СКРУЧЕННЫЕ КОГОМОЛОГИИ ГРУПП ОБЕРТОК НАД КВАТЕРНИОНАМИ И ОКТОНИОНАМИ

С.В. Людковский

Московский государственный технический университет МИРЭА, Москва, Россия
sludkowski@mail.ru

Данная статья посвящена исследованию групп оберток связных расслоений над полем действительных чисел **R**, полем комплексных чисел **C**, телом кватернионов **H** и алгеброй октонионов **O**. Исследуются когомологии групп оберток и их структура. Строятся и изучаются пучки групп оберток. Более того, изучаются также скрученные когомологии и пучки над над телом кватернионов и алгеброй октонионов.

Ключевые слова: скрученные когомологии, группы оберток, алгебра октонионов, связное расслоение, пучок, сплетающее произведение.

1 Введение

Геометрические группы петель окружностей впервые были введены Лефшецем в 1930-х годах, а затем их конструкция была пересмотрена Милнором в 1950-х годах. Лефшец использовал C^0-равномерность на семействах непрерывных отображений, что приводило к необходимости комбинирования его конструкции со структурой свободной группы с помощью слов. Позднее Милнор использовал соболевскую H^1-равномерность, что позволило ввести групповую структуру более естественным образом [36].

Построение Лефшеца очень ограничительное, потому что оно работает с C^0-равномерностью непрерывных отображений в компактно-открытой топологии. Даже для сфер S^n размерности $n > 1$ оно не работает прямым образом, а использует итерированные группы петель окружностей. Затем их конструкция была обобщена для расслоений над окружностями и сферами со структурами параллельных переносов над **C**. Гладкие когомологии Делинье также изучались на таких группах [12].

Группы оберток кватернионных и октонионных расслоений, а также для более широких классов расслоений над **R** или **C** были также определены, даны их примеры и основные теоремы в работе [21]. Изучения их структур были начаты в [22]. Данная статья продолжает предыдущие работы автора на эту тему, где изучались обобщенные группы петель на многообразиях над **R**, **C** и **H**, но ни для расслоений и ни над октонионами [23, 31, 29, 30].

Голоморфные функции кватернионных и октонионных переменных изучались в работах [27, 28, 25]. Там рассматривалось специфическое определение супер-дифференцируемости, так как тело кватернионов имеет в некотором смысле градуированную алгебраическую структуру. Это определение супер-дифференцируемости не накладывает условия правой или левой супер-линейности супер-дифференциала, так как это приводит к узкому классу функций. В журналах имеются некоторые статьи о кватернионных многообразиях, но практически они подразумевают комплексные многообразия с дополнительной кватернионной структурой на его касательном пространстве (смотри, например, [38, 52] и ссылки там). Кватернионные многообразия были определены также иным образом в статье [25]. Приложения кватернионов в математике и физике обширны и их можно найти в работах [10, 14, 4, 20].

Геометрические группы петель имеют важные приложения в современных физических теориях (смотри [17, 33] и ссылки там). Группы петель также интенсивно используются в калибровочных теориях. Группы оберток можно использовать в теории мембран, которая является обобщением теории струн (суперструн). Расслоения, пучки и когомологии над кватернионами и октонионами интересны в том отношении, что они принимают в расчет спиновые и изоспиновые структуры на многообразиях, потому что имеется вложение группы Ли $U(2)$ в тело кватернионов **H**.

Данная статья посвящена построениям и исследованиям когомологий и пучков групп оберток. Более того, далее изучаются скрученные когомологии и пучки над кватернионами и октонионами. Также исследуются скрученные аналоги решетчатых разрешений (bar resolution) пучков и гладких когомологий. Это делается над скрученными мультипликативными группами. Ранее изучались лишь комплексный случай и с группами петель расслоений на сферах. В данной статье рассматриваются случаи кватернионов и октонионов, и групп оберток общих расслоений.

Основные результаты статьи получены впервые, и они даются в теоремах 34, 36, 44, 48.1, 55, 58, 60, предложениях 6, 14, 15, 19, 26, 27, 29, 32, следствиях 7, 8, 33, 45 и 47. Ниже используются обозначения и определения, и результаты из предыдущих работ [12, 13, 21, 22, 23, 31, 29, 30].

2 Когомологии групп оберток

1. Замечания и определения. Рассмотрим триангулированный компактный полиэдр M, который может быть вложен в алгебру Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r^n$, и его под-полиэдр S_M коразмерности не менее двух, $codim(S_M) \ge 2$, где $M \setminus S_M$ - это C^∞ гладкое многообразие такое, что разность $M \setminus S_M$ всюду плотна в M. Если размерность в смысле покрытий (смотри главу 7 в [51]) топологического пространства $M \setminus S_M$ есть $dim(M \setminus S_M) = b$, то по определению M имеет размерность b. Тогда S_M называется сингулярностью для M. Псевдо-многообразие M ориентировано, если $M \setminus S_M$ ориентировано (смотри также §1.3.1 в [21]).

Если $M \setminus S_M$ не имеет границы, то триангулированное псевдо-многообразие M называется циклическим псевдо-многообразием (циклом). Если $(Y, \partial Y)$ - это пара, состоящая из триангулированного псевдо-многообразия Y и границы ∂Y такой, что $Y \setminus S_Y$ - это многообразие с границей $\partial Y \setminus S_Y$, ∂Y - это циклическое псевдо-многообразие с сингулярностью $S_Y \cap \partial Y$, то $(Y, \partial Y)$ называется триангулированным псевдо-многообразием с границей.

Предпучок F на топологическом пространстве X есть контравариантный функтор F из категории открытых подмножеств в X и их включений в категорию групп или колец (все они или альтернативны или ассоциативны), так что $F(U)$ - это группа или кольцо для любого U открытого в X и для любого $U \subset V$ с U и V открытыми в X, существует гомоморфизм $s_{U,V} : F(V) \to F(U)$ такой, что $s_{U,U} = 1$ и $s_{U,V} s_{V,Y} = s_{U,Y}$ для любого $U \subset V \subset Y$ с подмножествами U, V, Y открытыми в X.

Пусть F_x обозначает семейство всех элементов $f \in F(U)$ для подмножества U открытого X с $x \in U$. Элементы $f \in F(U)$ и $g \in F(V)$ называются эквивалентными, если существует открытая окрестность Y точки x такая, что $s_{Y,U}(f) = s_{Y,V}(g)$. Это порождает отношение эквивалентности. Класс всех эквивалентных элементов с f называется ростком f_x для f в точке x. Множество $\mathcal{F}_x$ всех ростков предпучка F в точке $x \in X$ является индуктивным пределом $\mathcal{F}_x = ind - \lim F(U)$ взятым по всем окрестностям U точки x в X.

В множестве $\mathcal{F}$ всех ростков $\mathcal{F}_x$ возьмем базу топологии, состоящую из всех множеств $\{f_x \in \mathcal{F}_x : x \in U\}$, где $f \in F(U)$. Это индуцирует пучок $\mathcal{S}$, порожденный предпучком F.

Пучок групп или колец (все они или альтернативны, или ассоциативны) на X - это пара $(\mathcal{S}, h)$, удовлетворяющая условиям $(S1 - S4)$:

$(S1)$ $\mathcal{S}$ есть топологическое пространство;

$(S2)$ $h : \mathcal{S} \to X$ - это локальный гомеоморфизм;

$(S3)$ для любой точки $x \in X$ множество $\mathcal{F}_x = h^{-1}(x)$ есть группа называемая слоем пучка $\mathcal{S}$ в точке x;

$(S4)$ групповые или кольцевые операции непрерывны, то есть, $\mathcal{S}\Delta\mathcal{S} \ni (a,b) \mapsto ab^{-1} \in \mathcal{S}$ или $\mathcal{S}\Delta\mathcal{S} \ni (a,b) \mapsto ab \in \mathcal{S}$, и $\mathcal{S}\Delta\mathcal{S} \ni (a,b) \mapsto a + b \in \mathcal{S}$ непрерывны соответственно, где $\mathcal{S}\Delta\mathcal{S} := \{(a,b) : a, b \in \mathcal{S}, h(a) = h(b)\}$.

Мы можем рассмотреть предпучки или пучки различных классов гладкости, например, H^t или H^t_p, когда соответствующие определяющие пучок или предпучок отображения $s_{U,V}$, h и групповые операции таковы, а $\mathcal{S}$ и F являются H^t или H^t_p дифференцируемыми пространствами соответственно (смотри также §1.3.2 [21]).

Рассмотрим пучок $\mathcal{S}_{N,G}$ порожденный предпучком $U \mapsto \{f \in Hom^t_p((W^M E)_{t,H}, G) : supp(f) \subset U\}$, где U - открыто в N и $supp(f) \subset U$ означает, что существует точка $y \in N$ и $\hat{\eta} \in H^t_p(\hat{M}, N)$ с $\hat{\eta}(\hat{s}_{0,q}) = x$ для любого $q = 1, ..., k$ и $\hat{\eta}(\hat{s}_{0,q}) = y$ для всякого $q = k+1, ..., 2k$ и $\hat{\gamma} \in H^t_p(\hat{M}, \{\hat{s}_{0,q} : q = 1, ..., 2k\}; N, y)$, так что $\hat{\gamma} = \gamma \circ \Xi$ и $f =< \hat{\eta} \vee \hat{\gamma} >_{t,H}$, где группа оберток $(W^M E)_{t,H}$ берется для отмеченной точки $y \in N$, $\Xi : \hat{M} \to M$ - это факторное отображение как в [21].

В частности, мы можем взять $G = \mathcal{A}_r^*$ и назвать $\mathcal{S}_{N,\mathcal{A}_r^*}$ пучком инфинитезимальных голономий, где $1 \le r \le 3$.

В силу свойства $(P4)$ [21] для любых несингулярных точек $y \in N$ и $u \in E_y$ в слое E_y в E над y существует $\mathcal{A}_r$ векторное подпространство H_u касательного расслоения T_uE в точке u называемое горизонтальным подпространством для T_uE, так что $\pi_*|_{H_u} : H_u \to T_yN$ есть изоморфизм, где $\pi(u) = y$, $t' \ge [dim(E)/2] + 2$ или $t' = \infty$, так как существуют обобщенные производные в соболевском пространстве $H^{t'}$ (смотри §III.3 в [34]). Это имеет место для всех $y \in N$ и $u \in E_y$, когда N и E принадлежат классу гладкости $H^{t'}$ вместо $H_p^{t'}$.

В силу $(P1)$ семейство $\{H_u\}$ горизонтальных подпространств в TE гладко зависит от u. Предположим, что Y - это векторное поле в TE соответствующее векторному полю X в TN такому, что $\pi_*(Y) = X$, тогда

$(CD1)$ $T_uE = H_u \oplus V_u$, где $V_u = \pi_*^{-1}(0) \subset T_uE$ - это пространство векторов касательных к E_u в точке u. Согласно условию $(P3)$ горизонтальные пространства являются G-эквивариантными, то есть,

$(CD2)$ $H_{uz} = (R_z)_* H_u$, где R_z - это диффеоморфизм для E даваемый умножением на z справа, а $(R_z)_*$ соответствует касательному отображению TR_z касательного расслоения TE.

Семейство $H = \{H_u \subset T_uE : u \in E, \pi(u) = y \in N\}$ называется связывающим распределением (connection distribution) главного расслоения $E(N, G, \pi, \Psi)$, если H_u гладко зависит от u и выполнены условия $(CD1, CD2)$.

2. Определения и замечания. Два гладких главных G расслоения E и E' со связывающими распределениями (E, H) и (E', H') называются изоморфными, если существует изоморфизм $f : E \to E'$ гладких главных G расслоений $f : E \to E'$ такой, что $f_*(H) = H'$.

Связывающее распределение H на E называется структурой параллельного переноса $\mathbf{P}^H$ на E сопоставляющим $\mathbf{P}^H_{\hat{\gamma},u} \in H^t_p(\hat{M}, E)$ с $\mathbf{P}^H_{\hat{\gamma},u}(\hat{s}_{0,q}) = u$ для любых $q = 1, ..., k$ и $\pi \circ \mathbf{P}^H_{\hat{\gamma},u} = \hat{\gamma}$, так что $T_x\mathbf{P}^H_{\hat{\gamma},u} =: (\mathbf{P}^H_{\hat{\gamma},u}(x), D\mathbf{P}^H_{\hat{\gamma},u}(x))$ для всякого $x \in \hat{M}$, где $\hat{\gamma} \in H^t_p(\hat{M}, \{\hat{s}_{0,q} : q = 1, ..., 2k\}; N, y_0)$, $D\mathbf{P}^H_{\hat{\gamma},u}(x) \in H_{\hat{\gamma}(x)}$, $T\mathbf{P}$ - это касательное отображение для $\mathbf{P}$ (смотри [19]).

Таким образом, существует биективное соответствие между структурами параллельных переносов и связывающими распределениями на E. Поэтому отображение $H \mapsto \mathbf{P}^H$ индуцирует биективное соответствие между классами изоморфных структур параллельных переносов и связывающими распределениями.

Использование экспоненциальной функции на алгебре Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ дает $\exp(\mathcal{A}_r) = \mathcal{A}_r^*$ для любого $1 \le r \le 2$ мультипликативную группу или квази-группу при $r = 3$ (альтернативную вместо ассоциативной, смотри §3 [27, 28]).

Если E - это главное $\mathcal{A}_r^*$ расслоение с $1 \le r \le 3$, тогда для любого $v \in V_u$ существует и единственное $z(v) \in \mathcal{A}_r$ такое, что $v = [d(y \ \exp(b \ z(v))/db]|_{b=0}$, где $b \in \mathbf{R}$. Поэтому для любого связывающего распределения $\{H_u : u \in E\}$ на E существует дифференциальная 1-формы w над $\mathcal{A}_r$, так что $w(X_h + X_v) = z(X_v)$ для любого $X = X_h + X_v \in H_u \oplus V_u = T_uE$ и w является G-эквивариантной: $(R_z)^*w = w$ благодаря G-эквивариантности $\{H_u : u \in E\}$, здесь $G = \mathcal{A}_r^*$.

Дифференциальная 1-форма w на E такая, что она является G-эквивариантной и $w(X_v) = z(X_v)$ для любого $X_v \in V_u$ называется связывающей 1-формой.

Два гладких главных G расслоения со связностями (E, w) и (E', w') называются изоморфными, если существует изоморфизм $f : E \to E'$ гладких главных G расслоений такой, что $f^*(w') = w$.

Для w существует связывающее распределение H^w на E, для которого $H_u^w = ker(w_u) \subset T_uE$, что индуцирует биективное соответствие между дифференциальными 1-формами и связывающими распределениями на E. Следовательно, $w \mapsto H^w$ дает биективное соответствие между классами связностей и связывающих распределений.

Тогда существует группа оберток $(W^M E; N, \mathcal{A}_r^*, \nabla)_{t,H}$, где структура параллельного переноса $\mathbf{P}$ ассоциирована с ковариантным дифференцированием ∇ связности w.

2-Форма кривизны Ω над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, $1 \le r \le 3$, 1-формы связности w на гладком главном расслоении $E(N, G, \pi, \Psi)$ над $\mathcal{A}_r$ дается формулой $\Omega(X, Y) = dw(hX, hY)$, где hX и hY - это горизонтальные компоненты векторов X и Y.

