V}{\partial x}. \tag{28}$$

Таким образом, масштабный множитель "управляет" как ходом собственного времени, так и пространственными расстояниями. Это становится совсем очевидным, если обратить внимание на полное равноправие времениподобных и пространственно-подобных направлений и условность их интерпретации как таковых в рамках 2-мерной СТО.

Для произвольных движений пробных частиц промежутки времени и длины вычисляются:

$$\frac{d\tau}{ds} = \eta(\nabla U, w); \quad \frac{d\ell}{ds} = \eta(\nabla V, w), \tag{29}$$

где w — стандартный вектор 2-скорости пробной частицы ($|w| = 1$).

3.2 Конформный сдвиг частоты

Проанализируем с позиций излагаемой конформной теории относительности процедуру сравнения хода пространственно разделенных часов. Пусть Γ_1 и Γ_2 — мировые линии двух часов, которые рассматриваются в 2-мерном пространстве времени в некоторой конформной калибровке, задаваемой h-голоморфным потенциалом $F = U + jV$ (рис. 2). Рассмотрим пару близких точек на интегральной кривой Γ_2: точку $p = (t(s_2), x(s_2))$ и точку $p' = (t(s_2 + \Delta s_2), x(s_2 + \Delta s_2))$, где s_2 — натуральный параметр на кривой Γ_2. Переходя к линеаризованным выражениям, получаем:

$$t' = t(s_2 + \Delta s_2) = t(s_2) + \dot{t}\Delta s_2 + o(\Delta s_2); \tag{30}$$

$$x' = x(s_2 + \Delta s_2) = x + \dot{x}\Delta s_2 + o(\Delta s_2), \tag{31}$$

где точка означает дифферецирование по параметру s_2. С учетом того, что вектор $\dot{t}\partial_t + \dot{x}\partial_x$ 4-скорости часов 2 является единичным в метрике Минковского η, хроноинтервал, приходящийся на рассматриваемый отрезок Δs_2 мировой линии Γ_2, можно вычислить,

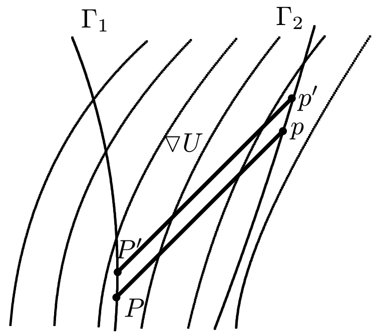

Рис. 2: К процедуре сравнения хода часов в h-голоморфной теории относительности

спроектировав его на направление ∇U в точке p ($\star$ — скалярное произведение в 2-мерной метрике Минковского η):

$$d\tau_2 = \nabla U \star (\dot{t}\partial_t + \dot{x}\partial_x)\Delta s_2 = (U_{,t}\dot{t} - U_{,x}\dot{x})\Delta s_2. \tag{32}$$

Линии конусов прошлого $\mathrm{Con}(p)$ и $\mathrm{Con}(p')$ высекают на мировой линии Γ_1 пару точек $P = (T, X)$ и $P' = (T', X')$ соответственно. Условие принадлежности пары точек $\{p, P\}$ одной компоненте конуса приводит к соотношению

$$T(s_1) - X(s_1) = t(s_2) - x(s_2), \tag{33}$$

определяющему связь параметров s_1 (натуральный параметр на мировой линии Γ_1) и s_2, при которых часы оказываются связаны световым сигналом. Для часов 1 имеем аналогично формуле (32):

$$d\tau_1 = \nabla U \star (\dot{T}\partial_t + \dot{X}\partial_x)\Delta s_1 = (U_{,t}\dot{T} - U_{,x}\dot{X})|_{\mathrm{Con}(p)}\Delta s_1. \tag{34}$$

Дифференцируя соотношение (33), приходим к связи длин отрезков мировых линий часов:

$$ds_1 = \frac{\dot{t} - \dot{x}}{(\dot{T} - \dot{X})_{\mathrm{Con}(p)}} ds_2. \tag{35}$$

Теперь из (32) и (34) с учетом (35) получаем:

$$\delta(P|p) \equiv \frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{\Delta_{p'}}{\Delta_p}, \tag{36}$$

где

$$\Delta_p \equiv \frac{U_{,t}\dot{t} - U_{,x}\dot{x}}{\dot{t} - \dot{x}}; \quad \Delta_{p'} \equiv \left. \frac{U_{,t}\dot{T} - U_{,x}\dot{X}}{\dot{T} - \dot{X}} \right|_{\mathrm{Con}(p)}. \tag{37}$$

Формулы (36)-(37) описывают принципиально наблюдаемый эффект конформной деформации собственного времени, измеряемый путем обмена световыми сигналами между двумя пространственно разделенными часами. Величина $\delta(P|p)$ показывает скорость хода часов в точке P в единицах собственного времени часов в точке p, расположенной на конусе будущего точки P, в конформной калибровке $F = U + jV$.

В качестве примера рассмотрим эффект конформной деформации времени, индуцированной слабой конформной волной вида:

$$F(h) = h + \varepsilon \sin \omega h, \quad \omega\varepsilon \ll 1. \tag{38}$$

Полагая $\varepsilon = \varepsilon_1 + j\varepsilon_2$, $\omega = \omega_1 + j\omega_2$, получаем для $F(h) = U(t,x) + jV(t,x)$ в компонентах:

$$U(t,x) = t + \varepsilon_1 \sin\Phi_1 \cos\Phi_2 + \varepsilon_2 \sin\Phi_2 \cos\Phi_1; \tag{39}$$

$$V(t,x) = x + \varepsilon_1 \sin\Phi_2 \cos\Phi_1 + \varepsilon_2 \sin\Phi_1 \cos\Phi_2, \tag{40}$$

где $\Phi_1 = \omega_1 t + \omega_2 x$, $\Phi_2 = \omega_2 t + \omega_1 x$.

Рассмотрим пару покоящихся на расстоянии L друг от друга часов[3]. Такие часы описываются компонентами 4-скорости: $\dot t = \dot T = 1$, $\dot x = \dot X = 0$. Формулы (36)-(37) приводят к простому выражению эффекта конформной деформации времени (координаты (t,x) — произвольные текущие координаты опорных часов):

$$\delta((t-L, x-L)|(t,x)) = \frac{U_{,t}(t-L, x-L)}{U_{,t}(t,x)}. \tag{41}$$

Элементарные вычисления приводят к выражению:

$$U_{,t}(t,x) = 1+\varepsilon_1(\omega_1 \cos\Phi_1 \cos\Phi_2 - \omega_2 \sin\Phi_1 \sin\Phi_2) + \varepsilon_2(\omega_2 \cos\Phi_2 \cos\Phi_1 - \omega_1 \sin\Phi_2 \sin\Phi_1); \tag{42}$$

$$U_{,t}(t-L, x-L) = U_{,t}(t,x)|_{\Phi_i \to \Phi_i - \delta}, \tag{43}$$

где $\delta = (\omega_1 + \omega_2)L$. Подставляя (42)-(43) в формулу (41) и используя условие малости конформной деформации, после элементарных тригонометрических преобразований получаем следующее выражение для относительного хода часов:

$$\delta((t-L, x-L)|(t,x)) \approx 1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\omega_1 + \omega_2) \sin[(\omega_1 + \omega_2)L] \sin[(\omega_1 + \omega_2)(t + x - L)]. \tag{44}$$

Формула (44) показывает, что *в h-голоморфной теории относительности относительная скорость хода часов испытывает пространственно-временную модуляцию,* которая в принципиальном отношении доступна измерению посредством эксперимента. В реальном эксперименте удобнее измерять не скорость хода часов, а сдвиг частоты двух точечных электромагнитных излучателей. Формула для относительного сдвига частоты в этом случае:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\omega_1 + \omega_2) \sin[(\omega_1 + \omega_2)L] \sin[(\omega_1 + \omega_2)(t + x - L)] \tag{45}$$

получается очевидным образом из формулы (44).