3. Замечание. Если $\eta \in H^t_p(K,E)$, $t \ge 1$, и ν - это дифференциальная форма на E, то существует ее ограничение $\eta^*\nu$, который является дифференциальной формой на K, где K - это H^t_p-псевдо-многообразие. Для ориентируемых K и E и H^t_p диффеоморфизма η из K на E и ν с компактным носителем выполняется равенство $\int_K \eta^*\nu = \epsilon \int_E \nu$, где $\epsilon = 1$ при η сохраняющем ориентацию, $\epsilon = -1$ при η изменяющем ориентацию (смотри [6, 15, 25]). В частности, можно рассматривать $K = E(M, G, \pi_M, \Psi^M)$, $\eta = (\eta_0, \eta_1)$, $\eta_0 : M \to N$, $\eta : E(M) \to E(N)$, $\pi_N \circ \eta = \eta_0 \circ \pi_M$, $\eta_1 \circ pr_2 = pr_2 \circ \eta$, pr_2 есть проекция на карты для E из E в G, $\eta_1 = id$ может также быть.

Предположим, что M и E являются $\mathcal{A}_r$ голоморфным многообразием и главным расслоением, так что E ориентируемо и $2^r - 1$-связно, что не является очень ограничительным в силу предложения 13 и замечания 14 [22]. Если $\hat\gamma \in H^t_p(\hat M, \{\hat s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; N, y_0)$, то рассмотрим путь l_q соединяющий точку $\hat s_{0,q}$ с $\hat s_{0,q+k}$, где $1 \le q \le k$, $\hat l_q : [0,1] \to \hat M$. Поэтому $\hat p_q := \hat\gamma \circ \hat l_q : [0,1] \to N$ и $\hat p_q^* w := (\hat p_q, id)^* w$ - это дифференциальная форма на $[0,1]$, где w есть $\mathcal{A}_r$ голоморфная один-форма связности на E. Мы получаем, что $\hat\gamma^* w$ - это дифференциальная один-форма на $\hat M$ и существует ее ограничение $\nu_{\gamma,q} := \gamma^* w|_{\hat l_q[0,1]}$.

Тогда мы также имеем $\gamma \in H^t_p(M, \{s_{0,q} : q = 1, ..., k\}; N, y_0)$ и $l_q : S^1 \to M$ и $p_q : S^1 \to N$ соответственно, где $\hat\gamma = \gamma \circ \Xi$ (смотри [21]), S^1 - это единичная окружность в $\mathbf{C}$ с центром в нуле, в то время как комплексное поле $\mathbf{C} = \mathbf{C}_M$ вложено в алгебру Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ как $\mathbf{R} \oplus M\mathbf{R}$ с чисто мнимым $M \in \mathcal{A}_r$, $Re(M) = 0$, $|M| = 1$, когда $2 \le r \le 3$.

Поскольку форма w является $\mathcal{A}_r$ голоморфной, то интеграл $\int_\phi w$ не зависит от спрямляемой кривой ϕ, но лишь от начальной и конечной точек $\phi(0)$ и $\phi(1)$, $\phi : [0,1] \to E$ (смотри теоремы 2.15 и 3.10 в [27, 28] и [30]).

Рассмотрим теперь главное расслоение E со структурной группой $\mathcal{A}_r^*$, где $1 \le r \le 3$. Тогда ограничение $p_q^* E$ расслоения E есть тривиальное $\mathcal{A}_r^*$-расслоение над окружностью S^1. Последнее расслоение несет ограничение дифференциальной один-формы связности $p_q^* w$. Возьмем ограничение, $\rho^*(p_q^* w)$ - это один-форма, где $\rho : S^1 \to p_q^* E$ - это тривиализация расслоения $p_q^* E \to S_1$.

Структура параллельного переноса $\mathbf{P}_{\hat\gamma,u}(x)$ для (M,E) с $x \in \hat M$ индуцирует структуры параллельных переносов $\mathbf{P}_{\hat p_q,u^*}(s)$ для $(S^1, p_q^* E)$ с $s \in [0,1]$ для любого $q = 1, ..., k$, где $p_q(u^*) = u$. Тогда голономия вдоль γ дается формулой

(H) $h(\gamma) = (h_1, ..., h_k) \in G^k$ с $h_q = h_q(\gamma) = \exp[-\int_{S^1} \rho^*(p_q^* w)]$ для любого $q = 1, ..., k$.

Если $\zeta : S^1 \to p_q^* E$ - это другая тривиализация и $f : S^1 \to \mathbf{C}_M^*$ удовлетворяет условию $\zeta = f\rho$, так что $f(v) = \exp(M2\pi\theta(v))$, где $\theta(v) \in \mathbf{R}$, $M2\pi d\theta(v) = dLn(f(v))$, $v \in S^1$, $\int_{S^1} d\theta$ - это целое число, так как вещественное поле $\mathbf{R}$ есть центр алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, где Ln - это функция натурального логарифма над $\mathcal{A}_r$ (смотри §3.7 и теорема 3.8.3 [28] и [27, 32]). Поэтому формула (H) не зависит от тривиализации ρ, так как $\zeta^*(p_q^* w) = \rho^*(p_q^* w) + dLn(f)$, но $\exp[\int_{S^1} dLn(f)] = 1$.

4. Неассоциативная решетчатая конструкция. Пусть G - это топологическая группа не обязательно ассоциативная, но альтернативная (квази-группа):

$(A1)$ $g(gf) = (gg)f$ и $(fg)g = f(gg)$ и $g^{-1}(gf) = f$ и $(fg)g^{-1} = f$ для любых $f, g \in G$,

и снабженная операцией сопряжения, которая является непрерывным автоморфизмом группы G, так что

$(C1)$ $conj(gf) = conj(f)conj(g)$ для любых $g, f \in G$,

$(C2)$ $conj(e) = e$ для единичного элемента e в G.

Если G имеет определенный класс гладкости, например, H^t_p дифференцируема, то операция сопряжения $conj$ предполагается принадлежащей этому же классу гладкости. Для коммутативной группы, в частности, тождественное отображение можно взять в качестве сопряжения. Для мультипликативной группы $G = \mathcal{A}_r^*$ можно взять $conj(z) = \tilde z$ обычное сопряжение для любого $z \in \mathcal{A}_r^*$, где $1 \le r \le 3$.

Обозначим через $\Delta^n := \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} : x_j \ge 0, x_0 + x_1 + ... + x_n = 1\}$ стандартный симплекс в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$. Рассмотрим $(AG)_n$ как факторпространство дизъюнктного объединения $\bigcup_{k=0}^n (\Delta^k \times G^{k+1})$ по отношениям эквивалентности

(1) $(x_0, ..., x_k, g_0, ..., g_k) \sim (x_0, ..., x_j + x_{j+1}, ..., x_k, g_0, ..., \hat g_j, ..., g_k)$ для $g_j = g_{j+1}$ или $x_j = 0$ с $0 \le j < k$; $(x_0, ..., x_k, g_0, ..., g_k) \sim (x_0, ..., x_{k-1} + x_k, g_0, ..., g_{k-1})$ для $g_{k-1} = g_k$ или $x_k = 0$.

Рассмотрим негомогенные координаты $0 \le t_1 \le t_2 \le ... \le t_k \le 1$ на симплексе Δ^k связанные с барицентрическими координатами формулой $t_j = x_0 + x_1 + ... + x_{j-1}$ и $h_0 := g_0$, $h_j = g_{j-1}^{-1}g_j$ при $j > 0$ на G^{k+1}. Итак, $h_0h_1 = g_0(g_0^{-1}g_1) = g_1$, $(h_0h_1)h_2 = g_1(g_1^{-1}g_2) = g_2$ и по индукции $((...(h_0h_1)...)h_{k-1})h_k = g_{k-1}(g_{k-1}^{-1}g_k) = g_k$.

Тогда отношения эквивалентности (1) приобретают вид:

(2) $(t_1, ..., t_k, h_0[h_1|...|h_k]) \sim (t_2, ..., t_k, (h_0h_1)[h_2|...|h_k])$ при $t_1 = 0$ или $h_0 = e$;

$(t_1, ..., t_k, h_0[h_1|...|h_k]) \sim (t_1, ..., \hat{t}_j, ..., t_k, h_0[h_1|...|h_jh_{j+1}|...|h_k])$ при $t_j = t_{j+1}$ или $h_j = e$;

$(t_1, ..., t_k, h_0[h_1|...|h_k]) \sim (t_1, ..., t_{k-1}, h_0[h_1|...|h_{k-1}])$ при $t_k = 1$ или $h_k = e$. Обозначим через $|x_0, ..., x_k, g_0, ..., g_k|$ класс эквивалентности последовательности $(x_0, ..., x_k, g_0, ..., g_k)$; посредством $|t_1, ..., t_k, h_0[h_1|...|h_k]|$ мы обозначим класс эквивалентности последовательности $(t_1, ..., t_k, h_0[h_1|...|h_k])$.

Тогда пространство AG есть факторпространство для $\bigcup_{k=0}^{\infty} \Delta^k \times G^{k+1}$ по указанным выше отношениям эквивалентности (1), где $(\Delta^k \times G^{k+1}) \cap (\Delta^m \times G^{m+1})$ пусто при $k \ne m$.

Мы введем в G^{n+1} отношение эквивалентности $\mathcal{Y}$:

(3) $(g_0, ..., g_n)\mathcal{Y}(q_0, ..., q_n)$ тогда и только тогда, когда существуют $p_1, ..., p_k \in G$ с $k \in \mathbf{N}$, так что $g_j = p_k(p_{k-1}...(p_2(p_1q_j))....)$ для любого $j = 0, ..., n$.

Очевидно, что это отношение рефлексивно: $(g_0, ..., g_n)\mathcal{Y}(g_0, ..., g_n)$ с $p_1 = e$ и $k = 1$. Оно симметрично в силу альтернативности (квази-)группы G, так как $g_j = p_k(p_{k-1}...(p_2(p_1q_j))....)$ эквивалентно с $q_j = p_1^{-1}(p_2^{-1}...(p_{k-1}^{-1}(p_k^{-1}g_j))...)$ для любого $j = 0, ..., n$. Это отношение транзитивно: $(g_0, ..., g_n)\mathcal{Y}(q_0, ..., q_n)$ и $(q_0, ..., q_n)\mathcal{Y}(f_0, ..., f_n)$ влечет $(g_0, ..., g_n)\mathcal{Y}(f_0, ..., f_n)$, так как из g$_j$ $= p_k(p_{k-1}...(p_2(p_1q_j))....)$ и $q_j = s_l(s_{l-1}...(s_2(s_1f_j))....)$ вытекает, что $g_j = p_k(p_{k-1}...(p_2(p_1(s_l(s_{l-1}...(s_2(s_1f_j))....)))....)$ для любого $j = 0, ..., n$, где $k, l \in \mathbf{N}$, $p_1, ..., p_k, s_1, ..., s_l \in G$. В частном случае ассоциативной группы G можно взять параметры $k = 1$ и $l = 1$.

Рассмотрим в $\bigcup_{k=0}^{n} \Delta^k \times G^k$ отношения эквивалентности:

(4) $(x_0, ..., x_k, [g_0 : ... : g_k]) \sim (x_0, ..., x_j + x_{j+1}, ..., x_k, [g_0 : ... : \hat{g}_j : ... : g_k])$ при $g_j = g_{j+1}$ или $x_j = 0$ с $0 \le j < k$; $(x_0, ..., x_k, g_0, ..., g_k) \sim (x_0, ..., x_{k-1} + x_k, [g_0 : ... : g_{k-1}])$ при $g_{k-1} = g_k$ или $x_k = 0$, где $[g_0 : ... : g_k] := \{(q_0, ..., q_k) \in G^{k+1} : (q_0, ..., q_k)\mathcal{Y}(g_0, ..., g_k)\}$ обозначает класс эквивалентности для $(g_0, ..., g_k)$ по отношению эквивалентности $\mathcal{Y}$. Положим $(BG)_n$ равным факторпространству для $\bigcup_{k=0}^{n} \Delta^k \times G^k$ по отношениям эквивалентности (4).

Используя негомогенные координаты на $(BG)_n$, мы перепишем отношение эквивалентности (4) в виде:

(5) $(t_1, ..., t_k, [h_1|...|h_k]) \sim (t_2, ..., t_k, [h_2|...|h_k])$ при $t_1 = 0$ или $h_0 = e$;

$(t_1, ..., t_k, h_0[h_1|...|h_k]) \sim (t_1, ..., \hat{t}_j, ..., t_k, [h_1|...|h_jh_{j+1}|...|h_k])$ при $t_j = t_{j+1}$ или $h_j = e$;

$(t_1, ..., t_k, [h_1|...|h_k]) \sim (t_1, ..., t_{k-1}, [h_1|...|h_{k-1}])$ при $t_k = 1$ или $h_k = e$.

Обозначим через $|x_0, ..., x_k, [g_0 : ... : g_k]|$ класс эквивалентности последовательности $(x_0, \dots, x_k, [g_0 : ... : g_k])$; через $|t_1, ..., t_k, [h_1|...|h_k]|$ обозначим класс эквивалентности последовательности $(t_1, ..., t_k, [h_1|...|h_k])$. Тогда BG есть факторпространство дизъюнктного объединения $\bigcup_{k=0}^{\infty} \Delta^k \times G^k$ по отношениям эквивалентности (4).

Тогда существует проекция $\pi_B^A : AG \to BG$ по формуле:

(6) $\pi_B^A : |x_0, ..., x_k, g_0, ..., g_k| \mapsto |x_0, ..., x_k, [g_0 : ... : g_k]|$,

или в негомогенных координатах она приобретает вид:

$\pi_B^A : |t_1, ..., t_k, h_0[h_1|...|h_k]| \mapsto |t_1, ..., t_k, [h_1|...|h_k]|$.

Сопряжение в G индуцирует сопряжения в AG и BG, так что:

$conj(t_1, ..., t_k, h_0[h_1|...|h_k]) := (t_1, ..., t_k, conj(h_0)[conj(h_1)|...|conj(h_k)])$ и

$conj(t_1, ..., t_k, [h_1|...|h_k]) := (t_1, ..., t_k, [conj(h_1)|...|conj(h_k)])$.

Предположим, что

$(A2)$ $\hat{G} = \hat{G}_0 i_0 \oplus \hat{G}_1 i_1 \oplus ... \oplus \hat{G}_{2^r-1} i_{2^r-1}$, так что G - это мультипликативная группа кольца $\hat{G}$ с мультипликативной групповой структурой, где $G_j = \hat{G}_j \setminus \{0\}$, $\hat{G}_0, ..., \hat{G}_{2^r-1}$ являются попарно изоморфными коммутативными ассоциативными кольцами, и $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$ - это генераторы алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, $1 \le r \le 3$ и $(y_l i_l)(y_s i_s) = (y_l y_s)(i_l i_s)$ есть естественное умножение любых чистых состояний в $\hat{G}$ при $y_l \in \hat{G}_l$. Если группа G и кольцо $\hat{G}$ удовлетворяют условиям $(A1, A2, C1, C2)$, то мы назовем их скрученной группой и скрученным кольцом над множеством генераторов $\{i_0,...,i_{2^r-1}\}$, где $1 \le r \le 3$. Единичный элемент в G мы обозначим e. Например, $G = (\mathcal{A}_r^*)^n$ и $\hat{G} = \mathcal{A}_r^n$.