Для организации подобного эксперимента необходимо знать, каким распределением источников порождается конформная деформация вида (38). Опираясь на принцип аналогии с комплексной плоскостью, сформулируем некоторые общие гипотетические положения (аксиомы конформной теории относительности), позволяющие ответить на этот вопрос.

1. Источником конформной деформации 2-мерного пространства-времени является *гиперболический заряд*, связанный некоторым (пока неизвестным) образом с характеристиками материи (плотностью энергии, давлением,...).

2. В вакууме (т.е. в пустом пространстве-времени вне дискретных или распределенных источников) поле конформной деформации описывается некоторой h-голоморфной функцией $F = U + jV$.

3. На границе источников (линии) $V = \text{const}$ (физически это означает, что мировая линия материальной частицы границы области источника образует одну из линий тока времени).

[3] Далее мы везде отождествляем L с разностью координат x положений часов, поскольку учет конформной деформации длин с помощью формулы (27) приведет к поправкам высшего порядка малости.

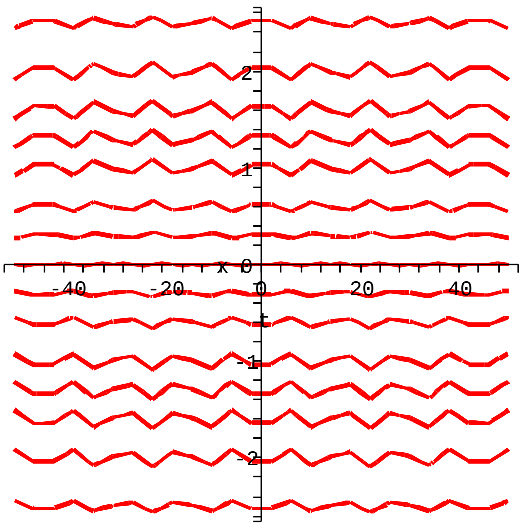

Рис. 3: Семейство линий-границ (46) потенциальных источников поля конформных деформаций (38) для $\varepsilon_2 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\varepsilon_1 = 0.1$, $\omega_1 = 1$. В области вблизи оси абсцисс (оси времени) условие малости, которое было использовано для вывода приближенного решения (47) нарушается.

Сформулированные принципы оставляют невыясненным вопрос об определении поля конформной деформации в области внутри источников — в общем случае оно не будет там h-голоморфным. Мы посвятим этому вопросу следующий раздел. Заметим здесь однако, что для большинства экспериментов с пробными излучателями и часами этот вопрос несущественен, поскольку такие эксперименты проводятся вне источников.

Определим приближенный закон движения границ источников в рассмотренном нами примере. С учетом (40) условие $V = C = \mathrm{const}$ принимает вид:

$$x + \varepsilon_1 \sin \Phi_2 \cos \Phi_1 + \varepsilon_2 \sin \Phi_1 \cos \Phi_2 = C. \tag{46}$$

— неявного уравнения, определяющего закон движения границы. Для $C \gg \varepsilon$ можно легко найти приближенное решение в явном виде:

$$x \approx C - (\varepsilon_1 \sin \Phi_2 \cos \Phi_1 + \varepsilon_2 \sin \Phi_1 \cos \Phi_2)|_{x=C}$$

или в явном виде:

$$x \approx C - \varepsilon_1 \sin(\omega_2 t + \omega_1 C) \cos(\omega_1 t + \omega_2 C) + \varepsilon_2 \sin(\omega_1 t + \omega_2 C) \cos(\omega_2 t + \omega_1 C). \tag{47}$$

Вид линий из семейства (46) при некоторых частных значениях ω_i, ε_i и C представлен на рисунке 3.

Сделаем несколько замечаний по поводу рассматриваемой ситуации и полученных результатов.

1. Рассматриваемая нами ситуация слабой волны конформной деформации в значительной степени аналогична полю слабой плоской гравитационной волны. Однако, как уже отмечалось выше, конформная деформация, описываемая посредством h-голоморфных функций, не меняет плоскостности 2-мерного пространства времени, в то время как гравитационная волна в ОТО характеризуется ненулевым тензором конформной кривизны и неустранима ни преобразованиями координат, ни общим кон-

формным преобразованием метрики. Кроме того, волна конформной деформации собственного времени эффективно описывается скаляром, в то время как гравитационная волна существенно тензорная и поперечная.

2. Тем не менее, эффект конформной деформации возможно следует рассматривать как эффект, включающий стандартные электромагнетизм, гравитацию и возможно поля новой еще неизвестной природы (5-ая сила), описываемый нами в рамках некоторого альтернативного формализма. Наиболее полно этот формализм должен реализовываться в рамках пространств $\mathcal{H}_n$ (n-мерных метрических пространств Бервальда-Моора, тесно связанных с алгеброй поличисел). Этим вопросам мы предполагаем специально посвятить несколько будущих публикаций.

3. Отметим, что наше рассмотрение по существу предполагает формальный биметризм. Одна из метрик — метрика Минковского η, которая не подвергается конформной деформации и является опорной. Другая метрика — деформированная метрика Минковского $|F'|^2\eta$, которую мы не использовали как таковую. Для сравнения развиваемого нами подхода с подходом ОТО удобнее встать на противоположную точку зрения и использовать в рассуждениях именно деформированную метрику $|F'|^2\eta$. Мы еще вернемся к этому вопросу в Заключении.

4. Расчет потенциала F подразумевает введение некоторого динамического принципа, включающего уравнения поля и законы его взаимодействия с материей. Один из простейших вариантов, в котором характеристики материи связываются с неголоморфностью самого поля F, мы обсудим в следующем разделе.

4 Динамическая теория гиперкомплексного потенциала

Целью настоящего раздела является формулировка и исследование динамического принципа, из которого бы вытекали законы (уравнения), управляющие динамикой поля F. Вне источников это поле должно становиться полем конформной деформации, описываемым некоторой h-голоморфной функцией, со всеми свойствами и физической интерпретацией, рассмотренными выше. Из общих соображений очевидно, что в области, занятой источниками, поле F, вообще говоря, уже не будет являться голоморфной функцией переменной h. Другими словами, область источников поля характеризуется неравенством $F_{,\bar{h}} \neq 0$, выражающим факт неголоморфности функции F, так что в этой области полевая функция F зависит, вообще говоря, как от переменной h, так и от переменной $\bar{h}$. Будем в дальнейшем называть величину $F_{,\bar{h}}$ *неголоморфностью гиперкомплексного потенциала* F. Если мы постулируем, что линии времени внутри источников как и прежде совпадают с интегральными кривыми векторного поля $F_{,h}$ (которое, отметим, теперь уже в общем случае не является градиентом), то поле F становится универсальной функцией, содержащей в себе всю информацию обо всем пространстве-времени вместе с его материальным наполнением: производные $F_{,h}$ отвечают за локальные кинематику источников и геометрию пространства-времени, а производные $F_{,\bar{h}}$ (неголоморфность) отвечают за внутренние локальные характеристики источников.

4.1 Вариационный принцип и уравнения поля

Перейдем к теоретико-полевым формулировкам. Постулируем действие для гиперболического потенциала в следующем виде:

$$\mathcal{S}[F,\bar{F}] = \alpha \int\limits_{\mathcal{H}_2} \{|F_{,h}|^2 - \mathcal{U}(|F_{,\bar{h}}|^2)\}\, dh \wedge d\bar{h}, \tag{48}$$

где первое слагаемое под интегралом является гиперболическим "кинетическим членом" и отвечает за динамику гиперболического потенциала в пустоте, а второе слагаемое представляет собой гиперболический "потенциальный член" и отвечает за свойства и вклад источников. В соответствии с изложенными выше соображениями, это последнее слагаемое зависит только от гиперболического модуля величины неголоморфности и в области вне источников, где неголоморфность обращается в нуль, оно определяет в действии некоторую полную дивергенцию, не дающую вклада в уравнения движения. Отметим, что действие в целом вещественно, хотя мы и записали его в двойном представлении. Константа α в нашем рассмотрении необходима лишь для соблюдения правильной размерности и ее конкретное значение не будет играть в дальнейшем никакой роли[4].

Из общих соображений можно было бы сразу исключить из рассмотрения случаи $\mathcal{U}(X) = AX + B$. Действительно, добавление к лагранжиану константы изменяет его на полную дивергенцию и не меняет уравнений поля. Слагаемое же вида $A\left|F_{,\bar{h}}\right|^2$ с точностью до полной дивергенции равно $A\left|F_{,h}\right|^2$ и его добавление по существу сводится к переопределению константы α в (48). В дальнейшем, если это не оговорено особо, мы всегда будем подразумевать, что потенциальная функция отлична от линейной и будем игнорировать линейные добавки к ней. В разделе 5 мы коснемся вопроса о возможных препятствиях игнорирования граничных членов в фундаментальных теориях.

Стандартная процедура варьирования действия (48) по полевым переменным $\bar{F}$, F приводит к уравнениям поля, которые можно привести к виду:

$$\frac{1}{4}\Box F = (\mathcal{U}' F_{,\bar{h}})_{,h} \tag{49}$$

— неоднородного волнового уравнения с источником в правой части, зависящим лишь от неголоморфности F. Штрих в (49) обозначает дифференцирование функции $\mathcal{U}$ по ее аргументу (т. е. по квадрату модуля неголоморфности). Второе уравнение получается из уравнения (49) его гиперболическим комплексным сопряжением. Как и следовало ожидать, уравнения поля получились нелинейными, поскольку поле F, как это следует из принципов развиваемой теории, описывает и свои источники за счет эффективного самодействия. В этом отношении развиваемая теория примыкает к вариантам единой теории поля Ми [8].

4.2 Первый интеграл и его следствия

Замечательной особенностью уравнений (49) является наличие у них первого интеграла, независимо от конкретного вида потенциальной функции $\mathcal{U}$. Действительно, записывая волновой оператор в комплексной форме (15), уравнение (49) можно представить в виде равенства нулю некоторой производной:

$$(F_{,\bar{h}}(1-\mathcal{U}'))_{,h} = 0, \tag{50}$$

откуда следует

$$F_{,\bar{h}}(1-\mathcal{U}') = \varphi(\bar{h}) \tag{51}$$

— первый интеграл уравнения (49), содержащий произвольную функцию $\varphi(\bar{h})$.

Интеграл (51) в общем случае представляет собой систему двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Рассмотрим его важное

[4]Эта константа будет играть роль лишь при исследовании взаимодействия поля F с другими полями, которые не описываются полем F. Эту задачу мы в настоящей статье не рассматриваем.

следствие, которое выполняется в общем случае независимо от вида потенциальной функции $\mathcal{U}$. Домножая обе части уравнения (51) на $\bar{F}_{,h}$ и обозначая $|F_{,\bar{h}}|^2 \equiv X \in R$, приходим к соотношению:

$$R \ni X(1 - \mathcal{U}'(X)) = \varphi(\bar{h})\bar{F}_{,h}, \tag{52}$$

откуда следует, что

$$\operatorname{Im} \varphi(\bar{h})\bar{F}_{,h} = 0. \tag{53}$$

Расписывая это соотношение в компонентах, приходим к уравнению:

$$\varphi_1(U_{,x} - V_{,t}) + \varphi_2(U_{,t} - V_{,x}) = 0, \tag{54}$$

связывающему $\varphi = \varphi_1 + j\varphi_2$ и $F = U + jV$ и не содержащему функции $\mathcal{U}$. Дифференцируя соотношение (54) по t и по x, приходим к паре дифференциальных следствий:

$$\varphi_{1,t}(U_{,x} - V_{,t}) + \varphi_1(U_{,x,t} - V_{,t,t}) + \varphi_{2,t}(U_{,t} - V_{,x}) + \varphi_2(U_{,t,t} - V_{,x,t}) = 0; \tag{55}$$

$$\varphi_{1,x}(U_{,x} - V_{,t}) + \varphi_1(U_{,x,x} - V_{,t,x}) + \varphi_{2,x}(U_{,t} - V_{,x}) + \varphi_2(U_{,t,x} - V_{,x,x}) = 0. \tag{56}$$

Ввиду того, что φ_1 и φ_2 являются компонентами антиголоморфной функции φ, они связаны гиперболическими условиями типа Коши-Римана:

$$\varphi_{1,t} = -\varphi_{2,x}; \quad \varphi_{1,x} = -\varphi_{2,t}. \tag{57}$$

Выражая производные $\varphi_{1,t}$ и $\varphi_{2,t}$ в уравнении (55) через (57), приходим к уравнению:

$$-\varphi_{2,x}(U_{,x} - V_{,t}) + \varphi_1(U_{,x,t} - V_{,t,t}) - \varphi_{1,x}(U_{,t} - V_{,x}) + \varphi_2(U_{,t,t} - V_{,x,t}) = 0. \tag{58}$$

Рассматривая теперь уравнения (56) и (58) как систему линейных уравнений относительно φ_1 и $\varphi_{1,x}$, находим:

$$\varphi_1 = A\varphi_2 + B\varphi_{2,x}, \tag{59}$$

где

$$A = -\frac{N_{1,t}N_2 + (N_1^2)_{,x}/2}{N_1 N_{2,x} + (N_2^2)_{,t}/2}; \quad B = -\frac{N_1^2 - N_2^2}{N_1 N_{2,x} + (N_2^2)_{,t}/2}, \tag{60}$$

а

$$N_1 \equiv U_{,t} - V_{,x}; \quad N_2 \equiv U_{,x} - V_{,t} \tag{61}$$

— величины, обращающиеся в нуль для h-голоморфного потенциала $F(h)$ (т.е. по существу компоненты неголоморфности F). Подставляя теперь решение (59) в (54), приходим к дифференциальному уравнению первого порядка относительно φ_2, которое можно преобразовать к виду:

$$(\ln \varphi_2)_{,x} = -\frac{A}{B} - \frac{N_1}{N_2 B}, \tag{62}$$

где A и B определяются формулами (60)-(61).

Выражая теперь аналогичным образом производные $\varphi_{1,x}$ и $\varphi_{2,x}$ в уравнении (56) через (57), приходим к уравнению:

$$-\varphi_{2,t}(U_{,x} - V_{,t}) + \varphi_1(U_{,x,x} - V_{,t,x}) - \varphi_{1,t}(U_{,t} - V_{,x}) + \varphi_2(U_{,t,x} - V_{,x,x}) = 0. \tag{63}$$

Снова рассматривая уравнения (55) и (63) как систему линейных уравнений относительно φ_1 и $\varphi_{1,t}$, находим:

$$\varphi_1 = \tilde{A}\varphi_2 + \tilde{B}\varphi_{2,t}, \tag{64}$$

где

$$\tilde{A} = -\frac{N_{1,x}N_2 + (N_1^2)_{,t}/2}{N_1N_{2,t} + (N_2^2)_{,x}/2}; \quad \tilde{B} = \frac{N_1^2 - N_2^2}{N_1N_{2,t} + (N_2^2)_{,x}/2}. \tag{65}$$

Подставляя решение (64) в (54), снова приходим к дифференциальному уравнению первого порядка относительно φ_2, которое можно привести к виду:

$$(\ln\varphi_2)_{,t} = -\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} - \frac{N_1}{N_2\tilde{B}}, \tag{66}$$

где $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ определяются формулами (65) и (61).