5. Определения. Пусть $N_.$ - это семейство $\{N_n : n \in \mathbf{N}\}$ или C^∞ гладких, или $H_p^{t'}$ многообразий вместе с или C^∞, или $H_p^{t'}$ отображениями $\partial_j : N_n \to N_{n-1}$ и $s_j : N_n \to N_{n+1}$ для любого $j = 0, 1, ..., n$ удовлетворяющими тождествам:

(1) $\partial_k \partial_j = \partial_{j-1} \partial_k$ для любого $k < j$,

(2) $s_k s_j = s_{j+1} s_k$ для любого $k \le j$,

(3) $\partial_k s_j = s_{j-1} \partial_k$ при $k < j$, $\partial_k s_j = id|_{N_n}$ при $k = j, j+1$, $\partial_k s_j = s_j \partial_{k-1}$ при $k > j+1$, тогда $N_.$ называется симплициальным или C^∞ гладким, или $H_p^{t'}$ многообразием.

Геометрическая реализация для $|N_.|$ или $N_.$ состоит из $\coprod_{n \ge 0} \Delta^n \times N_n / \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ есть отношение эквивалентности порожденное $(\partial^j x, y)\mathcal{E}(x, \partial_j y)$ при $(x, y) \in \Delta^{n-1} \times N_n$, $(s^j x, y)\mathcal{E}(x, s_j y)$ при $(x, y) \in \Delta^{n+1} \times N_n$, где $\coprod$ обозначает дизъюнктное объединение множеств, отображения $\partial^j : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ и $s^j : \Delta^{n+1} \to \Delta^n$ таковы, что $\partial^j(x_0, ..., x_{n-1}) = (x_0, ..., x_{j-1}, 0, x_j, ..., x_{n-1})$ и $s^j(x_0, ..., x_{n+1}) = (x_0, ..., x_{j-1}, x_j + x_{j+1}, x_{j+2}, ..., x_{n+1})$ в барицентрических координатах.

C^∞ или $H_p^{t'}$ пространственная структура на геометрической реализации $|N_.|$ или $N_.$ состоит из всех непрерывных C^∞ $\mathbf{R}$-значных или $H_p^{t'}$ $\mathcal{A}_r$ значных функциях f на $|N_.|$ соответственно, то есть с композицией $\coprod_{n \ge 0} (\Delta^n - \partial \Delta^n) \times N_n \hookrightarrow \coprod_{n \ge 0} \Delta^n \times N_n \xrightarrow{q} |N_.| \xrightarrow{f} \mathcal{A}_r$ класса гладкости C^∞ или $H_p^{t'}$, где q обозначает факторное отображение, $r = 0$ или $1 \le r \le 3$ соответственно, $\mathcal{A}_0 = \mathbf{R}$, $\mathcal{A}_1 = \mathbf{C}$, $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H}$, $\mathcal{A}_3 = \mathbf{O}$.

6. Предложение. *Если группа G удовлетворяет условиям 4$(A1, A2, C1, C2)$, тогда множества AG и BG можно снабдить групповыми структурами, и они скручены при $2 \le r \le 3$. Если G - это топологическая Хаусдорфова или H_p^t дифференцируемая альтернативная при $r = 3$ или ассоциативная при $0 \le r \le 2$ группа, то AG и BG - это топологические Хаусдорфовы C^∞ или H_p^t дифференцируемые альтернативные при $r = 3$ или ассоциативные при $0 \le r \le 2$ группы соответственно.*

Доказательство. Мы определим на AG и BG групповые структуры. Введем гомеоморфизм спаривания: $\Delta^n \times \Delta^k \to \Delta^{n+k}$, где σ - это перестановка множества $\{1, 2, ..., n+m+1\}$, так что $t_{\sigma(1)} \le t_{\sigma(2)} \le ... \le t_{\sigma(n+k+1)}$, $\sigma \in S_{n+k+1}$, S_m обозначает симметрическую группу всех перестановок множества $\{1, ..., m\}$. Мы зададим умножение чистых состояний в AG:

(1) $|t_1, ..., t_n, h_0[h_1|...|h_n]| * |t_{n+1}, ..., t_{n+k+1}, h_{n+k+2}[h_{n+1}|...|h_{n+k+1}]| :=$
$|t_{\sigma(1)}, ..., t_{\sigma(n+k+1)}, (-1)^{q(\sigma)}(h_0 h_{n+k+2})[h_{\sigma(1)}|...|h_{\sigma(n+k+1)}]|$,

где $h_l = y_l i_{j(l)}$, $y_l \in G_{j(l)}$ для любого $l = 0, ..., 2^r - 1$, $q(\sigma) \in \mathbf{Z}$ таково, что $(-1)^{q(\sigma)} i_{j(0)}(i_{j(1)}...(i_{j(n+k+1)} i_{j(n+k+2)})...) = (i_{j(\sigma(0))} i_{j(\sigma(n+k+2))})(i_{j(\sigma(1))}...(i_{j(\sigma(n+k)))} i_{j(\sigma(n+k+1))})...)$ в $\mathcal{A}_r$; в то время как в BG:

(2) $|t_1, ..., t_n, [h_1|...|h_n]| * |t_{n+1}, ..., t_{n+k+1}, [h_{n+1}|...|h_{n+k+1}]| :=$
$|t_{\sigma(1)}, ..., t_{\sigma(n+k+1)}, (-1)^{p(\sigma)}[h_{\sigma(1)}|...|h_{\sigma(n+k+1)}]|$,

где $h_l = y_l i_{j(l)}$, $y_l \in G_{j(l)}$, $p(\sigma) \in \mathbf{Z}$ таково, что $(-1)^{p(\sigma)} i_{j(1)}(i_{j(2)}...(i_{j(n+k)} i_{j(n+k+1)})...) = i_{j(\sigma(1))}(i_{j(\sigma(2))}...(i_{j(\sigma(n+k))} i_{j(\sigma(n+k+1))})...)$ в $\mathcal{A}_r$.

Определим также сложение в $A\hat{G}$:

(1′) $|t_1, ..., t_n, h_0[h_1|...|h_n]| + |t_{n+1}, ..., t_{n+k+1}, h_{n+k+2}[h_{n+1}|...|h_{n+k+1}]| :=$
$|t_{\sigma(1)}, ..., t_{\sigma(n+k+1)}, (-1)^{q(\sigma)}(h_0 + h_{n+k+2})[h_{\sigma(1)}|...|h_{\sigma(n+k+1)}]|$

с $j(0) = j(n+k+2)$; а также сложение в $B\hat{G}$:

(2′) $|t_1, ..., t_n, [h_1|...|h_n]| + |t_{n+1}, ..., t_{n+k+1}, [h_{n+1}, ..., h_{n+k+1}]| =$
$|t_{\sigma(1)}, ..., t_{\sigma(n+k+1)}, (-1)^{p(\sigma)}[h_{\sigma(1)}|...|h_{\sigma(n+k+1)}]|$

для чистых состояний $h_l = y_l i_{j(l)}$, $y_l \in \hat{G}_l$ для любого $l = 0, ..., 2^r - 1$. Умножения $(1, 2)$ продолжаются на кольца естественным образом, когда некоторые чистые состояния нулевые, следовательно, благодаря дистрибутивности также на все кольцо.

Поскольку $\hat{G}$ - это кольцо, то эти умножения имеют единственные продолжения на AG и BG. Проверим, что AG и BG становятся группами с умножениями (1) и (2) соответственно.

Благодаря $(1, 2)$ мы получим

(3) $v * conj(v) = |t_1, ..., t_k, (h_0 conj(h_0))[(h_1 conj(h_1))|...|(h_k conj(h_k))]|$ для любого $v =$

$|t_1,...,t_k,h_0[h_1|....|h_k]|$ в AG, причем $w*conj(w) = |t_1,...,t_k,[(h_1conj(h_1))|...|(h_kconj(h_k))]|$ для любого $w = |t_1,...,t_k,[h_1|....|h_k]|$ в BG, где $hconj(h) \in \hat{G}_0$ для любого $h \in G$, но $\hat{G}_0$ есть центр кольца $\hat{G}$: $ab = ba$ для любого $a \in \hat{G}_0$ и $b \in \hat{G}$. Тождества Муфанга (Moufang) в алгебре октонионов $\mathcal{A}_r$ при $r = 3$ (смотри [16]) индуцируют их в G, так что

(4) $(xyx)z = x(y(xz))$ и $(x^{-1}yx)z = x^{-1}(y(xz))$;

(5) $z(xyx) = ((zx)y)x$ и $z(x^{-1}yx) = ((zx^{-1})y)x$;

(6) $(xy)(zx) = x(yz)x$ и $(x^{-1}y)(zx) = x^{-1}(zy)x$, так как

(7) $x^{-1} = conj(x)(x\ conj(x))^{-1}$,

где $(xconj(x)) \in G_0$.

Единичным элементом в AG является

$\mathbf{e} := \{|t_1,...,t_k,e[e|...|e]| \in (AG)_k : k = 0,1,...\}$, где $i_0 = 1$, так как

$|t_1,...,t_n,h_0[h_1|...|h_n]| * |t_{n+1},...,t_{n+k+1},e[e|...|e]| =$

$|t_{n+1},...,t_{n+k+1},e[e|...|e]| * |t_1,...,t_n,h_0[h_1|...|h_n]| = |t_1,...,t_n,h_0[h_1|...|h_n]|$ благодаря отношениям эквивалентности 4(2), $(1,...,1,e[e|...|e]) \in |t_1,...,t_k,e[e|...|e]|$.

Кольцо $\hat{G}$ является $\mathbf{Z_2}$ градуированным в смысле элементов $y_lj_l \in \hat{G}_lj_l$ являющихся четными при $l = 0$ и нечетными при $l = 1,...,2^r-1$: $(y_0i_0)(y_ly_l) = (y_li_l)(y_0i_0) = (y_0y_l)i_l \in \hat{G}_li_l$ для любого $0 \le l \le 2^r-1$, $(y_li_l)^2 = -y_l^2i_0 \in \hat{G}_0i_0$, $(y_li_l)(y_ki_k) = -(y_ki_k)(y_li_l) = (y_ly_k)i_s \in \hat{G}_si_s$ для $1 \le l \ne k \le 2^r-1$, где $i_s = i_li_k$. Для любых чистых состояний $g_0,...,g_k \in \hat{G}$ их произведение $(...(g_0g_1)g_2...)g_k$ является чистым состоянием, следовательно, множества AG и BG являются $\mathbf{Z_2}$ градуированными аналогично случаю $\hat{G}$, имея четные и нечетные элементы, так что

(8) $A\hat{G} = (A\hat{G}_0)i_0 \oplus (A\hat{G}_1)i_1 \oplus ... \oplus (A\hat{G}_{2^r-1})i_{2^r-1}$ и

(9) $B\hat{G} = (B\hat{G}_0)i_0 \oplus (B\hat{G}_1)i_1 \oplus ... \oplus (B\hat{G}_{2^r-1})i_{2^r-1}$.

Каждая AG_j или BG_j есть ассоциативная топологическая Хаусдорфова или H_p^t дифференцируемая группа изоморфная с AG_0 или BG_0 соответственно для любого j, так как G_j коммутативна и ассоциативна (смотри также приложение B4 в [13]), где G_0 обозначает мультипликативную группу кольца $\hat{G}_0$. Поэтому AG и BG - это мультипликативные группы колец $A\hat{G}$ и $B\hat{G}$.

Если $a \in AG_0$ или $a \in BG_0$, тогда $ab = ba$ для любого $b \in AG$ или BG соответственно. Из определения 5 следует, что они являются C^∞ или H_p^t группами,когда такова группа G.

Обратный элемент имеет вид:

(10) $\{|t_1,...,t_k,h_0[h_1|...|h_k]| : k\}^{-1} = \{|t_1,...,t_k,h_0^{-1}[h_1^{-1}|...|h_k^{-1}]| : k\}$ благодаря $(2,6)$, так как $(h_0(h_1...(h_{k-1}h_k)...))((...(h_k^{-1}h_{k-1}^{-1})...h_1^{-1})h_0^{-1}) = (...(((h_0h_0^{-1})(h_1h_1^{-1}))(h_2h_2^{-1})...)(h_kh_k^{-1}) = e$ для чистых состояний для всякого k в силу тождеств Муфанга $(4-6)$. В общем это следует из $(3,8,9)$, так как $v*conj(v) \in AG_0$ или BG_0 для $v \in AG$ или $v \in BG$ соответственно, следовательно, $v^{-1} = conj(v)(v*conj(v))^{-1} = \{|t_1,...,t_k,h_0[h_1|...|h_k]| : k\}^{-1}$.

В силу $(8,9)$ и существования обратного элемента, мы получим, что AG альтернативна, так как $1 \le r \le 3$. Полагая $h_0 = 1$ и применяя отношение эквивалентности $\mathcal{Y}$, мы получим, что BG является также альтернативной группой, так как мультипликативная группа $\{i_0,...,i_7\}$ альтернативна. Если G ассоциативна, например, когда $1 \le r \le 2$, то AG и BG ассоциативны, так как мультипликативная группа $\{i_0,i_1,i_2,i_3\}$ является ассоциативной.

Таким образом, группы AG и BG имеют $\mathbf{Z_2}$ градуировку, следовательно, они скручены над $\{i_0,...,i_{2^r-1}\}$. Рассмотрим для $\hat{G}$ операции умножения и сложения, тогда они индуцируют их для AG и BG выше. Итак, $E\hat{G}$ и $B\hat{G}$ являются скрученными кольцами.

7. Следствие. *Пусть выполнены условия предложения 6, тогда AB^mG и B^mG - это топологические или C^∞, или H_p^t дифференцируемые группы соответственно для любого $m \ge 1$. Более того, все отображения короткой точной последовательности $e \to B^aG \to AB^aG \to B^{a+1}G \to e$ непрерывны или класса гладкости C^∞, или H_p^t соответственно.*

Доказательство. Определим структуру дифференцируемого пространства по индукции. Предположим, что она определена на B^aG и $\Delta^k \times (B^aG)^m$ при $k,m \ge 0$, где $a \ge 1$. Тогда отображение $f : AB^aG \to \mathcal{A}_r$ имеет класс гладкости C^∞ или H_p^t, если композиция $\coprod_{n\ge0}(\Delta^n - \partial\Delta^n) \times (B^aG)^{n+1} \xrightarrow{q_A} AB^aG \xrightarrow{f} \mathcal{A}_r$ принадлежит классу C^∞ или $H_p^{t'}$, причем $f : B^{a+1}G \to \mathcal{A}_r$ принадлежит классу гладкости C^∞ или H_p^t, если композиция $\coprod_{n\ge0}(\Delta^n - \partial\Delta^n) \times (B^aG)^n \xrightarrow{q_B}$

$B^{a+1}G \xrightarrow{f} \mathcal{A}_r$ имеет класс гладкости C^∞ или $H_p^{t'}$, где $0 \le r \le 3$.

Функция $f : \Delta^k \times (B^{a+1}G)^m \to \mathcal{A}_r$ является C^∞ или H_p^t, если композиция $\Delta^k \times (\coprod_{n\ge 0}(\Delta^n - \partial\Delta^n) \times (B^aG)^n)^m \stackrel{id\times(q_B)^m}{\longrightarrow} \Delta^k \times (B^{a+1}G)^m \xrightarrow{f} \mathcal{A}_r$ принадлежит классу гладкости C^∞ или $H_p^{t'}$. Отсюда вытекает, что все отображения в коротких точных последовательностях имеют тот же класс гладкости.