Приравнивая выраженные из (62) и (66) вторые смешанные производные: $(\ln\varphi_2)_{,t,x} = (\ln\varphi_2)_{,x,t}$, приходим к условиям интегрируемости исходного уравнения (53), которые уже не содержат функций φ_1, φ_2:

$$\left(\frac{A}{B} + \frac{N_1}{N_2B}\right)_{,t} = \left(\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} + \frac{N_1}{N_2\tilde{B}}\right)_{,x} \tag{67}$$

или после некоторых преобразований и упрощений с учетом формул (60), (61), (65):

$$\left(\frac{N_2^2N_{1,t} - N_1^2N_{2,x} + N_1N_2(N_{1,x} - N_{2,t})}{N_2(N_1^2 - N_2^2)}\right)_{,t} = \left(\frac{N_2^2N_{1,x} - N_1^2N_{2,t} + N_1N_2(N_{1,t} - N_{2,x})}{N_2(N_1^2 - N_2^2)}\right)_{,x}. \tag{68}$$

Вводя новую функцию: $\mathcal{Q} \equiv N_1/N_2$ после несложных манипуляций с производными уравнение (68) приводится к очень простому виду:

$$\Box \mathrm{Arth}\mathcal{Q} = 0, \tag{69}$$

общий интеграл которого имеет вид:

$$\mathcal{Q} \equiv \frac{U_{,t} - V_{,x}}{U_{,x} - V_{,t}} = \tanh(\phi_1(t+x) + \phi_2(t-x)), \tag{70}$$

где ϕ_1 и ϕ_2 — произвольные функции своих аргументов. Интеграл (70) удовлетворяется тождественно и в пустоте, где обращается в нуль неголоморфность. Таким образом, *в рассматриваемой нами теории соотношение (70) имеет вид общего универсального соотношения, которое, с одной стороны, является следствием вариационного динамического принципа (48), с другой ограничивает вид F-поля универсальным образом, независимо от его материальных источников.* С математической точки зрения соотношение (70) можно рассматривать как некоторое обобщение гиперболических условий Коши-Римана, определяющее некоторый класс $\mathcal{G}(\mathcal{H}_2)$ функций с правилом дифференцирования:

$$\frac{dF}{d\bar{h}} = \frac{1}{2}(U_{,x} - V_{,t})(\tanh(\phi_1 + \phi_2) - j). \tag{71}$$

Более детальное обсуждение математических свойств этого класса функций и его физическую интерпретацию мы оставляем для следующих публикаций. Сейчас мы остановимся лишь на одном важном наблюдении математического характера, принципиально важном для излагаемого подхода. Условие $F_{,\bar{h}} = 0$, рассматриваемое на границе области, занятой материей, дает два уравнения на две функции от переменных (t, x) : $N_1 = 0$, $N_2 = 0$, которые в общем случае независимы. Это означало бы, что в нашей теории материальные распределения ограничиваются точечными источниками, за исключением, быть может, некоторых случайных вырожденных ситуаций. Соотношение (70), которое можно понимать как линейную связь компонент неголономности, выделяет в нашей теории класс физических гиперкомплексных потенциалов $\mathcal{G}(\mathcal{H}_2)$, у каждого представителя которого обнуление одной из компонент неголоморфности влечет за собой обнуление другой компоненты. Иными словами, *динамический принцип теории в форме (48) автоматически приводит к протяженным материальным распределениям, с границей, задаваемой уравнением вида* $f(t,x)=0$, *как это и должно быть в реалистичной 2-мерной теории относительности.*

4.3 Тензор энергии-импульса и характеристики источников

Поскольку лагранжиан $\mathcal{L}=|F_{,h}|^2-\mathcal{U}$ в действии (48) не зависит от координат, теорема Нетер гарантирует выполнение слабого закона сохранения:

$$\mathcal{T}^{\alpha}_{\beta,\alpha}=0, \tag{72}$$

где:

$$\mathcal{T}^{\alpha}_{\beta,\alpha}\equiv\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^a_{,\alpha}}F^a_{,\beta}-\delta^\alpha_\beta\mathcal{L} \tag{73}$$

— канонический тензор энергии-импульса поля F. Здесь $\alpha,\beta=h,\bar h$, $\{F^a\}=F,\bar F$. Непосредственное вычисление по формуле (73) приводит к следующему виду компонент тензора $\mathcal{T}$ в комплексном базисе:

$$\mathcal{T}^h_h=\mathcal{T}^{\bar h}_{\bar h}=\mathcal{U}(X)-\mathcal{U}'(X)X\equiv\mu;\quad \mathcal{T}^h_{\bar h}=\overline{\mathcal{T}^{\bar h}_h}=\bar F_{,\bar h}F_{,\bar h}(1-\mathcal{U}')\equiv\sigma. \tag{74}$$

Для пересчета этих компонент в более привычном вещественном базисе заметим, что матрицы Якоби J и J^{-1}, определяющиеся видом преобразований координат:

$$t=\frac{h+\bar h}{2};\quad x=\frac{h-\bar h}{2j};\quad h=t+jx;\quad \bar h=t-jx, \tag{75}$$

имеют вид:

$$J=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ j/2 & -j/2\end{pmatrix};\quad J^{-1}=\begin{pmatrix}1 & j\\ 1 & -j\end{pmatrix}. \tag{76}$$

С помощью известного закона преобразования тензоров посредством матриц Якоби легко находим компоненты тензора энергии-импульса в декартовых координатах (t,x):

$$\mathcal{T}^0_0=\mu+\operatorname{Re}\sigma;\quad \mathcal{T}^1_1=\mu-\operatorname{Re}\sigma;\quad \mathcal{T}^1_0=-\mathcal{T}^0_1=\operatorname{Im}\sigma \tag{77}$$

Из представления (77) очевидно, что дважды ковариантный тензор $\mathcal{T}$ полностью симметричен и имеет вид:

$$(\mathcal{T}_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}\mu+\operatorname{Re}\sigma & -\operatorname{Im}\sigma\\ -\operatorname{Im}\sigma & \operatorname{Re}\sigma-\mu\end{pmatrix}. \tag{78}$$

Для выяснения вопроса о связи потенциала F с плотностью энергии и давлением составим задачу на собственные значения относительно метрики Минковского η:

$$\mathcal{T}(\ ,u)=\lambda\eta(\ ,u). \tag{79}$$

Секулярное уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix}\mu+\operatorname{Re}\sigma-\lambda & -\operatorname{Im}\sigma\\ -\operatorname{Im}\sigma & \operatorname{Re}\sigma-\mu+\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{80}$$

или

$$(\mu-\lambda)^2-(\operatorname{Re}\sigma)^2+(\operatorname{Im}\sigma)^2=0. \tag{81}$$

Его корни:

$$\lambda_1 = \varepsilon = \mu + \sqrt{\sigma\bar{\sigma}}; \quad \lambda_2 = p = \mu - \sqrt{\sigma\bar{\sigma}}. \tag{82}$$

Приведем также выражения для ε и p в явном виде:

$$\varepsilon = \mathcal{U} - \mathcal{U}'X + (1-\mathcal{U}')\sqrt{XY}; \quad p = \mathcal{U} - \mathcal{U}'X - (1-\mathcal{U}')\sqrt{XY}, \tag{83}$$

где $Y \equiv |F_{,h}|^2$.

Из формул (83) следует, что величины ε и p в общем случае не связаны никаким уравнением состояния вида $p = f(\varepsilon)$, поскольку функциональный определитель

$$\frac{D(\varepsilon, p)}{D(X,Y)} \equiv \begin{vmatrix} \varepsilon_{,X} & \varepsilon_{,Y} \\ p_{,X} & p_{,Y} \end{vmatrix} = \frac{\mathcal{U}''(1-\mathcal{U}')X^2 + (\mathcal{U} - \mathcal{U}'X)(1-\mathcal{U}' - 2\mathcal{U}''X)}{\sqrt{XY}} \tag{84}$$

в общем случае отличен от нуля.

4.4 Пример: статическое пространство-время, деформированное упругим стержнем

Рассмотрим задачу о нахождении гиперболического потенциала внутри и вне 1-мерного упругого однородного покоящегося стержня (см. рис. 4).

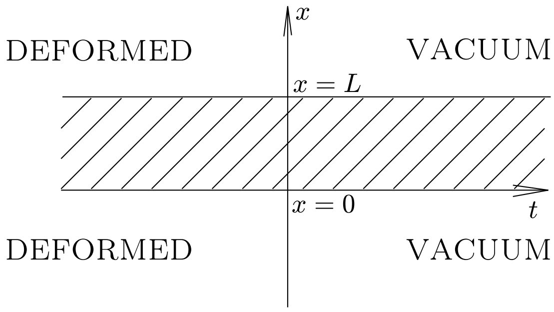

Рис. 4:

Наша цель — показать, что развиваемая теория может описывать физически правдоподобные ситуации.

Поскольку задача статическая, будем искать потенциал F внутри стержня в виде: $F = U(x) + jV(x)$. Тогда неголоморфность $F_{,\bar{h}}$ и ее модуль имеют соответственно вид

$$F_{,\bar{h}} = \frac{1}{2}U_{,x}(\tanh(\phi_1 + \phi_2) - j); \quad |F_{,\bar{h}}|^2 = X = -\frac{U_{,x}^2}{4\cosh^2(\phi_1+\phi_2)}, \tag{85}$$

который получается с учетом общего уравнения (70). Поскольку U и V у нас не зависят от t, не должен зависеть от t и аргумент гиперболического тангенса $\phi_1(t+x) + \phi_2(t-x)$. Нетрудно показать, что это возможно только в случае линейных функций ϕ_1 и ϕ_2, так что в результате получим: $\phi_1 + \phi_2 = Ax + B$, $A, B \in R$. Кроме того, правая часть уравнения (51) должна зависеть только от x, поэтому $\varphi(\bar{h}) = S_1 + jS_2 = \mathrm{const}_{\mathcal{H}_2}$. Подставляя (85) в (51), получим одно гиперкомплексное уравнение, сводящееся к паре вещественных уравнений на единственную функцию $U(x)$. Уравнения этой пары будут тождественно переходить в друг друга (т.е. система будет совместной), лишь при условиях:

$$A = 0, \quad S_1 = a\tanh B, \quad S_2 = -a, \quad a \in R. \tag{86}$$

При этом единственное независимое уравнение на $U(x)$ оказывается следующим:

$$\frac{1}{2}U_{,x}(1-\mathcal{U}') = a. \tag{87}$$

Рассмотрим функцию U вида:

$$U = \frac{2P}{3}x^3 - PLx^2, \tag{88}$$

где P — некоторая константа, подлежащая определению. Согласно (85)-(86), получим следующие выражения для компоненты V потенциала и квадрата модуля неголоморфности:

$$V = -\left(\frac{2P}{3}x^3 - PLx^2\right)\tanh B; \quad X = -\frac{P^2x^2(x-L)^2}{\cosh^2 B}. \tag{89}$$

Мы видим, что решение такого вида удовлетворяет основной гипотезе теории: на границе стержня ($x = 0$ и $x = L$) обе компоненты неголоморфности (и как следствие квадрат ее модуля X) обращаются в нуль, а внутри стержня они отличны от нуля.

Поскольку мы выбрали физическое решение "руками", то потенциал самодействия вместе с распределением плотности энергии и давления должен определиться теперь этим решением посредством уравнения (87). С учетом (89) это уравнение можно записать в виде:

$$\frac{x}{2}\left(1 - f(-x^2/\cosh^2 B)\right) = a, \tag{90}$$

где $x = U_{,x}$, $f(X) = \mathcal{U}'(X)$. Уравнение (90) легко разрешается относительно неизвестной функции f а затем и относительно $\mathcal{U}$. Решение с точностью до аддитивной постоянной имеет вид:

$$\mathcal{U}(X) = X + \frac{2a}{\cosh B}\sqrt{-X}. \tag{91}$$

По формулам (83) с учетом равенства $X = Y$, справедливого для статики, нетрудно проверить, что такой потенциал определяет уравнение состояния вещества стержня в виде:

$$p = \frac{\sqrt{2}a}{\cosh B}\sqrt{\varepsilon}, \tag{92}$$

а выражения для давления и плотности энергии внутри стержня можно привести к виду:

$$p = \frac{2a}{\cosh B}\sqrt{-X} = \frac{2aPx(L-x)}{\cosh^2 B}; \quad \varepsilon = -2X = \frac{2P^2x^2(x-L)^2}{\cosh^2 B}. \tag{93}$$

Как это видно из соотношений (93), безразмерный параметр B отвечает за выбор системы единиц силы[5] в 2-мерной вселенной и его можно без ограничения общности положить равным нулю. Параметр P отвечает за полную массу стержня M, которая получается интегрированием $\varepsilon(x)$ по длине стержня, а параметр a — за среднее давление $\bar{p}$ внутри стержня, возникающее за счет его самодействия. Результат вычислений определяет следующую связь:

$$P = \sqrt{\frac{15M}{L^5}}; \quad a = \frac{3\bar{p}}{PL^2}.$$

Интересно, что константа a, играющая роль константы самодействия стержня, появилась как константа интегрирования в интеграле (51). Профиль плотности энергии при некоторых значениях констант представлен на рис. 4.4.

Следующий шаг решения заключается в сшивке полученного внутреннего решения для стержня с внешним, которое описывается некоторыми h-голоморфными функциями $F_I(h) = U_I + jV_I$ (при $x < 0$) и $F_{II}(h) = U_{II} + jV_{II}$ (при $x > L$). Компоненты неголоморфности на границе стержня оказываются сшитыми автоматически, поскольку неголоморфность функции F для внутреннего решения обращается на границе в нуль по построению,

[5]Напомним, что в 2-мерном пространстве-времени размерности давления, силы и плотности энергии совпадают.

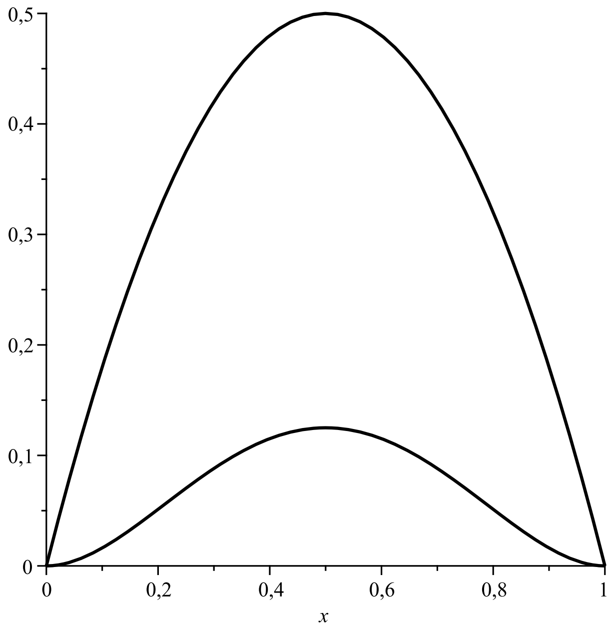

Рис. 5: Эпюры плотности энергии (нижняя кривая) и давления (верхняя кривая) в некоторых условных единицах. Длина стержня $L = 1$, $P = 1$, $a = 1$, $B = 0$.

а функций F_I и F_{II} — в силу их глобальной голоморфности. Эти условия являются модификацией стандартных условий сшивки производных (в нашем случае непрерывны не сами производные, а неголоморфности, т.е. специальные комбинации производных). Далее потребуем чтобы h-потенциал был непрерывным на границе:

$$F_I(t, 0) = F(0); \quad F_{II}(t, L) = F(L), \tag{94}$$

где компоненты функции F задаются формулами (88-89). Напишем U_I в виде общего решения волнового уравнения:

$$U_I = \Psi_+ + \Psi_-, \tag{95}$$

где первое слагаемое зависит только от комбинации $t+x$, а второе — только от комбинации $(t-x)$. Условие непрерывности на границе $x = 0$ с учетом (88) приводит к уравнению:

$$\Psi_+(t) + \Psi_-(t) = 0, \tag{96}$$

откуда

$$\Psi_-(\xi) = -\Psi_+(\xi) \equiv \Psi(\xi). \tag{97}$$

Из условий Коши-Римана находим выражение для гиперболически сопряженной функции V_I:

$$V_I = \Psi(t+x) + \Psi(t-x). \tag{98}$$

Условие непрерывности V_I на границе $x = 0$ с учетом (88) приводит к уравнению:

$$\Psi(t) = 0, \tag{99}$$

откуда заключаем, что при $x < 0$ $F_I = 0$. Аналогичным образом находим, что при $x > L$ h-потенциал описывается постоянной функцией:

$$F_{II} = U(L) + jV(L), \tag{100}$$

где

$$U(L) = -\frac{PL^3}{3}; \quad V(L) = -\frac{PL^3}{3}\tanh B.$$

Вид потенциала внутри стержня представлен на рис. 6.