Тогда отображения $B^aG \times B^aG \to B^aG$ и $AB^aG \times AB^aG \to AB^aG$ вида $(f, g) \mapsto fg^{-1}$ имеют классы гладкости C^0 или C^∞, или H_p^t в соответствующих случаях благодаря формулам $6(1-3, 8-10)$ (смотри также §1.3.2 [21] и §1 и приложения B в [13]).

8. Следствие. *Если группа G удовлетворяет условиям $4(A1, A2, C1, C2)$, тогда существуют H_p^t группы $AB^a(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E)_{t,H}$ и $B^a(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E)_{t,H}$ для любого $a \in \mathbf{N}$.*

Доказательство. Группа оберток $(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}$ является главным G^k расслоением над группой $(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,..,k\}}N)_{t,H}$, где группа $(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}N)_{t,H}$ коммутативна и ассоциативна (смотри предложение 7(1) в [22]).

Если $g \in \hat{G}$, тогда g имеет разложение $g = g_0i_0 + \dots + g_{2^r-1}i_{2^r-1}$ с $g_j \in \hat{G}_j$ для любого $j = 0, 1, \dots, 2^r - 1$ и

(1) $g_0 = (g + (2^r - 2)^{-1}\{-g + \sum_{s=1}^{2^r-1} i_s(gi_s^*)\})/2$, и

(2) $g_j = (i_j(2^r - 2)^{-1}\{-g + \sum_{s=1}^{2^r-1} i_s(gi_s^*)\} - gi_j)/2$

для любого $j = 1, \dots, 2^r - 1$. Поэтому каждое $g_0, \dots, g_{2^r-1}$ имеет аналитическое выражение через g благодаря формулам $(1, 2)$. Зафиксируем эти представления. Тогда H_p^t дифференцируемая структура параллельного переноса $\mathbf{P}$ с группой G индуцирует H_p^t дифференцируемую структуру параллельного переноса ${}_j\mathbf{P}$ с группами G_j.

Поскольку кольцо $\hat{G}^k$ изоморфна с $\bigoplus_{0\le j(1),\dots,j(k)\le 2^r-1}(\hat{G}_{j(1)}i_{j(1)}, \dots, \hat{G}_{j(k)}i_{j(k)})$ изоморфно с $\bigoplus_{0\le j(1),\dots,j(k)\le 2^r-1} \hat{G}_0^k(i_{j(1)}, \dots, i_{j(k)})$, тогда $(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}$ изоморфна группе $\{f = (f_1, \dots, f_k) \in \bigoplus_{0\le j(1),\dots,j(k)\le 2^r-1}[(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E; N, G_0, \mathbf{P})_{t,H} \cup \{0\}]\ (i_{j(1)}, \dots, i_{j(k)}) : f_1 \ne 0, \dots, f_k \ne 0\}$, где $(i_{j(1)}, \dots, i_{j(k)}) \in (\mathcal{A}_r^*)^k$ и $(\mathcal{A}_r^*)^k$ имеет вложение в семейство всех $k \times k$ матриц с элементами из алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ в качестве диагональных матриц, группа $(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E; N, G_j, \mathbf{P})_{t,H}$ коммутативна для любого $j = 0, \dots, 2^r - 1$ в силу теоремы 6 [21].

Построение предложения 5 выше имеет естественное обобщение для G^k вместо G, так что $A\hat{G}^k = \bigoplus_{0\le j(1),\dots,j(k)\le 2^r-1}(A\hat{G}_{j(1)}i_{j(1)}, \dots, A\hat{G}_{j(k)}i_{j(k)})$, которая изоморфна с $\bigoplus_{0\le j(1),\dots,j(k)\le 2^r-1} A\hat{G}_0^k(i_{j(1)}, \dots, i_{j(k)})$, также $B\hat{G}^k$ изоморфна с $\bigoplus_{0\le j(1),\dots,j(k)\le 2^r-1} B\hat{G}_0^k(i_{j(1)}, \dots, i_{j(k)})$, следовательно, $A(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}$ изоморфная группе $\{v \in \bigoplus_{0\le j(1),\dots,j(k)\le 2^r-1}[A(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E; N, G_0, \mathbf{P})_{t,H}^k \cup \{0\}](i_{j(1)}, \dots, i_{j(k)}) : v_n = |t_1, \dots, t_n, h_0[h_1|\dots|h_n]|, h_j \ne 0 \forall j, \forall n\}$ и $B(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}$ изоморфная с $\{v \in \bigoplus_{0\le j(1),\dots,j(k)\le 2^r-1}[B(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E; N, G_0, \mathbf{P})_{t,H}^k \cup \{0\}](i_{j(1)}, \dots, i_{j(k)}) : v_n = |t_1, \dots, t_n, [h_1|\dots|h_n]|, h_j \ne 0 \forall j, \forall n\}$. Продолжая это индукцией по a и используя следствие 7, мы получим утверждение данного следствия для любого $a \in \mathbf{N}$.

9. Лемма. *Пусть N - это C^∞ или H_p^t многообразие над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ с $0 \le r \le 3$ и G - это C^∞ или H_p^t дифференцируемая группа. Если $f : N \to BG$ - это отображение такое, что для любого $y \in N$ существует открытая окрестность V точки y в N такая, что $f|_V = |f_0, f_1, \dots, f_n, [g_1|\dots|g_n]|$ с $f_0, \dots, f_n$ являющимися C^∞ или H_p^t дифференцируемыми отображениями, тогда f есть или C^∞, или H_p^t дифференцируемое отображение соответственно.*

Доказательство. Если $h : BG \to \mathcal{A}_r$ - это C^∞ или H_p^t отображение, тогда для любого $n \ge 1$ композиция $\Delta^n \times G^n \xrightarrow{q_B} BG \xrightarrow{h} \mathcal{A}_r$ принадлежит соответствующему классу гладкости. Для коммутативной диаграммы состоящей из $N \xrightarrow{f} BG \xrightarrow{h} \mathcal{A}_r$ и $N \xrightarrow{\bar{f}} \Delta^n \times G^n \xrightarrow{q_B} BG$ и $f = q_b \circ \bar{f}$, где $\bar{f} := (f_0, \dots, f_n, h_1, \dots, h_n)$ оба отображения $\bar{f}$ и $h \circ q_B$ непрерывна и класса C^∞ или H_p^t. Тогда композиция отображений $h \circ f = h \circ q_B \circ \bar{f}$ непрерывный и или принадлежит C^∞, или H_p^t, где как обычно $h \circ f(y) := h(f(y))$. Таким образом, отображение $f : N \to BG$ непрерывно или класса C^∞, или H_p^t соответственно.

10. Скрученное решетчатое разрешение и гипер-когомологии. Для скрученной группы G удовлетворяющей условиям $4(A1, A2, C1, C2)$ композиция короткой точной последовательности

(1) $e \to B^aG \to AB^aG \to B^{a+1}G \to e$ индуцирует длинную точную последовательность

(2) $e \to G \to AG \xrightarrow{\sigma} ABG \xrightarrow{\sigma} AB^2G \xrightarrow{\sigma} ... \xrightarrow{\sigma} AB^aG \xrightarrow{\sigma} ...,$

где для любого $a \geq 0$ гомоморфизм $\sigma : AB^aG \to AB^{a+1}G$ есть композиция $AB^aG \to B^{a+1}G \to AB^{a+1}G$ сюръекции $AB^aG \to B^{a+1}G$ и мономорфизма $B^{a+1}G \to AB^{a+1}G$.

В силу следствия 7 короткая точная последовательность (2) является C^∞ или H_p^t B^aG-продолжением для $B^{a+1}G$. Итак, длинная точная последовательность (2) индуцирует длинную точную последовательность скрученных пучков

(3) $e \to G_N \to AG_N \xrightarrow{\sigma} ABG_N \xrightarrow{\sigma} AB^2G_N \xrightarrow{\sigma} ... \xrightarrow{\sigma} AB^aG_N \xrightarrow{\sigma} ...,$

которые мы назовем (скрученным) решетчатым разрешением пучка G_N, где G_N обозначает пучок C^∞ или H_p^t функций на N со значениями в G.

Предположим, что $\mathcal{S}^*$ и $\mathcal{F}^*$ - это комплексы пучков $\mathcal{G}$-модулей, где $\mathcal{G}$ - это пучок колец, где $\mathcal{S}^*$ и $\mathcal{F}^*$, и $\mathcal{G}$ могут быть одновременно скрученными над $\{i_0, ..., i^{2^r-1}\}$. Тогда гомоморфное отображение $\sigma : \mathcal{S}^* \to \mathcal{F}^*$ таких комплексов индуцирует отображение когомологий пучков $\mathsf{H}^j(\sigma) : \mathsf{H}^j(\mathcal{S}^*) \to \mathsf{H}^j(\mathcal{F}^*)$, где $\mathsf{H}^j(\mathcal{S}^*)$ есть пучок ассоциированный с пред-пучком $U \mapsto [ker(\Gamma(U, \mathcal{F}^j)) \to \Gamma(U, \mathcal{F}^{j+1}))]/im[(\Gamma(U, \mathcal{F}^{j-1})) \to \Gamma(U, \mathcal{F}^j))]$, где $\Gamma(U, \mathcal{S}^j)$ обозначает группу сечений пучка $\mathcal{S}^j$ для подмножества U открытого в X (смотри также §1). Тогда σ называется квази-изоморфизмом, если $\mathsf{H}^j(\sigma)$ - это изоморфизм для всякого j.

Мы рассмотрим комплексы ограниченные снизу, то есть, существует j_0 такое, что $\mathcal{S}^j = 0$ для любого $j < j_0$.

Отображение $\sigma : \mathcal{S}^* \to \mathcal{T}^*$ называется инъективным разрешением для $\mathcal{S}^*$, если $\mathcal{T}^*$ - это комплекс $\mathcal{G}$-модулей ограниченных снизу, σ есть квази-изоморфизм, и пучки $\mathcal{T}^b$ инъективны. Последнее означает, что $Hom(\mathcal{B}, \mathcal{T}^b) \to Hom(\mathcal{K}, \mathcal{T}^b)$ сюръективно для любого инъективного отображения $\mathcal{K} \to \mathcal{B}$ пучков $\mathcal{G}$-модулей.

Пусть $\mathcal{G}$ - это постоянный пучок колец, может быть скрученных над $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$. Предположим, что $\mathcal{S}^*$ - это комплекс $\mathcal{G}$-модулей ограниченных снизу. Гипер-когомология групп ${}_h\mathsf{H}^b(X, \mathcal{S}^*)$ определяется как $\mathcal{G}$-модуль такой, что

${}_h\mathsf{H}^b(X, \mathcal{S}^*) := [ker(\Gamma(X, \mathcal{T}^b) \to \Gamma(X, \mathcal{T}^{b+1})]/[im(\Gamma(X, \mathcal{T}^{b-1}) \to \Gamma(X, \mathcal{T}^b)].$

Если $\sigma : \mathcal{S}^* \to \mathcal{F}^*$ - это квази-изоморфизм, тогда σ индуцирует изоморфизм гипер-когомологий групп:

$\sigma :\ {}_h\mathsf{H}^b(X, \mathcal{S}^*) \cong\ {}_h\mathsf{H}^b(X, \mathcal{F}^*)$ (смотри также [13] и ссылку $[EV]$ там). В силу леммы 16 [22] гипер-когомологии групп ${}_h\mathsf{H}^b(X, \mathcal{S}^*)$ скручены над $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$, когда $\mathcal{S}^*$ и $\mathcal{G}$ скручены над $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$.

11. Предложение. *Последовательность 10(3) является ациклическим разрешением пучка G_N.*

Доказательство. Каждый стандартный симплекс Δ^n с $n \geq 1$ имеет C^∞ ретракцию $\hat{z} : \Delta^n \times [0, 1] \to \{y\}$ в точку y принадлежащую ему.

Существует C^∞ деформационная ретракция

(1) $\hat{f} : AG \times [0, 1] \to AG$ поставляемая семейством отображений

(2) $\hat{f}_n : (AG)_n \times [0, 1] \to (AG)_{n+1}$, где

(3) $(AG)_n := q_A(\coprod_{j \leq n} \Delta^j \times G^{j+1}) \subset AG$ и

(4) $\hat{f}_n(|t_1, ..., t_n, h_0[h_1|...|h_n]|, t) := |\Phi(0, t), \Phi(t_1, t), ..., \Phi(t_n, t), h_0[h_1|...|h_n]|$, где $\Phi : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ определяется как композиция $\Phi(x, t) := \phi(\min(1, x + t))$, беря ϕ гладкой неубывающей функцией $\phi : [0, 1] \to [0, 1]$ такой, что $\phi(0) = 0$ и $\phi(1) = 1$.

Тогда для любого C^∞ или H_p^t дифференцируемого отображения $v : AG \to \mathcal{A}_r$ мы получим $v \circ \hat{f} \circ (q_n \times id) = v^{n+1} \circ \hat{h}_n$ и $v \circ q_A = v^{n+1}$, где $q_n \times id : (\Delta^n \times G^{n+1}) \times [0, 1] \to AG \times [0, 1]$, $\hat{h}_n : (\Delta^n \times G^{n+1}) \times [0, 1] \to \Delta^{n+1} \times G^{n+2}$ - это гладкое отображение даваемое формулой $\hat{h}_n(t_1, ..., t_n, g_0, g_1, ..., g_n, t) = (\Phi(0, t), \Phi(t_1, t), ..., \Phi(t_n, t), e, g_0, g_1, ..., g_n)$.

В тоже время Δ^{n+1} имеет C^∞ ретракцию на Δ^n для любого $n \geq 0$, причем группа G является C^∞ или H_p^t дифференцируемой и линейно связной. Поэтому для любого $b > 0$ когомология групп

$\mathsf{H}^b(N, AG_N)$ тривиальна (смотри также §2.2 [3] и §54 ниже).

12. Пучок $\mathcal{S}$ на X называется мягким, если для любого замкнутого подмножества Y в X отображение ограничения $\mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(Y)$ сюръективно.

12.1. Лемма. *Для C^∞ или H^t_p дифференцируемой группы G удовлетворяющей условиям 4$(A1, A2, C1, C2)$ пучок AG_N является мягким.*

Доказательство. Рассмотрим замкнутое подмножество Y в N и сечение σ_Y для AG_N над Y. Согласно определению сечения над замкнутым подмножеством существует открытое множество U и продолжение σ_U для σ_Y с Y на U, так что $Y \subset U \subset N$. Из паракомпактности N вытекает существование окрестности V для Y такой, что $cl(V) \subset U$, где $cl(V)$ обозначает замыкание V в N. Поэтому продолжение σ для σ_Y до глобального сечения для AG_N дается формулой $\sigma(x) = \hat{f}(\sigma_U(x), \psi(x))$, где $\hat{f} : AG \times [0, 1] \to AG$ есть деформационный ретракт (смотри §11) и $\psi : N \to [0, 1]$ является или C^∞, или H^t_p дифференцируемой функцией равной 1 на V и равной нулю 0 на $M \setminus U$.