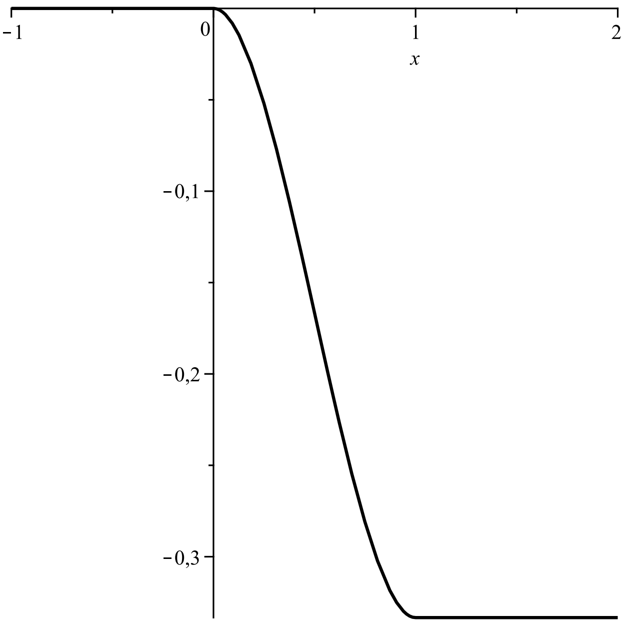

Рис. 6: Распределение компонент h-потенциала внутри стержня при $L = 1, P = 1, \tanh B = 0$. Снаружи стержня постоянные потенциалы гладко сшиваются с их внутренними значениями слева и справа.

5 Супервариационный принцип для фундаментальных теорий

Практически любая физическая теория содержит неопределяемые из самой теории параметры — эмпирические константы модели или фундаментальные физические константы. Так, классическая электродинамика содержит две фундаментальные константы: e и c, квантовая электродинамика содержит три константы: $e, \hbar, c$, а единая теория электрослабого взаимодействия — около 20 констант. Ньютоновская теория гравитации содержит одну константу G, а эйнштейновская ОТО — две константы G и c. Механика Ньютона не содержит фундаментальных констант[6]. Следует отметить, что в вычислениях константы модели могут группироваться в определенные типичные для данной теории комбинации, которые и определяют экспериментально наблюдаемые величины. Такими комбинациями, к примеру, являются постоянная тонкой структуры $\alpha \equiv e^2/\hbar c$ в квантовой электродинамике и эйнштейновская гравитационная постоянная $8\pi G/c^4$ в ОТО.

Как правило, константы модели определяются из экспериментальных данных. Такой подход, однако, свидетельствует о принципиальной неполноте рассматриваемой теории. Было бы совершенно естественно ожидать, что полная фундаментальная "теория всего" (если она вообще существует!) должна давать средства для вычисления всех своих существенных параметров, т. е. тех, которые определяют экспериментально наблюдаемые величины. Более того, фундаментальная теория природы не должна содержать произвола в выборе некоторых фундаментальных зависимостей, определяющих динамические уравнения теории, например, вид потенциальной функции или даже вид лагранжиана.

Все вышесказанное относится и к рассматриваемому нами подходу h-гиперболической теории поля. В настоящем параграфе мы обсудим один из возможных подходов к решению проблемы устранения отмеченного произвола.

[6]Что лишний раз подтверждает тезис о том, что законы механики Ньютона на самом деле являются принципами [13].

5.1 Супервариационный принцип для фундаментальных констант

Рассмотрим действие вида $\mathcal{S}_\alpha[\phi]$ для некоторой фундаментальной теории, где ϕ — коллективный символ для набора динамических переменных (относящихся к частицам, полям и т.д.), а α — коллективный символ для набора фундаментальных констант теории. Пусть $\phi_\beta(\alpha)$ — решение уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$\delta_\phi \mathcal{S}_\alpha[\phi] = 0,$$

с некоторыми начально-краевыми условиями, фиксированными посредством набора параметров β. Подставляя это решение обратно в действие (и регуляризуя результат, если это необходимо), мы получаем функцию многих переменных вида:

$$\Phi(\alpha, \beta) \equiv \mathcal{S}_{\mathrm{reg}\ \alpha}[\phi_\beta(\alpha)]. \tag{101}$$

Ключевая идея излагаемого нами супервариационного принципа заключается в минимизации функции (101) по отношению к набору переменных α, для того чтобы получить выражения для набора параметров α или его части:

$$\alpha = \alpha_0(\beta), \tag{102}$$

связывающие значения фундаментальных констант с параметрами граничных условий.

Более кардинальный шаг заключается в минимизации (101) по отношению к полному набору переменных (α, β), что в принципе определяет как существенные фундаментальные постоянные, так и граничные условия "из ничего".

5.2 Пример: гармонический осциллятор

В качестве простейшего примера рассмотрим гармонический осциллятор с действием

$$\mathcal{S}[x(t)] = \int \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}\right] dt. \tag{103}$$

Общее решение уравнений движения, вытекающих из (103) хорошо известно:

$$x_0(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \quad \omega = \sqrt{k/m}, \tag{104}$$

где m — масса осциллятора, k — параметр его жесткости, A — амплитуда, φ — начальная фаза. Первые два параметра относятся к числу "фундаментальных постоянных" модели, вторые два — к числу начально-краевых условий. Подставляя (104) в (103), получаем для функции $\Phi_\beta(\alpha)$ ($\beta = \{A, \varphi, T\}$, $\alpha = \{m, k\}$) в (101):

$$\Phi_{(A,\varphi,T)}(k, m) \equiv \int\limits_0^T L(x_0(t), \dot{x}_0)\, dt = \tag{105}$$

$$\frac{kA^2}{4\omega}\left[\sin 2(\omega T + \varphi) - \sin 2\varphi\right].$$

Здесь появился еще один параметр T — "время существования" осциллятора. Очевидно, что экстремумы по k и по A тривиальны и дают нулевое действие. Условия экстремума для параметров ω и φ принимают вид системы уравнений:

$$(\chi - 2\varphi)\cos\varphi - \sin\chi + \sin 2\varphi = 0; \quad \cos\chi = \cos 2\varphi, \tag{106}$$

где $\chi \equiv 2(\omega T + \varphi)$. Общее решение второго уравнения имеет вид:

$$\chi_k = \pm 2\varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{107}$$

Ветвь с плюсом приводит к независимым спектру частот и спектру фаз:

$$\omega_k = \frac{\pi k}{T}; \quad \varphi_l = (2l+1)\frac{\pi}{4}, \quad k, l \in \mathbb{Z}. \tag{108}$$

Ветвь с минусом приводит к спектру частот и спектру фаз на двумерной целочисленной решетке:

$$\omega_{kl} = \frac{\chi_{kl} - \pi k}{T}; \quad \varphi_{kl} = \pi k - \frac{\chi_{kl}}{2}, \quad k, l \in \mathbb{Z}, \tag{109}$$

где χ_{kl} — один из корней безразмерного трансцендентного уравнения:

$$\tan\chi = \chi - \pi k. \tag{110}$$

Разумеется, для обычного осциллятора в виде грузика на нити или на пружинке у нас нет никаких оснований применять супервариационный принцип, поскольку такого рода осцилляторы искусственны и их параметры в определенном смысле случайны. Однако для "фундаментальных осцилляторов" в виде частиц или квазичастиц, рассмотренная нами супервариационная процедура дает в принципиальном (но, конечно, не количественном!) плане правдоподобные результаты: элементарные возбуждения связаны с глобальными фундаментальными характеристиками системы. Более того, спектр колебаний такого осциллятора согласно (108)-(109) оказывается квантованным, причем в формуле (108) он, как и в квантовой механике, эквидистантен, а в формуле (109) при возрастании абсолютной величины l он очень быстро становится таковым:

$$\omega_{kl} \overset{\text{as}}{\approx} \omega_0 \left(l - k - \frac{1}{2}\right), \tag{111}$$

где $\omega_0 = \pi/T$.

5.3 Супервариационная процедура для потенциала

Рассмотренные выше идеи, касающиеся фундаментальных параметров теории, нетрудно распространить также и на фундаментальные зависимости теории, типа зависимостей ее потенциала от полевых переменных.

Пусть действие некоторой полевой теории имеет вид:

$$\mathcal{S}[\phi] = \int \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)\, d\mathrm{vol}, \tag{112}$$

где лагранжиан $\mathcal{L} = (\partial\phi)^2 - U(\phi, \partial\phi)$. Пусть следствием уравнений Эйлера-Лагранжа является интеграл (или система интегралов) вида:

$$F(\phi, \partial\phi) = 0. \tag{113}$$

Если интеграл (113) это позволяет сделать, то исключим с помощью него кинетический член в лагранжиане $\mathcal{L}$. Обозначая совокупность переменных, от которых зависит потенциал U через y, а остальную совокупность через x', приведем действие (112) к виду:

$$\mathcal{S}[\phi]|_F = \int \mathcal{L}|_F\, d\mathrm{vol} = \int \mathcal{L}'(x', y, U(y), \partial U(y)) J(x', y)\, d\mathrm{vol}_y \wedge d\mathrm{vol}_{x'} \equiv \mathcal{S}'[U(y)] \tag{114}$$

— функционала относительно функции $\mathcal{U}(y)$. Новое действие (114) получается ограничением исходного действия (112) на интеграл (113) и переходом от координатных переменных (x) к новой системе "полевых координат" (x', y) (J в (114) — якобиан перехода). При этом совокупность переменных x' представляет собой совокупность параметров, по которым в последнем знаке равенства в (114) произведено усреднение (интегрирование с регуляризацией, если она требуется). Таким образом, рассматривая теперь функционал $\mathcal{S}'[U(y)]$, приходим к уравнениям экстремума:

$$\delta_U \mathcal{S}'[U(y)] = 0, \tag{115}$$

определяющим потенциал с точностью до констант.

5.4 Пример 1: одномерные задачи классической механики

Попробуем определить потенциал для одномерных консервативных систем классической механики (1-мерная теория поля), которые описываются действием вида:

$$\mathcal{S}[x(t)] = \int \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)\right] dt. \tag{116}$$

Хорошо известно, что такая система допускает интеграл энергии:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U = E = \mathrm{const}. \tag{117}$$

Выражая из него кинетическую энергию и одномерный "якобиан перехода":

$$J = \frac{dx}{dt} = \sqrt{2(E-U)/m},$$

приходим к новому функционалу:

$$\mathcal{S}[U] = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{E - 2U(x)}{\sqrt{E - U(x)}}\, dx. \tag{118}$$

Поскольку этот функционал не зависит от производных U', его экстремум может достигаться лишь на некоторой постоянной[7] $U = \mathrm{const}$. Простой расчет дает: $U = 5E/6$. Подстановка в исходное действие (116) приводит к выражению:

$$\mathcal{S}_0 = -\frac{2}{3}ET. \tag{119}$$

В силу неравенств $E \geq 0$, $T > 0$ можно заключить, что исходное действие (116) не имеет суперэкстремума!

5.5 Пример 2: суперэкстремум в теории h-поля

Сейчас мы установим еще одно интересное свойство лагранжиана в (48): он обеспечивает существование вполне определенного суперэкстремума, который мы найдем с точностью

[7] Традиционная точка зрения заключается в игнорировании полных производных в лагражианах, к которым относятся и постоянные добавки к ним. В супервариационных задачах игнорирование полных производных, вообще говоря, недопустимо, поскольку они влияют на граничные условия, которые теперь также подлежат определению.

до пары фундаментальных констант. Из интеграла (51) можно вывести следующее выражение для квадрата модуля неголоморфности:

$$X = \frac{|\varphi|^2}{(1-\mathcal{U}')^2}. \tag{120}$$

Подставляя его[8] в действие (48) и переходя от переменных $(h, \bar{h})$ к новым переменным[9] (X, X'), приходим к новому действию вида:

$$\mathcal{S}'[\mathcal{U}(X)] = \int \left[\frac{|\varphi|^2}{(1-\mathcal{U}')^2} - U\right] dX \wedge dX'.$$

Варьируя его по U и исключая $|\varphi|^2$ посредством (120), мы приходим к уравнению суперэкстремума теории:

$$\frac{d}{dX}\left(\frac{X}{1-\mathcal{U}'}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Его решение имеет вид:

$$\mathcal{U}(X) = 3X + U_0 + 2U_1 \ln\left|1 - \frac{X}{U_1}\right| \tag{121}$$

где U_0, U_1 — пара "фундаментальных констант" теории. Их (отношение) можно найти применяя супервариационный принцип в форме раздела 5.1. Исследование 2-мерной вселенной с потенциалом вида (121) мы проведем отдельно в одной из будущих публикаций.

6 Заключение

Приведем краткое резюме развиваемого подхода.

1. Наш подход занимает промежуточное место между специальной и общей теориями относительности. С одной стороны, мы строим теорию поля в плоском двумерном пространстве-времени, с другой — расширяем множество изометрических преобразований, оставляющих метрику форминвариантной, до множества конформных (или даже общих координатных) преобразований, которые образуют бесконечномерную группу. При этом физико-геометрические эффекты, порождаемые гиперболическим полем, могут быть истолкованы на языке эффективной метрики пространства-времени (полученной деформацией плоской метрики Минковского в декартовых координатах). Мы, однако, становимся на активную точку зрения на координатные преобразования, согласно которой деформируется само пространство-время, в то время как псевдоевклидова метрика считается недеформируемой (отсчетной). Наглядно деформация пространства-времени в нашем подходе представлена на рис. 7. Общее обсуждение классической теории поля с позиций теории упругости многомерных сплошных сред можно найти в [9, 10].

2. В пустом пространстве-времени h-поле описывается h-голоморфной функцией двойной переменной. Условия гиперболической аналитичности (13) автоматически обеспечивают волновой характер h-поля F в этом случае, равно как и конформную инвариантность вместе со спецрелятивистской инвариантностью.

[8]При этом мы, как обычно игнорируем граничные члены, делая определенные предположения о поведении решений на бесконечности. Для самосогласованности суперэкстремума следовало бы проверить эти предположения для решений, вытекающих из модели с суперэкстремальным потенциалом. Мы проведем это рассмотрение в одной из следующих публикаций.

[9]Таким, что $\frac{D(X,X')}{D(h,\bar{h})} = \mathrm{const}$. Доказательство существования такой системы координат представляет собой полезное упражнение с 1-формами!

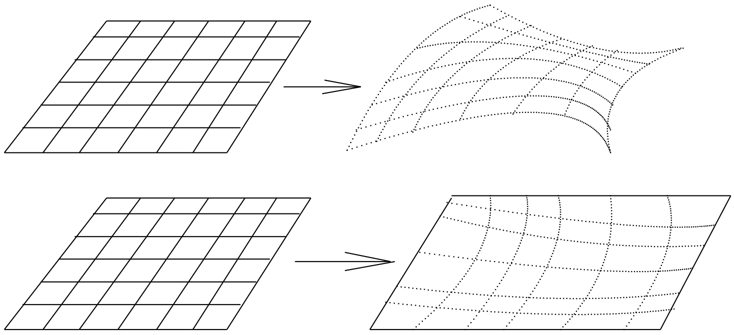

Рис. 7: Деформация пространства-времени в ОТО (сверху) и в h-аналитическом подходе (снизу). В ОТО деформации пространства-времени в общем случае связаны с изгибанием пространственно-временной мембраны, приводящими к кривизне, в то время как в h-аналитическом подходе деформация пространственно-временной мембраны сводится к растяжениям-сжатиям, оставляющим внутреннюю кривизну нулевой.