13. Замечание. Пусть теперь N является C^∞ или H^∞ многообразием над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ и $T(N, G, \pi, \Psi)$ - касательное расслоение с $T = TN$ и проекцией $\pi : T \to N$, где связывающие отображения $\phi_j \circ \phi_k^{-1}$ для $V_j \cap V_k \neq \emptyset$ атласа $At(N) = \{(V_j, \phi_j) : j\}$ многообразия N являются $\mathcal{A}_r$ голоморфными для $1 \le r \le 3$, $\phi_j \circ \phi_k^{-1} \in H^\infty$. Обозначим через $\mathcal{T}$ пучок ростков гладких сечений для T. Тогда $B\mathcal{T}$ обозначает пучок ассоциированный с пред-пучком сопоставляющим каждому открытому подмножеству V в N группу сечений естественной проекции $\coprod_{y \in V} B(\pi^{-1}(y)) \to V$, которые локально имеют вид:

(1) $y \mapsto |t_1(y), ..., t_n(y), [\sigma_1(y)|...|\sigma_n(y)]|$, где $t_1, ..., t_n$ являются C^∞ при $r = 1$ или H^∞ при $1 \le r \le 3$ функциями, и $\sigma_1, ..., \sigma_n$ являются C^∞ или H^∞ сечениями векторного расслоения $T(N, G, \pi, \Psi)$. Используя конструкции приведенные выше, мы определим $B^{a+1}\mathcal{T}$ для любого $a \in \mathbf{N}$ по индукции.

Тогда $B^{a+1}\mathcal{T}$ есть пучок ассоциированный с пред-пучком соотносящим открытому подмножеству V в N группу сечений естественной проекции

$\coprod_{y \in V} B^{a+1}(\pi^{-1}(y)) \to V$ имеющей локально вид (1), где $\sigma_1, ..., \sigma_n$ являются сечениями $B^a\mathcal{T}$ над V. Аналогично мы определяем $AB^a\mathcal{T}$.

Если теперь $T = \Lambda^b T^* N$ есть b-я внешняя степень кокасательного пучка для N, тогда конструкция приведенная выше дает пучки $AB^a\mathcal{S}^b_{N, \mathcal{A}_r}$ и $B^{a+1}\mathcal{S}^b_{N, \mathcal{A}_r}$ дифференциальных C^∞ форм на N со значениями в $AB^a\mathcal{A}_r$ и $B^{a+1}\mathcal{A}_r$ соответственно, где индекс $\mathcal{A}_r$ можно опустить, когда алгебра Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ задана. В уравнении

(2) $w = \sum_J f_J(z) dx_{b_1, j_1} \wedge dx_{b_2, j_2} \wedge ... \wedge dx_{b_k, j_k}$,

где $f_J : N \to AB^a\mathcal{A}_r$ или $f_J : N \to B^{a+1}\mathcal{A}_r$, $z = (z_1, z_2, ...)$ являются локальными координатами в N, $z_b = x_{b,0} i_0 + x_{b,1} i_1 + ... + x_{b, 2^r - 1} i_{2^r - 1}$, где $z_b \in \mathcal{A}_r$, $x_{b,j} \in \mathbf{R}$ для любого b и всякого $j = 0, 1, ..., 2^r - 1$, $J = (b_1, j_1; b_2, j_2; ...; b_k, j_k)$.

Поскольку каждое топологическое векторное пространство Z над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ с $2 \le r \le 3$ имеет естественную скрученную структуру $Z = Z_0 i_0 \oplus Z_1 i_1 \oplus ... \oplus Z_{2^r - 1} i_{2^r - 1}$ с попарно изоморфными топологическими векторными пространствами $Z_0, ..., Z_{2^r - 1}$ над $\mathbf{R}$, тогда TN и T^*N и $\Lambda^b T^* N$ имеют скрученные структуры, где X^* обозначает пространство всех непрерывных $\mathcal{A}_r$ аддитивных и $\mathbf{R}$ гомогенные функций на X со значениями в $\mathcal{A}_r$, когда $2 \le r \le 3$, в то время как X^* над $\mathbf{C}$ является обычным топологическим двойственным пространством непрерывных $\mathbf{C}$-линейных функционалов на X. Поэтому в силу предложения 6 $B^a\mathcal{T}$ и $AB^a\mathcal{T}$ имеют индуцированные скрученные структуры для любого $a \in \mathbf{N}$.

Каждое сечение σ пучка $AB^a\mathcal{S}^k_N$ можно записать в виде: $\sigma = |h_0, .., h_n, \sigma_0, ..., \sigma_n|$, где $\sigma_0, ..., \sigma_n$ являются гладкими дифференциальными $B^a\mathcal{A}_r$ значными k-формами на V и $\{h_j : j = 0, 1, 2, ...\}$ является C^∞ гладким разбиением единицы на V. Вдобавок дифференциальные формы индуцируют аддитивную групповую структуру. В качестве умножения можно взять внешнее произведение дифференциальных форм, которое скручено над $\mathcal{A}_r$ при $2 \le r \le 3$.

Группа сечений пучка $AB^b\mathcal{S}^k_N$ для открытого подмножества V в N обозначим через $\Gamma(V, AB^b\mathcal{S}^k_N)$. Последовательность групп $0 \to \Gamma(V, \mathcal{S}^k_N) \to \Gamma(V, A\mathcal{S}^k_n) \to \Gamma(V, B\mathcal{S}^k_N) \to 0$ точна для каждого открытого подмножества V в N, так как последовательность векторных расслоений $0 \to \Lambda^k T^* N \to A\Lambda^k T^* N \to B\Lambda^k T^* N \to 0$ точна.

Скрученная структура групп $AB^b\mathcal{S}_N^k$ индуцирует скрученную структуру для $\Gamma(V, AB^b\mathcal{S}_N^k)$. Поэтому последовательность пучков $0 \to B^b\mathcal{S}_N^k \to AB^b\mathcal{S}_N^k \to B^{b+1}\mathcal{S}_N^k \to 0$ точна также для любого $b \geq 0$.

Композиция этих последовательностей индуцирует длинную точную последовательность

(2) $0 \to \mathcal{S}_N^k \to A\mathcal{S}_N^k \xrightarrow{\sigma} AB\mathcal{S}_N^k \xrightarrow{\sigma} ... \xrightarrow{\sigma} AB^b\mathcal{S}_N^k \xrightarrow{\sigma} ...,$

где $\sigma : AB^b\mathcal{S}_N^k \to AB^{b+1}\mathcal{S}_N^k$ есть композиция отображений $AB^b\mathcal{S}_N^k \to B^{b+1}\mathcal{S}_N^k \to AB^{b+1}\mathcal{S}_N^k$. Последовательность (2) будет называться решетчатым разрешением пучка $\mathcal{S}_N^k$.

Пусть $\mathcal{S}$ есть произвольный скрученный пучок на топологическом пространстве X. Обозначим через $A\mathcal{S}$ и $B\mathcal{S}$ пучки ассоциированные с пред-пучками $V \mapsto A(\Gamma(V,\mathcal{S}))$ и $V \mapsto B(\Gamma(V,\mathcal{S}))$ соответственно. Ростками для $A\mathcal{S}$ и $B\mathcal{S}$ являются $A\mathcal{S}_x$ и $B\mathcal{S}_x$ в точке x, в то время как последовательность

(3) $e \to \mathcal{S}_x \to A(\mathcal{S}_x) \to B(\mathcal{S}_x) \to e$

точна, следовательно, последовательность пучков

$e \to \mathcal{S} \to A\mathcal{S} \to B\mathcal{S} \to e$

является точной. Композиция этих последовательностей дает решетчатое разрешение для $\mathcal{S}$

(4) $e \to \mathcal{S} \to A\mathcal{S} \xrightarrow{\sigma} AB\mathcal{S} \xrightarrow{\sigma} ... \xrightarrow{\sigma} AB^b\mathcal{S} \xrightarrow{\sigma} ....$

Комплекс пучков

(5) $\mathcal{B}^*(\mathcal{S}) : A\mathcal{S} \xrightarrow{\sigma} AB\mathcal{S} \xrightarrow{\sigma} ... \xrightarrow{\sigma} AB^b\mathcal{S} \xrightarrow{\sigma} ...$

называется решетчатым разрешением для $\mathcal{S}$. Решетчатое разрешение для $\mathcal{S}$ является ациклическим разрешением для $\mathcal{S}$, что выводится аналогично доказательству предложения 11 и леммы 12.1. Таким образом, когомология для $\mathcal{S}$ равна когомологии коцепного комплекса

(6) $\Gamma(N, A\mathcal{S}) \xrightarrow{\sigma} \Gamma(N, AB\mathcal{S}) \xrightarrow{\sigma} ... \xrightarrow{\sigma} \Gamma(N, AB^b\mathcal{S}) \xrightarrow{\sigma} ....$

Комплекс (6) будет называться решетчатым разрешением коцепного комплекса для $\mathcal{S}$ и будет обозначаться $C_B^*(\mathcal{S})$.

Каждая короткая точная последовательность пучков $e \to E \to F \to Y \to e$ скрученная над генераторами $\{i_0, i_1, ..., i_{2^r-1}\}$, $2 \leq r \leq 3$, индуцирует короткую точную последовательность комплексов пучков $e \to \mathcal{B}^*(E) \to \mathcal{B}^*(F) \to \mathcal{B}^*(Y) \to e$, где $\mathcal{B}^*(F) : AF \xrightarrow{\sigma} ABF \xrightarrow{\sigma} AB^2F \xrightarrow{\sigma} ... \xrightarrow{\sigma} AB^bF \xrightarrow{\sigma} ...$ является решетчатым комплексом для F.

14. Предложение. *Если последовательность групп $e \to K \to G \to J \to e$ точна, где E и K, G, J линейно связны, тогда последовательность $e \to (W^ME; N, K, \mathbf{P})_{t,H} \to (W^ME; N, G, \mathbf{P})_{t,H} \to (W^ME; N, J, \mathbf{P})_{t,H} \to e$ точна.*

Доказательство. В силу предложения 7.1 [22] $(W^ME; N, K, \mathbf{P})_{t,H}$ является главным расслоением над $(W^MN)_{t,H}$ со структурной группой K^k, $\pi_{K,*} : (W^ME; N, K, \mathbf{P})_{t,H} \to (W^MN)_{t,H}$, $\pi_{K,*}^{-1} < w_0 >_{t,H} = < w_0 >_{t,H} \times K^k = e \times K^k$, где $e \in (W^MN)_{t,H}$ обозначает единичный элемент. Поскольку последовательность $e \to K^k \to G^k \to J^k \to e$ также точна, то соответствующая последовательность групп оберток точна.

15. Предложение. *Пусть G - это C^∞ или H_p^t дифференцируемая скрученная группа над $\{i_0, i_1, ..., i_{2^r-1}\}$ удовлетворяющая условиям 4$(A1, A2, C1, C2)$. Тогда для любого C^∞ или H_p^t главного G-расслоения $E(N, G, \pi, \Psi)$ существует C^∞ или H_p^t дифференцируемое отображение $\phi : N \to BG$ такое, что $E \to N$ является ограничением универсального главного G расслоения посредством ϕ.*

Доказательство. Рассмотрим открытое покрытие $\mathcal{V} = \{V_j : j \in J\}$ для N, где J - это множество такое, что для любого $j \in J$ существует тривиализация $\psi_j : \pi^{-1}(V_j) \to V_j \times G$. Определим отображение $g_j : E \to G$ формулой $g_j(x) = pr_2(\psi_j(x))$ для $x \in \pi^{-1}(V_j)$, $g_j(x) = e$ для $x \notin \pi^{-1}(V_j)$, где e обозначает единичный элемент в G, и $pr_2 : V_j \times G \to G$ есть проекция на второй множитель.

Для главного G расслоения $E(N, G, \pi, \Psi)$ мы рассмотрим семейство $H_p^{t'}$ связывающих функций $\{g_{i,j} : i, j \in J\}$ ассоциированных с открытым покрытием $\mathcal{V} := \{V_j : j \in J\}$ of an $H_p^{t'}$ многообразия N над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, где J - это множество, $g_{i,j} : V_i \cap V_j \to \mathcal{A}_r^*$, когда пересечение $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ непусто, $1 \leq r \leq 3$, $n \in \mathbf{N}$. Введем отображение

(1) $g_{E,N}(x) := |f_{j(0)}, f_{j(1)}, ...f_{j(n)}, [g_{j(0),j(1)}|g_{j(1),j(2)}|...|g_{j(n-1),j(n)}]|$

такое, что $g_{E,N} : N \to BG$, где $\{f_j : j \in J\}$ является $H_p^{t_1}$ разбиением единицы подчиненным $\mathcal{U}$ с $t' \leq t_1 \leq \infty$. Поэтому $g_{E,N}$ можно выбрать класса гладкости $H_p^{t'}$. Таким образом,

$E(N,G,\pi,\Psi)$ есть ограничение универсального расслоения $AG(BG,G,\pi^A_B,\Psi^A)$ посредством классифицирующего отображения $g_{E,N}$, где отображение $\pi^A_B : AG \to BG$ такое же, что и в §4. Мы докажем это детально.

Возьмем разбиение единицы класса гладкости C^∞ или H^t_p подчиненное покрытию $\mathcal{V}$, а $\Phi : A \to AG$ пусть будет следующим отображением

$\Phi(y) := |f_{j_0}(\pi(y)), f_{j_1}(\pi(y)), ..., f_{j_n}(\pi(y)), g_{j_0}(y), g_{j_1}(y), ..., g_{j_n}(y)|$, где $j_0,...,j_n$ - это индексы такие, что $f_j(\pi(y)) \ne 0$ для любого $j \in \{j_0,...,j_n\}$. Тогда Φ является G эквивариантным, что означает $\Phi(yh) = \Phi(y)h$ для всех y и $h \in G$, так как $g_j(yh) = pr_2(\psi_j(yh))$ при $yh \in \pi^{-1}(V_j)$ и $g_j(yh) = e$ при $yh \notin \pi^{-1}(V_j)$. В самом деле, $y \in \pi^{-1}(y)$ эквивалентно $yh \in \pi^{-1}(V_j)$ для любого $h \in G$, так как $\pi^{-1}(V_j) = V_j \times G$, где $y = (u,q)$ с $u \in N$ и $q \in G$, и $(u,q)h = (u,qh)$ в локальных координатах. Таким образом, $g_j(yh) = g_j(y)R_h$, где $R_h = h$ для $y \in \pi^{-1}(V_j)$ и $R_h = e$ при $y \notin \pi^{-1}(V_j)$.

Поэтому Φ индуцирует морфизм главных G-расслоений

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Phi} & AG \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ N & \xrightarrow{\phi} & BG \end{array}$$

где ограничение ϕ на V_j таково: $\phi(x)|_{V_j} = |f_{j_0}, f_{j_1}(x), ..., f_{j_n}(x), [g_{j_0}(\sigma(x)) : g_{j_1}(\sigma(x)) : ... : g_{j_n}(\sigma(x))]|$, $\sigma : V_j \to \pi^{-1}(V_j)$ есть гладкое сечение ограничения $\pi^{-1}(V_j) \to V_j$ для $\pi : E \to N$. Рассмотрим классы эквивалентности: $q_j \sim g_j$ тогда и только тогда, когда существуют элементы $s_1,...,s_m \in G$ такие, что $(s_m(s_{m-1}...(s_1(q_j)...) = g_j$, следовательно, $q_jh \sim g_jh$, так как $q_jh \sim g_jh$ тогда и только тогда, когда $h^{-1}q_j \sim h^{-1}g_j$, что эквивалентно $h(s_m(s_{m-1}...(s_1(h^{-1}q_j)...) = g_j$. В силу альтернативности (квази-) группы G мы получаем $[(...(g_j^{-1}s_1^{-1})...s_{m-1}^{-1})s_m^{-1}][(s_m(s_{m-1}...(s_1g_l)...)] = g_j^{-1}g_l$.

Поэтому в негомогенных координатах отображение ϕ принимает вид $\phi(x) = |f_{j_0}(x), f_{j_1}(x), ..., f_{j_n}(x), [g_{j_0,j_1}(x)|g_{j_1,j_2}(x)|...|g_{j_{n-1},j_n}(x)]|$, где $g_{j,l}(x) = [g_j(\sigma(x))]^{-1}g_l(\sigma(x))$ - это связывающие функции ассоциированные с открытым покрытием для N открытыми множествами $\{x \in N : f_j(x) > 0\}$. Тогда отображение $\phi(x)$ не зависит от выбора σ, так как g_j являются G-эквивариантными. Все функции g_j принадлежат классу гладкости C^∞ или H^t_p, следовательно, ϕ является C^∞ или H^t_p отображением соответственно.

16. Следствие. *Для любого гладкого C^∞ или H^t_p главного $B^b\mathcal{A}^*_r$ расслоения с $1 \le r \le 3$ существует C^∞ или H^t_p дифференцируемое отображение $\phi : N \to B^{b+1}\mathcal{A}^*_r$ такое, что $E(N,G,\pi,\Psi)$ является ограничением универсального главного $B^b\mathcal{A}^*_r$-расслоения посредством ϕ, где $G = B^b\mathcal{A}^*_r$.*

17. Лемма. *Пусть G - это дифференцируемая (топологическая) группа скрученная над $\{i_0,...,i_{2^r-1}\}$ при $1 \le r \le 3$ удовлетворяющая условиям 4$(A1,A2,C1,C2)$. Тогда группа классов изоморфизмов C^∞ гладких (непрерывных) главных G-расслоений над N изоморфна группе $[N,BG]^\infty$ гладких (или $[N,BG]^0$ непрерывных соответственно) классов гомотопий гладких (непрерывных) отображений из N в BG.*

Доказательство. Каждое главное G-расслоение над N имеет свойства 4$(A1,A2,C1,C2)$ индуцированные ими для G, где локально $\pi^{-1}(V_j) = V_j \times G$, $conj(y) = (u, conj(g))$ для любого $y = (u,g) \in V_j \times G$, в то время как $\{i_0,...,i_{2^r-1}\}$ при $2 \le r \le 3$ является мультипликативной группой, которая ассоциативна при $r = 2$ и альтернативна при $r = 3$.

Рассмотрим короткую точную последовательность $e \to G_N \to AG_N \to BG_N \to e$. В силу леммы 16 [22] она индуцирует длинную точную последовательность когомологий

$... \to C^\infty(N,AG) \xrightarrow{\pi_*} C^\infty(N,BG) \to \mathsf{H}^1(N,G_N) \to \mathsf{H}^1(N,AG_N) \to ....$ Из $\mathsf{H}^1(N,AG_N) \cong e$ мы получим изоморфизм $C^\infty(N,BG)/\pi_*C^\infty(N,AG) \cong \mathsf{H}^1(N,G_N)$. Тогда образ $\pi_*C^\infty(N,AG)$ группы $C^\infty(N,AG)$ в $C^\infty(N,BG)$ состоит из всех гладких отображений из N в BG, для которых существуют отображения поднятия из N в AG.

С другой стороны, $f \in C^\infty(N,BG)$ имеет поднятие $F : N \to AG$ тогда и только тогда, когда f является гладкой (или непрерывной) гомотопной постоянному отображению, так как $[g_0 : ... : g_n]$ в $(BG)_n$ есть класс эквивалентности $\{(g_0,...,g_n) \sim (s_m(...(s_1g_0)...),...,(s_m...(s_1g_n)...)) : s_1,...,s_m \in$

$G, m \in \mathbf{N}\}$, следовательно, $C^\infty(N, BG)/\pi_* C^\infty(N, AG) \cong [N, BG]^\infty$. В классе непрерывных отображений мы аналогично получаем $C^0(N, BG)/\pi_* C^0(N, AG) \cong [N, BG]^0$.

18. Замечания. В силу §§4-6 существует короткая точная последовательность $e \to G \to AG \to BG \to e$ из $H_p^{t'}$ гомоморфизмов благодаря скрученным структурам групп G, AG и BG (смотри уравнения $4(A2)$ и $6(8,9)$).

Группам AG и BG соотносятся симплициальные топологические группы $AG_.$ и $BG_.$ с граничными (face) гомоморфизмами $\partial_j : AG_n \to AG_{n-1}$ даваемыми выражениями:

(1) $\partial_j(h_0[h_1|...|h_n]) = h_0h_1[h_2|...|h_n]$ при $j = 0$, $\partial_j(h_0[h_1|...|h_n]) = h_0[h_1|...|h_jh_{j+1}|...|h_n]$ при $0 < j < n$,

$\partial_j(h_0[h_1|...|h_n]) = h_0[h_1|...|h_{n-1}]$ при $j = n$. В тоже время отображение $\partial_j : BG_n \to BG_{n-1}$ имеет вид:

(2) $\partial_j([h_1|...|h_n]) = [h_2|...|h_n]$ при $j = 0$,

$\partial_j([h_1|...|h_n]) = [h_1|...|h_jh_{j+1}|...|h_n]$ при $0 < j < n$,

$\partial_j([h_1|...|h_n]) = [h_1|...|h_{n-1}]$ при $j = n$.

Гомоморфизмы вырождения $s_j : AG_n \to AG_{n+1}$ даются формулой:

(3) $s_j(h_0[h_1|...|h_n]) = h_0[e|h_1|...|h_n]$ при $j = 0$,

$s_j(h_0[h_1|...|h_n]) = h_0[h_1|...|h_j|e|h_{j+1}|...|h_n]$ при $0 < j < n$,

$s_j(h_0[h_1|...|h_n]) = h_0[h_1|...|h_n|e]$ при $j = n$. При этом отображение $s_j : BG_n \to BG_{n+1}$ дается формулой:

(4) $s_j([h_1|...|h_n]) = [e|h_1|...|h_n]$ при $j = 0$,

$s_j([h_1|...|h_n]) = [h_1|...|h_j|e|h_{j+1}|...|h_n]$ при $0 < j < n$,

$s_j([h_1|...|h_n]) = [h_1|...|h_n|e]$ при $j = n$.

Аналогичные отображения даются для симплексов:

(5) $\partial^j(t_0, ..., t_{n+1}) = (t_0, ..., t_j, t_j, t_{j+1}, ..., t_{n+1})$ и

(6) $s^j(t_0, ..., t_{n+1}) = (t_0, ..., t_j, \hat{t}_{j+1}, t_{j+2}, ..., t_{n+1})$, где $\hat{t}_{j+1}$ означает, что t_{j+1} отсутствует.

Геометрическая реализация $|AG_.|$ симплициального пространства $AG_.$ определяется как факторпространство дизъюнктного объединения $\sqcup_{n=0}^\infty \Delta^n \times G^{n+1}$ по отношениям эквивалентности

(7) $(\partial^j x, \bar{g}) \sim (x, \partial_j \bar{g})$ для любого $(x, \bar{g}) \in \Delta^{n-1} \times G^{n+1}$, причем $(s^j x, \bar{g}) \sim (x, s_j \bar{g})$ для любого $(x, \bar{g}) \in \Delta^{n+1} \times G^{n+1}$. Тогда как геометрическая реализация $|BG_.|$ симплициального пространства $BG_.$ является факторпространством дизъюнктного объединения $\sqcup_{n=0}^\infty \Delta^n \times G^n$ по отношениям эквивалентности

(8) $(\partial^j x, \bar{g}) \sim (x, \partial_j \bar{g})$ для любого $(x, \bar{g}) \in \Delta^{n-1} \times G^n$, причем $(s^j x, \bar{g}) \sim (x, s_j \bar{g})$ для любого $(x, \bar{g}) \in \Delta^{n+1} \times G^n$.

Рассмотрим некоммутативную сферу $\mathcal{C}_r := \{z \in \mathcal{I}_r : |z| = 1\}$ при $r = 2, 3$, где $\mathcal{I}_r := \{z \in \mathcal{A}_r : Re(z) = 0\}$. При $r = 1$ мы положим $\mathcal{C}_r = \{i, -i\}$, где $i = (-1)^{1/2}$. Пусть $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)$ обозначает аддитивную группу $\mathbf{Z}^{\mathcal{C}_r}/\mathcal{Z}$, где $\mathbf{Z}^{\mathcal{C}_r} := \prod_{b \in \mathcal{C}_r} T_b$, $T_b = \mathbf{Z}b$ для всякого $b \in \mathcal{C}_r$, $\mathbf{Z}$ обозначает аддитивную группу целых чисел, $\mathcal{Z}$ обозначает отношение эквивалентности такое, что $T_b \times T_{-b}/\mathcal{Z} = T_b$ для любого $b \in \mathcal{C}_r$. При $2 \le r \le 3$ группа $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)$ изоморфна с $\mathbf{Z}^\alpha$, где $card(\alpha) = card(\mathbf{R}) =: \mathsf{c}$. В частности, $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_1) = \mathbf{Z}i$ при $r = 1$.

Далее мы рассмотрим скрученные пучки и когомологии над $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$, где $2 \le r \le 3$. В частности, комплексный случай также будет включен при $r = 1$, но в последнем случае они задаются над коммутативным полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел. Поэтому мы можем одновременно рассмотреть $1 \le r \le 3$ и в общем говорить о скручивании подразумевая, что при $r = 1$ оно вырождено.

19. Предложение. *Пусть G -это группа или $\mathcal{A}_r^*$, или $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)$, где $1 \le r \le 3$. Тогда для каждого H^∞ гладкого многообразия N над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ и каждого $b \ge 2$ группа $\mathsf{H}^b(N, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r))$ изоморфна с:*

(1) *группой $\mathsf{E}(N, B^{b-2}G)$ классов изоморфизмов гладких главных $B^{b-2}G$-расслоений над N;*

(2) *группа $[N, B^{b-1}G]^\infty$ гладких классов гомотопий гладких отображений из N в $B^{b-1}G$.*

Доказательство. В силу следствия 3.4 [27, 28] существует короткая точная последовательность

(1) $0 \to \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r) \xrightarrow{\eta} \mathcal{A}_r \to \mathcal{A}_r^* \to 1$,

так как $\exp(M + 2\pi k M/|M|) = \exp(M)$ для любого ненулевого чисто мнимого числа $M \in \mathcal{I}_r$ (с

$Re(M)=0$) и всякого $k \in \mathbf{Z}$, $1 \le r \le 3$, где $\eta(z)=2\pi z$ для любого $z \in \mathcal{A}_r$. Если $f:\mathcal{A}_r \to \mathcal{A}_r^*$ есть дифференцируемая функция, тогда $(dLnf).h = w(h)$ - это дифференциальная один-форма, где d рассматривается как внешнее дифференцирование над $\mathbf{R}$, где $h \in \mathcal{A}_r$. В частном случае $G=\mathcal{A}_r^*$ с $1 \le r \le 3$ существуют короткие точные последовательности

(2) $1 \to \mathcal{A}_r^* \to A\mathcal{A}_r^* \to B\mathcal{A}_r^* \to 1$

(3) $1 \to B\mathcal{A}_r^* \to AB\mathcal{A}_r^* \to B^2\mathcal{A}_r^* \to 1$

(4) $1 \to B^m\mathcal{A}_r^* \to AB^m\mathcal{A}_r^* \to B^{m+1}\mathcal{A}_r^* \to 1$.

Поэтому идентифицируя концы этих коротких точных последовательностей, мы получим длинную точную последовательность

(5) $0 \to \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r) \to \mathcal{A}_r \to A\mathcal{A}_r^* \to AB\mathcal{A}_r^* \to ... \to AB^m\mathcal{A}_r^* \to ...$,

где $\sigma : \mathcal{A}_r \to A\mathcal{A}_r^*$,..., $\sigma : AB^{m-1}\mathcal{A}_r^* \to AB^m\mathcal{A}_r^*$ являются гомоморфизмами, все члены $\mathcal{A}_r$, $A\mathcal{A}_r^*$,...,$AB^m\mathcal{A}_r^*$,... являются контрактируемыми пространствами.

Мы предположим теперь, что N и E принадлежат классу гладкости H^∞. Пусть $\mathsf{C}^\infty(N, AB^m\mathcal{A}_r^*)$ обозначает пучок ростков C^∞ функций из N в $AB^m\mathcal{A}_r^*$. Таким образом, мы получим функтор C^∞. Тогда применение C^∞ функтора к длинной точной последовательности (5) дает:

(6) $0 \to \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N \to \mathsf{C}^\infty(N,\mathcal{A}_r) \to \mathsf{C}^\infty(N, A\mathcal{A}_r^*) \to \mathsf{C}^\infty(N, AB\mathcal{A}_r^*) \to ... \to \mathsf{C}^\infty(N, AB^m\mathcal{A}_r^*) \to ...$,

где $\sigma_* : \mathsf{C}^\infty(N,\mathcal{A}_r) \to \mathsf{C}^\infty(N, A\mathcal{A}_r^*)$,...,$\sigma_* : \mathsf{C}^\infty(N, AB^{m-1}\mathcal{A}_r^*) \to \mathsf{C}^\infty(N, AB^m\mathcal{A}_r^*)$ - это индуцированные гомоморфизмы.

Последняя точная последовательность называется решетчатым разрешением $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N$. Пучки $\mathsf{C}^\infty(N,\mathcal{A}_r)$ и $\mathsf{C}^\infty(N, AB^m\mathcal{A}_r^*)$ контрактируемы, так как $\mathcal{A}_r$ и $AB^m\mathcal{A}_r^*$ контрактируемы. Поэтому когомологии пучков $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N$ можно рассчитать используя комплекс

(7) $C^\infty(N,\mathcal{A}_r) \to C^\infty(N, A\mathcal{A}_r^*) \to ... \to C^\infty(N, AB^m\mathcal{A}_r^*) \to ...$

с гомоморфизмами

$\sigma_* : C^\infty(N,\mathcal{A}_r) \to C^\infty(N, A\mathcal{A}_r^*)$,...,$\sigma_* : C^\infty(N, AB^{m-1}\mathcal{A}_r^*) \to C^\infty(N, AB^m\mathcal{A}_r^*)$.

Длинную точную последовательность (7) мы назовем решетчатым коцепным комплексом для $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N$. Когомология (группа когомологий) для $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N$ рассчитанная с помощью решетчатого комплекса обозначается через $\mathsf{H}_b^*(N, \mathbf{Z}(\mathcal{A}_r)_N)$, и она называется решетчатой когомологией для $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N$. Тогда $\pi_0 C^\infty(N, B\mathcal{A}_r^*)$ есть первой решетчатой когомологией $\mathsf{H}_b^1(N, \mathbf{Z}(\mathcal{A}_r)_N)$ при $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N$.