3. В пустом пространстве-времени h-поле проявляет себя в эффектах конформной деформации хроноинтервалов и пространственных длин, принципиально доступных экспериментальному наблюдению. С позиций классических специальной и общей теорий относительности эти эффекты объясняются на геометрическом языке, включающем спецрелятивистские эффекты и кривизну. В частности, формулы (36)-(37) по всей видимости представляют собой альтернативное выражение классического эффекта гравитационного красного смещения, традиционно описываемого в рамках геометрических теорий гравитации с помощью неоднородной метрики временных промежутков [7]. Вопрос о точном соотношении теории относительности с развиваемым в настоящей статье подходом мы оставляем для будущих исследований. По всей видимости предлагаемый подход является альтернативным к ОТО (в ее двумерной версии) и ни одна из теорий не является частным или предельным случаем другой.

4. Области пространства-времени, заполненные материей, характеризуются отличным от нуля квадратом модуля неголоморфности $X = |F_{\bar{h}}|^2$. При этом все основные свойства материи (плотность энергии, давление и их связь) определяются видом потенциальной функции $\mathcal{U}(X)$. Выбор действия в виде (48) автоматически обеспечивает как согласованность с предыдущим пунктом, так и возможность описания протяженных конфигураций материи (соотношение (70) и обсуждение в конце раздела 4.2). Отметим некоторую условность разделения лагранжиана в (48) на кинетическое и потенциальное слагаемые: первое (кинетическое) слагаемое, рассматриваемое под знаком интеграла в действии (48) может быть преобразовано в выражение X с помощью двукратного перекрестного применения формулы интегрирования по частям. Это обстоятельство тесно связано с ролью линейных по X членов в $\mathcal{U}$, которая обсуждалась в разделе 4.1. Таким образом, можно считать, что излагаемый нами подход не содержит кинетического члена в действии и описывает статическое пространственно-временное равновесие 2-мерной вселенной. Такая точка зрения в несколько ином аспекте высказывалась ранее в работе [11].

5. Возможна ситуация, когда величина $X = 0$, в то время как сама неголоморфность $F_{,\bar{h}} \neq 0$. Такая неголоморфность должна соответствовать "материи", которая в некотором смысле близка по своим свойствам к пустому пространству-времени. Выскажем здесь гипотезу, согласно которой неголоморфность с нулевым модулем описывает без-

массовые физические поля (гравитацию и (или) электромагнетизм). Эта гипотеза частично подкрепляется следующим наблюдением: формулы (83) при $X = 0$ дают уравнение состояния материи вида $p = \varepsilon$, которое в случае 2-мерного пространства-времени описывает газ ультрарелятивистских частиц[10].

6. Рассмотренный нами пример статической вселенной иллюстрирует физическую адекватность подхода: при некотором выборе потенциала можно построить решение, описывающее распределение давления и плотности энергии внутри источника (упругого стержня), обращающиеся в нуль на границе источника. При этом внешнее h-поле постоянно и стрела времени снаружи источника отсутствует. Внутри источника линии времени, определяемые градиентом потенциала, ориентированы вдоль стержня, что соответствует прочтению пространственно-временной диаграммы на рис. 4 не слева направо, а сверху вниз: конечный процесс, внезапно начинающийся и внезапно заканчивающийся, индуцирует локальную стрелу времени, при этом физическое время процесса пропорционально скачку потенциала $U(L) - U(0)$. Следует помнить, что рассмотренный пример (изолированный стержень в 2-мерной вселенной) является искусственным. Отметим также, что общие вопросы существования и единственности решения в моделях с действием вида (48) остаются открытыми.

7. Новые интересные и перспективные возможности излагаемого подхода открывает изложенная нами в общих чертах в разделе 5 супервариационная процедура. С одной стороны, эта процедура применима к любой фундаментальной теории поля. Она дает принципиальную возможность рассчитать как фундаментальные параметры теории, так и ее фундаментальные зависимости, не выходя за рамки самой теории. С другой стороны, как это показывает пример раздела 5.4, не для всякой теории поля супервариационный принцип дает содержательные результаты. В разделе 5.5 мы установили, что теории h-голоморфных полей с действием вида (48) имеют суперэкстремум вида (121), который и представляет собой ту единственную уникальную модель пространства-времени-материи, которая и подлежит детальному изучению в рамках данной теории.

Более реалистичные и богатые по физическому содержанию ситуации возникают при обобщении развитого подхода на случай поличисел $\mathcal{H}_n$ высших измерений. При этом основные положения и интерпретация теории, оставаясь в своих общих чертах неизменными, требуют некоторой доработки. Мы планируем посвятить таким обобщениям ряд будущих публикаций. Отметим, что некоторые более ранние формулировки поличисловой теории поля (например [12]) опирались на иные постулаты и иную интерпретацию полевых переменных, в рамках которых соотношение теории с экспериментальными наблюдениями остается в значительной степени невыясненным.

Литература

[1] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. h-голоморфные функции двойной переменной и их приложения // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(13), том 7, 2010, с. 44-77.

[2] Павлов Д.Г., Кокарев С.С. Гиперболическая теория поля на плоскости двойной переменной // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(13), том 7, 2010, с. 78-127.

[3] Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973.

[4] Лаврентьев М.А., Шабат Б.О. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977.

[5] Гарасько Г.И. Начала финслеровой геометрии для физиков. М.: Тетру, 2009.

[10] В рассматриваемом нами 2-мерном случае при этом оказывается, что $p = \varepsilon = \mathcal{U}(0) = \mathrm{const}$.

[6] Павлов Д.Г. Число, геометрия и физическая реальность. В сб. Метафизика (под ред. Ю.С. Владимирова) 2010.

[7] Кокарев С.С. Введение в общую теорию относительности. Ярославль, Изд-во ЯрГУ, 2010.

[8] Паули В., *Теория относительности*, М., Физматлит, 1991.

[9] Kokarev S.S. Space-time as multidimensional elastic plate // *Nuovo Cimento*, B113, 1998, pp. 1339-1350.

[10] Kokarev S.S. Space-time as strongly bent plate // *Nuovo Cimento*, B114, 1999, pp. 903-921

[11] Kokarev S.S. Classical solids dynamics as 4D static of elastic strings // *Nuovo Cimento*, B116, 2001, pp. 915-936.

[12] Гарасько Г.И. Теория поля и финслеровы пространства // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 2(6), том 3, 2006.

[13] Кокарев С.С. Три лекции о законах Ньютона. В сб. трудов РНОЦ Логос, вып. 1, 2006, с. 45-72.

ALGEBRAIC UNIFIED THEORY OF SPACE-TIME AND MATTER ON THE DOUBLE VARIABLE PLANE

D.G. Pavlov[1], S.S. Kokarev[1,2]

[1] *Research Institute of Hypercomplex Systems in Geometry and Physics, Friazino, Russia*
[2] *RSEC Logos, Yaroslavl, Russia*

geom2004@mail.ru, logos-center@mail.ru

Using double numbers algebra we develop algebraic version of 2D relativity theory, which takes intermediate place between special and general relativity. In space-time free of matter the main object of the theory – hyperbolic potential F - is h-holomorphic function of double variable. Physically it is responsible for local splitting of space-time onto time and space directions in conformally deformed flat Minkowski space. It is shown that the effect of conformal deformation is in principle observable with the help of experiments concerning measurements with spatially separated clocks. Space-time with matter is described by relation $F_{,\bar{h}} \neq 0$. The dynamics of hyperbolic field is described by special action, depending only on hyperbolic square of non-holomorphicity. It is shown, that field equation are non-linear h-conjugated wave equations with self-action. Specific properties of these equations are: 1) presence of the first integral; 2) compatibility (integrability) condition, defining class of admissible fields $\mathcal{G}(\mathcal{H}_2)$. The latter condition can be viewed as generalization of hyperbolic Cauchy-Riemannian condition and it is crucial for construction of consistent and reliable physical theory of space-time and matter in 2D. As an example we consider static 2D universe with 1D deformed bar. Some aspects of relations of SR and GR to the approach are discussed. We formulate super-extremum principle, allowing one to calculate fundamental constants and boundary conditions of the theory.

Key Words: hyperbolic field, h-holomorphicity, non-holomorphicity, conformal transformations, super-extremum.