Для обобщенной экспоненциальной последовательности

$0 \to \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N \to AB^{<b-2}G_N \to B^{b-2}G_N[2-b] \to e$ существует длинная точная последовательность когомологий

$... \to {}_h\mathsf{H}^{b-1}(N, AB^{<b-2}G_N) \to \mathsf{H}^1(N, B^{b-2}G_N) \to \mathsf{H}^b(N;\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)) \to {}_h\mathsf{H}^b(N, AB^{<b-2}G_N) \to ...$,

где $AB^{<b}G_N$ есть комплекс

$K_N \xrightarrow{\sigma} AG_N \xrightarrow{\sigma} ABG_N \xrightarrow{\sigma} AB^2G_N \xrightarrow{\sigma} ... \xrightarrow{\sigma} AB^{b-1}G_N$,

K равняется или $\mathcal{A}_r$, или $A\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)$ при $G=\mathcal{A}_r^*$ или $G = B\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)$ соответственно, где ${}_h\mathsf{H}^b(N,\mathcal{B})$ обозначает гиперкогомологию на N с коэффициентами в комплексе пучков $\mathcal{B}$ (смотри ее определение в [3, 12, 13] и §10 выше).

Мы имеем, что для любого $b \ge 0$ пучок AB^bG_N ацикличен. Рассмотрим группы глобальных сечений $AB^bG_N(N)$ пучков AB^bG_N. Поэтому когомология комплекса $AB^{<b-2}G_N$ равняется когомологии коцепного комплекса

$K \xrightarrow{\sigma} AG_N(N) \xrightarrow{\sigma} ABG_N(N) \xrightarrow{\sigma} AB^2G_N(N) \xrightarrow{\sigma} ... \xrightarrow{\sigma} AB^{b-1}G_N(N)$.

Таким образом, ${}_h\mathsf{H}^m(N, AB^{<b-2}G_N) \cong \mathsf{H}^m(N, AB^{<b-2}G_N(N)) \cong e$ для любого $m > b-2$, следовательно, кограничный гомоморфизм $\mathsf{H}^1(N, B^{b-2}G_N) \to \mathsf{H}^b(N;\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r))$ является изоморфизмом (смотри также главу 2 §4 в [3] для абелевых пучков).

Второе утверждение данного предложения вытекает из леммы 17.

20. Лемма. *Пусть X - это топологическое векторное пространство над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, где $2 \le r \le 3$. Тогда AX и BX относительно аддитивной групповой структуры X и относительно умножения на скаляры из $\mathcal{A}_r$ в гомогенных координатах являются $\mathcal{A}_r$ векторными пространствами и проекция $AX \to BX$ является $\mathbf{R}$-гомогенной и $\mathcal{A}_r$ аддитивной.*

Доказательство. Мы определим умножения посредством формул: для $\mathcal{A}_r \times AX \to AX$ как

$s|t_1,...,t_n; v_0[v_1|...|v_n]| = |t_1,...,t_n; sv_0[sv_1|...|sv_n]|$,

для $AX \times \mathcal{A}_r \to AX$ как

$|t_1, ..., t_n; v_0[v_1|...|v_n]|s = |t_1, ..., t_n; v_0s[v_1s|...|v_ns]|$,
для $\mathcal{A}_r \times BX \to BX$ как
$s|t_1, ..., t_n; [v_1|...|v_n]| = |t_1, ..., t_n; [sv_0|...|sx_n]|$,
для $BX \times \mathcal{A}_r \to BX$ как
$|t_1, ..., t_n; [v_1|...|v_n]|s = |t_1, ..., t_n; [v_1s|...|v_ns]|$.
Тогда если $q_j = s_m(s_{m-1}...(s_1v_j)...)$ для каждого j, то при $z \neq 0$ мы получим $zq_j = z(s_m...(s_1(z^{-1}(zv_j)))...)$ в силу альтернативности алгебры октонионов $\mathbf{O}$, при $z = 0$ мы тривиально получаем $0 = (s_m...(s_10)...)$. Таким образом, такое умножение совместимо с отношениями эквивалентности, так как $X = X_0i_0 \oplus ... \oplus X_{2^r-1}i_{2^r-1}$, где $X_0, ..., X_{2^r-1}$ - это попарно изоморфные топологические векторные пространства над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$, так что мы полагаем $vx = xv$ для любого $v \in X_j$ и $x \in \mathbf{R}$.

Поскольку поле вещественных чисел $\mathbf{R}$ является центром алгебры $\mathbf{O}$, то проекция из AX в BX является $\mathbf{R}$-линейной. Очевидно, что она аддитивна как гомоморфизм аддитивных групп.

21. Замечание. Пусть $N_.$ - это симплициальное гладкое многообразие над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, где $0 \le r \le 3$. Гладкая m-форма w на геометрической реализации $|N_.|$ для $N_.$ определяется как семейство $\{w^k : k\}$ гладких дифференциальных m-форм w^k на $\Delta^k \times N_k$ со значениями в алгебре Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ примененной к векторам, удовлетворяющих для любого $0 \le j \le n$ условиям совместности:

(1) $(\partial^j \times id)^* w^n = (id \times \partial_j)^* w^{n-1}$

(2) $(s^j \times id)^* w^n = (id \times s_j)^* w^{n+1}$,

где $\partial^j \times id$, $id \times \partial_j$, $s^j \times id$ и $id \times s_j$ - это следующие отображения:

(3) $id \times \partial_j : \Delta^{n-1} \times N_n \to \Delta^{n-1} \times N_{n-1}$, $\partial^j \times id : \Delta^{n-1} \times N_n \to \Delta^n \times N_n$, $id \times s_j : \Delta^{n+1} \times N_n \to \Delta^{n+1} \times N_{n+1}$, $s^j \times id : \Delta^{n+1} \times N_n \to \Delta^n \times N_n$, так что ∂^j и s^j - это кограничное отображение и отображение ковырождения для Δ^n, а ∂_j и s_j являются граничным отображением и отображением вырождения на N_n. Мы рассмотрим форму w принимающую значения в векторном пространстве или алгебре над $\mathcal{A}_r$ как это описано ниже.

Для группы Ли G или над $\mathbf{R}$, или возможно скрученной над $\mathcal{A}_r$ и ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$, мы зададим $g^{-1}dg$ как каноническую $\mathfrak{g}$-значную 1-форму связности на G (смотри также лемму 20). При отображениях $g \mapsto hg$ и $dg \mapsto hdg$ мы имеем $(g^{-1}h^{-1})(hdg) = g^{-1}dg$ в силу альтернативности группы G и тождеству Муфанга $(xy)(zx) = x(yz)x$ для любых $x, y, z \in \mathbf{O}$ и $de = d(g^{-1}g) = 0 = (dg^{-1})g + g^{-1}dg = [(dg^{-1})h^{-1}](hg) + (g^{-1}h^{-1})(hdg)$. Итерируя эти соотношения благодаря альтернативности алгебры октонионов $\mathbf{O}$ и тождествам Муфанга в ней, мы получим условие эквивариантности в гомогенных координатах над $\mathbf{O}$: $[(...(g^{-1}s_1^{-1})...s_{m-1}^{-1})s_m^{-1}][s_m(s_{m-1}...(s_1dg_1)...)] = g_1^{-1}dg_1$.

Все пространство AG универсального главного g-расслоения $AG \to BG$ несет гладкую $\mathfrak{g}$-значную форму w. Вычисление формы w дает: $w|x_0, ..., x_n, g_0, ..., g_n| = x_0g_0^{-1}dg_0 + x_1g_1^{-1}dg_1 + ... + x_ng_n^{-1}dg_n$, где $x_0, ..., x_n$ - это барицентрические координаты в Δ^n. Каждый член $x_ng_n^{-1}dg_n.s$ принадлежит $\mathfrak{g}$ для любого $s \in \mathfrak{g}$, так что $g_j^{-1}dg_j = \pi_j^*(g^{-1}dg|_{T_{g_j}G})$, где $\pi_j : G^{n+1} \to G$ - это проекция на j-й множитель, и $g^{-1}dg|_{T_{g_j}G}$ есть ограничение $g^{-1}dg$ на касательное пространство $T_{g_j}G$ для G в точке g_j.

Для $A\mathcal{A}_r^*$ с $2 \le r \le 3$ мы определим каноническую 1-форму связности $A(z^{-1}dz)$ по семейству $A\mathcal{A}_r$-значных 1-форм $A(z^{-1}dz)^n$ на $\Delta^n \times (\mathcal{A}_r^*)^{n+1}$, так что $A(z^{-1}dz)^n$ вычисляется на векторе $(v_0, ..., v_n)$ в точке $|t_1, ..., t_n, z_0[z_1|...|z_n]|$ согласно формуле

(4) $(A(z^{-1}dz)^n|_{|t_1,...,t_n,z_0[z_1|...|z_n]|}.(v_0, ..., v_n) = |t_1, ..., t_n, z_0^{-1}v_0[z_1^{-1}v_1|...|z_n^{-1}v_n]|$

и формально это обозначается через

(5) $(A(z^{-1}dz)^n|_{|t_1,...,t_n,z_0[z_1|...|z_n]|} = |t_1, ..., t_n, z_0^{-1}dz_0[z_1^{-1}dz_1|...|z_n^{-1}dz_n]|$.

При $B\mathcal{A}_r^*$ с $2 \le r \le 3$ каноническая 1-форма связности $B(z^{-1}dz)$ на $B\mathcal{A}_r^*$ определяется семейством $B\mathcal{A}_r$-значных 1-форм $B(z^{-1}dz)^n$ на $\Delta^n \times (\mathcal{A}_r^*)^n$, где

(6) $B(z^{-1}dz)^n|_{|t_1,...,t_n,[z_1|...|z_n]|} = |t_1, ..., t_n, [z_1^{-1}dz_1|...|z_n^{-1}dz_n]|$.

Мы имеем, что

$(\partial^j \times id)^* A(z^{-1}dz)^n|_{|t_1,...,t_{n-1};z_0[z_1|...|z_n]|} = |t_1, ..., t_j, t_j, t_{j+1}, ..., t_{n-1}; z_0^{-1}dz_0[z_1^{-1}dz_1|...|z_n^{-1}dz_n]|$ и

$(\partial^j \times id)^* B(z^{-1}dz)^n|_{|t_1,...,t_{n-1},[z_1|...|z_n]|} = |t_1, ..., t_j, t_j, t_{j+1}, ..., t_{n-1}, [z_1^{-1}dz_1|...|z_n^{-1}dz_n]|$ и

$(id \times \partial_j)^* A(z^{-1}dz)^{n-1}|_{|t_1,...,t_{n-1};z_0[z_1|...|z_n]|} = |t_1, ..., t_{n-1}; (z_0^{-1}dz_0) + (z_1^{-1}dz_1)[z_2^{-1}dz_2|...|z_n^{-1}dz_n]|$
при $j = 0$,

$(id \times \partial_j)^* A(z^{-1}dz)^{n-1}|_{|t_1,...,t_{n-1};z_0[z_1|...|z_n]|} =$

$|t_1, ..., t_{n-1}; z_0^{-1}dz_0[z_1^{-1}dz_1|...|z_{j-1}^{-1}dz_{j-1}|(z_j^{-1}dz_j) + (z_{j+1}^{-1}dz_{j+1})|z_{j+2}^{-1}dz_{j+2}|...|z_n^{-1}dz_n]|$
при $0 < j < n$,

$(id \times \partial_j)^* A(z^{-1}dz)^{n-1}|_{|t_1,...,t_{n-1};z_0[z_1|...|z_n]|} = |t_1, ..., t_{n-1}; z_0^{-1}dz_0[z_1^{-1}dz_1|...|z_{n-1}^{-1}dz_{n-1}]|$ при $j = n$,
причем

$(id \times \partial_j)^* B(z^{-1}dz)^{n-1}|_{|t_1,...,t_{n-1};[z_1|...|z_n]|} = |t_1, ..., t_{n-1}; [z_2^{-1}dz_2|...|z_n^{-1}dz_n]|$ для $j = 0$, и

$(id \times \partial_j)^* B(z^{-1}dz)^{n-1}|_{|t_1,...,t_{n-1};[z_1|...|z_n]|} =$

$|t_1, ..., t_{n-1}; [z_1^{-1}dz_1|...|z_{j-1}^{-1}dz_{j-1}|(z_j^{-1}dz_j) + (z_{j+1}^{-1}dz_{j+1})|z_{j+2}^{-1}dz_{j+2}|...|z_n^{-1}dz_n]|$ для $0 < j < n$

$(id \times \partial_j)^* B(z^{-1}dz)^{n-1}|_{|t_1,...,t_{n-1};[z_1|...|z_n]|} = |t_1, ..., t_{n-1}; [z_1^{-1}dz_1|...|z_{n-1}^{-1}dz_{n-1}]|$ для $j = n$,
и используя отношения эквивалентности $4(2, 3, 5)$, мы получим условия совместности (1) для дифференциальных форм, так как отображению ∂^j соответствует подстановка $x_j = 0$ и последнее соответствует $t_j = t_{j+1}$, потому что $t_j = x_0 + ... + x_{j-1}$, причем $h_j = e$ соответствует $g_j = g_{j+1}$.

Далее мы получим:

$(s^j \times id)^* A(z^{-1}dz)^n|_{|t_1,...,t_{n+1};z_0[z_1|...|z_n]|} = |t_1, ..., t_j, t_{j+2}, ..., t_{n+1}; z_0^{-1}dz_0, [z_1^{-1}dz_1|...|z_n^{-1}dz_n]|$ для любого j и $(s^j \times id)^* B(z^{-1}dz)^n|_{|t_1,...,t_{n+1};[z_1|...|z_n]|} = |t_1, ..., t_j, t_{j+2}, ..., t_{n+1}; [z_1^{-1}dz_1|...|z_n^{-1}dz_n]|$, так как $s^j(x_0, \dots, x_{n+1}) = (x_0, \dots, x_{j-1}, x_j + x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{n+1})$ и $x_j = 0$ соответствует $t_j = t_{j+1}$. Тогда

$(id \times s_j)^* A(z^{-1}dz)^{n+1}|_{|t_1,...,t_{n+1};z_0[z_1|...|z_n]|} = |t_1, ..., t_{n+1}; z_0^{-1}dz_0[0|z_1^{-1}dz_1|...|z_n^{-1}dz_n]|$ и

$(id \times s_j)^* A(z^{-1}dz)^{n+1}|_{|t_1,...,t_{n+1};z_0[z_1|...|z_n]|} =$

$|t_1, ..., t_{n+1}; z_0^{-1}dz_0, [z_1^{-1}dz_1|...|z_j^{-1}dz_j|0|z_{j+1}^{-1}dz_{j+1}|...|z_n^{-1}dz_n]|$
при $0 < j < n$ и

$(id \times s_j)^* A(z^{-1}dz)^{n+1}|_{|t_1,...,t_{n+1};z_0[z_1|...|z_n]|} =$

$|t_1, ..., t_{n+1}; z_0^{-1}dz_0, [z_1^{-1}dz_1|...|z_n^{-1}dz_n|0]|$ для $j = n$,
и кратко это записывается как

$(id \times s_j)^* B(z^{-1}dz)^{n+1}|_{|t_1,...,t_{n+1};[z_1|...|z_n]|} =$

$|t_1, ..., t_{n+1}; [z_1^{-1}dz_1|...|z_j^{-1}dz_j|0|z_{j+1}^{-1}dz_{j+1}|...|z_n^{-1}dz_n]|$ для любого j.
Используя отношения эквивалентности $4(2, 3, 5)$ в AB^bG и $B^{b+1}G$, мы получим условия совместности (2).

Для скрученной группы G удовлетворяющей условиям $4(A1, A2, C1, C2)$ гладкая k-форма на AB^bG и $B^{b+1}G$ определяется по индукции. Пусть определены гладкие дифференциальные k-формы на B^bG и каждом $\Delta^k \times (B^bG)^m$ при $k, m \geq 0$. Тогда гладкая k-форма w на $AB^{b+1}G$ состоит из семейства k-форм w^n на $\Delta^n \times (B^bG)^{n+1}$ удовлетворяющим условиям совместности $(1, 2)$. Для $B^{b+1}G$ гладкая k-форма w на $B^{b+1}G$ состоит из семейства k-форм w^n на $\Delta^n \times (B^bG)^{n+1}$ удовлетворяющим условиям совместности $(1, 2)$. Тогда гладкая k-форма w на $\Delta^k \times (B^{b+1}G)^m$ состоит из семейства k-форм w^n на $\Delta^k \times (\Delta^n \times (B^bG)^{n+1})^m$ удовлетворяющим условиям совместности:

(7) $id_{\Delta^k} \times (\partial^j \times id)^m)^* w^n = (id_{\Delta^k} \times (id \times \partial_j)^m)^* w^{n-1}$,

(8) $(id_{\Delta^k} \times (s^j \times id)^m)^* w^n = (id_{\Delta^k} \times (id \times s_j)^m)^* w^{n+1}$.
Выше было показано, что группы $AB^b\mathcal{A}_r$ и $B^{b+1}\mathcal{A}_r$ также имеют структуры $\mathcal{A}_r$ векторных пространств. Поэтому каноническая 1-форма связности $AB^b(z^{-1}dz)$ на $AB^b\mathcal{A}_r^*$ является 1-формой на $AB^b\mathcal{A}_r^*$, так что она удовлетворяет индуктивной формуле:

(9) $AB^b(z^{-1}dz)|_{|t_1,...,t_n,g_0[g_1|...|g_n]|} = |t_1, ..., t_n, B^b(g_0^{-1}g_0)[B^b(g_1^{-1}dg_1)|...|B^b(g_n^{-1}dg_n)]|$.
Тогда каноническая 1-форма связности $B^{b+1}(z^{-1}dz)$ на $B^{b+1}\mathcal{A}_r^*$ является 1-формой на $B^{b+1}\mathcal{A}_r^*$, так что

(10) $B^{b+1}(z^{-1}dz)|_{|t_1,...,t_n,[g_1|...|g_n]|} = |t_1, ..., t_n, [B^b(g_1^{-1}dg_1)|...|B^b(g_n^{-1}dg_n)]|$,
где $g_0, g_1, ..., g_n \in B^b\mathcal{A}_r^*$ и $B^b(g_j^{-1}dg_j)$ есть каноническая 1-форма связности $B^b(z^{-1}dz)$ на $B^b\mathcal{A}_r^*$ вычисленная в g_j.

22. Ростки над кватернионами и октонионами. Рассмотрим скрученные группы C, K, G удовлетворяющие условиям $4(A1, A2, C1, C2)$. Если

$(CE1)$ $e \to C_0 \to K_0 \to G_0 \to e$ есть топологическое центральное расширение, тогда мы скажем, что

$(CE2)$ $e \to C \to K \to G \to e$ является топологическим скрученным расширением.

росток на топологическом пространстве X - это пучок $\mathcal{S}$ категорий удовлетворяющий условиям $(G1 - G3)$:

$(G1)$ для любого открытого подмножества V в X категория $\mathcal{S}(V)$ является группоидом. Это означает, что любой морфизм обратим;

$(G2)$ каждая точка $x \in X$ имеет окрестность V_x, для которой $\mathcal{S}(V_x)$ непусто;

$(G3)$ всякие два объекта P_1 и P_2 в $\mathcal{S}(V)$ являются локально изоморфными, то сеть, каждая точка $x \in V$ имеет окрестность Y, для которой ограничения $P_1|_Y$ и $P_2|_Y$ изоморфны.

Росток $\mathcal{S}$ называется ограниченным пучком $\mathcal{G}$ скрученных групп над $\mathcal{A}_r$ удовлетворяющим условиям $5(A1, C1, C2, 7)$, если для любого открытого подмножества V в X и каждого объекта P в $\mathcal{S}(V)$ существует изоморфизм пучков $\nu : Aut(P) \to \mathcal{G}|_V$, где $\mathcal{G}|_V$ обозначает ограничение пучка $\mathcal{G}$ на V, причем $Aut(P)$ есть пучок автоморфизмов на P, так что для открытого подмножества Y в V группа $Aut(P)(Y)$ является группой автоморфизмов ограничения $s_Y(P)$. Предполагается, что изоморфизм коммутирует с морфизмами для $\mathcal{S}$ и должен быть совместим с ограничениями на меньшие открытые подмножества.

Два ростка $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$ ограниченные посредством $\mathcal{G}$ на многообразие N эквивалентны, если они удовлетворяют условиям $(G4, G5)$:

$(G4)$ если V - это открытое подмножество в X, тогда существует эквивалентность категорий $\mu_V : \mathcal{S}(V) \to \mathcal{E}(V)$, так что для любого объекта P в $\mathcal{S}(V)$ имеется коммутативная диаграмма:

$\mu_V : Aut_{\mathcal{S}(V)}(P) \to Aut_{\mathcal{E}(V)}(P)$,

$\nu_{\mathcal{S}} : Aut_{\mathcal{S}(V)}(P) \to \Gamma(V, \mathcal{G})$,

$\nu_{\mathcal{E}} : Aut_{\mathcal{E}(V)}(P) \to \Gamma(V, \mathcal{G})$ так что

$\nu_{\mathcal{S}} = \nu_{\mathcal{E}}(\mu_V)$;

$(G5)$ для любой пары открытых подмножеств V и Y в N с $Y \subset V$ существует обратимое естественное преобразование: $\beta : R_{\mathcal{E}}(\mu_V) = \mu_Y(R_{\mathcal{S}})$, где $R_{\mathcal{S}} : \mathcal{S}(V) \to \mathcal{S}(Y)$ обозначает естественное преобразование ограничения. Также накладывается условие, что для тройки открытых подмножеств $Y \subset V \subset J$ в N выполнены условия совместности.

Если имеется главное G-расслоение $E(B, G, \pi, \Psi)$ и расширение $(CE1, CE2)$ топологических групп, то существует росток $\mathcal{G}_\pi$ ограниченный посредством C_N на B. Этот росток строится из пучка сечений расслоения $E(B, G, \pi, \Psi)$, полагая для любого открытого подмножества V в B в качестве объектов и морфизмов в $\mathcal{G}_\pi(V)$ следующие. Мы ассоциируем с каждым сечением $s : V \to \pi^{-1}(V)$ для $\pi : \pi^{-1}(V) \to V$ G-эквивариантное отображение $t_s : \pi^{-1}(V) \to G$ так что $t_s(z)s(\pi(z)) = z$ для любого $z \in \pi^{-1}(V)$. Мы также имеем ограничение главного C-расслоения $K \to G$ с G на $\pi^{-1}(V)$ благодаря отображению $t_s : \pi^{-1}(V) \to G$.

Композиция $\pi \circ \pi_s : E_s \to V$ есть главное K-расслоение имеющее поднятие до структурной группы для $\pi^{-1}(V) \to V$ до K. Тогда пары (E, f) главных K-расслоений $\pi_V : E(V, K, \pi, \Psi) \to V$ и главных C-расслоений $f : E \to \pi^{-1}(V)$ таких, что имеется коммутативна диаграмма с $\pi(f(*)) = \pi_V(*)$.

Морфизм главных K-расслоений $\eta : E \to E_1$ из (E, f) в (E_1, f_1) описывается с помощью условия $f_1(\eta(*)) = f$ с соответствующей коммутативной диаграммой. Поэтому группа автоморфизмов каждого объекта (E, f) для $\mathcal{G}_\pi(V)$ является группой отображений из V в C являющимся сечением пучка C_N над V, следовательно, $\mathcal{G}_\pi$ есть росток ограниченный посредством C_N.

Построенный выше росток $\mathcal{G}_\pi$ имеет глобальное сечение в том и только том случае, когда существует поднятие структурной группы с C до K. При $G = B\mathcal{A}_r^*$ расширение $(CE1, CE2)$ принимает вид:

$1 \to \mathcal{A}_r^* \to A\mathcal{A}_r^* \to B\mathcal{A}_r^* \to 1$. Тогда каждое главное $A\mathcal{A}_r^*$-расслоение тривиально, так как $A\mathcal{A}_r^*$ контрактируемо. Итак, росток $\mathcal{G}_\pi$ имеет глобальное сечение тогда и только тогда, когда $E(N, B\mathcal{A}_r^*, \pi, \Psi)$ есть тривиальное $B\mathcal{A}_r^*$-расслоение.

Построим теперь другой росток $\mathcal{L}_\pi$ локальных сечений расслоения $E(B, B\mathcal{A}_r^*, \pi, \Psi)$. Для любого открытого подмножества V в B объекты в $\mathcal{L}_\pi(V)$ являются сечениями для E над V, так что каждое локальное сечение $s : V \to \pi^{-1}(V)$ индуцирует $B\mathcal{A}_r^*$-эквивариантное отображение $t_s : \pi^{-1}(V) \to B\mathcal{A}_r^*$, что индуцирует отображение $\tau_s = t_s(s(*)) : V \to B\mathcal{A}_r^*$.

Если E_s - это главное $\mathcal{A}_r^*$-расслоение над V индуцированное отображением τ_s, тогда морфизм между объектами $s, s_1 \in \mathcal{L}_\pi(V)$ индуцирует морфизм $\mathsf{E}_s \to \mathsf{E}_{s_1}$ соответствующих главных $\mathcal{A}_r^*$-расслоений. Тогда $\mathcal{L}_\pi$ - это росток ограниченный посредством $(\mathcal{A}_r^*)_N$, где $2 \le r \le 3$. Поэтому естественное преобразование $\mathcal{L}_\pi(V) \to \mathcal{G}_\pi(V)$ переводящее сечение s в ограничение E_s универсального главного $\mathcal{A}_r^*$-расслоения посредством t_s является эквивалентностью категорий, которая продолжается до эквивалентности ростков $\mathcal{L}_\pi \to \mathcal{G}_\pi$.

Для ростка $\mathcal{G}$ на N ограниченного посредством $(\mathcal{A}_r^*)_N$ с $2 \le r \le 3$, соотнесение каждому объекту Q в $\mathcal{G}(V)$ $\mathcal{S}^1_{N,\mathcal{A}_r}$-торзора $\mathcal{C}_{\mathcal{O}Q}$ на V индуцирует структуру связности. Этот торзор $\mathcal{C}_{\mathcal{O}Q}$ состоит из пучков, на которых $\mathcal{S}^1_{N,r}$ действует таким образом, что для каждой точки $x \in N$ существует окрестность V имеющая то свойство, что для любого открытого подмножества $Y \subset V$ группа $\mathcal{C}_{\mathcal{O}Q}(Y)$ является главным гомогенным пространством относительно группы $\Gamma(Y, \mathcal{S}^1_{N,\mathcal{A}_r})$. Это сопоставление $Q \mapsto \mathcal{C}_{\mathcal{O}Q}(V)$ должно быть функториальным согласно ограничениям с V на Y. Более того, для любого морфизма $\phi : Q \to J$ объектов из $\mathcal{G}(V)$ существует изоморфизм $\phi_* : \mathcal{C}_{\mathcal{O}Q}(V) \to \mathcal{C}_{\mathcal{O}J}(V)$ для $\mathcal{S}^1_{N,\mathcal{A}_r}$-торзоров. Поскольку $\mathcal{G}$ - это росток, то ϕ есть изоморфизм и ϕ_* совместимо с композицией морфизмов и с ограничениями на меньшие открытые подмножества, $Y \subset V$. Если ϕ - это автоморфизм для Q индуцированный $\mathcal{A}_r^*$-значными функциями g, то мы предположим, что ϕ_* есть автоморфизм $\nabla \mapsto \nabla - dLn(g)$ для $\mathcal{S}^1_{N,\mathcal{A}_r}$-торзора $\mathcal{C}_{\mathcal{O}Q}(V)$.

Рассмотрим связность ω на гладком главном $B\mathcal{A}_r^*$-расслоении $E(N, B\mathcal{A}_r^*, \pi, \Psi)$, и пусть V - это открытое подмножество в N такое, что $\mathcal{G}_\pi(V)$ непусто, и пусть ω_V будет ограничением ω на $\pi^{-1}(V)$. Тогда каждому элементу (E, f) of $\mathcal{G}_\pi(V)$ можно сопоставить множество $\mathcal{C}^\omega_{\mathcal{O}E}(V)$ связностей на E совместимое с ω. Если $\omega(q(*)) = f^*\omega$ для главных $\mathcal{A}_r^*$-расслоений $q : A\mathcal{A}_r \to B\mathcal{A}_r$ и $f : E \to \pi^{-1}(V)$, тогда ω порождает элемент $\hat{\omega} \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}E}(V)$. Поэтому сопоставление $\omega \mapsto \mathcal{C}^\omega_{\mathcal{O}}$ есть структура связности на $\mathcal{G}_\pi$.

Эквивалентность ростков $\mathcal{L}_\pi \to \mathcal{G}_\pi$ влечет продолжение ограниченной структуры связности с $\mathcal{G}_\pi$ до $\mathcal{L}_\pi$.

23. Следствие. *Отображение сопоставляющее классу изоморфных главных $B\mathcal{A}_r^*$-расслоений $E(B, B\mathcal{A}_r^*, \pi, \Psi)$, $\pi : E = A\mathcal{A}_r^* \to B\mathcal{A}_r^*$, класс эквивалентности ростка сечения $\mathcal{L}_\pi$ для $E(B, B\mathcal{A}_r^*, \pi, \Psi)$ индуцирует изоморфизм между группой классов изоморфных главных $B\mathcal{A}_r^*$-расслоений и группой классов эквивалентности ростков ограниченных посредством $\mathcal{A}_r^*$.*

24. Следствие. *Отображение сопоставляющее классу изоморфных главных $B\mathcal{A}_r^*$-расслоений $E(B, B\mathcal{A}_r^*, \pi, \Psi)$, $\pi : E = A\mathcal{A}_r^* \to B\mathcal{A}_r^*$, связность ω класса эквивалентности ростка сечения $\mathcal{L}_\pi$ для $E(B, B\mathcal{A}_r^*, \pi, \Psi)$ со структурой связности на $\mathcal{L}_\pi$ индуцированной посредством ω, вводит изоморфизм между группой классов изоморфных главных $B\mathcal{A}_r^*$-расслоений со связностью на группу классов эквивалентности ростков ограниченных посредством $\mathcal{A}_r^*$ со структурой связности.*

Доказательство. Это вытекает из предложения 19 и §22, так как случай $2 \le r \le 3$ получается из комплексного случая (смотри теоремы A1, A2 [13]) с помощью дополнительной процедуре удвоения групп с генераторами удвоения: $\mathbf{H}$ из $\mathbf{C}$, и $\mathbf{O}$ из $\mathbf{H}$, причем рассматриваемые группы удовлетворяют условиям $4(A1, A2, C1, C2)$.

25. Пучки, геометрические решетки и ростки групп оберток.

Если G удовлетворяет условиям $4(A1, A2, C1, C2)$, то группы оберток $(W^M E)_{t,H}$ удовлетворяют условиям $4(A1, A2, C1, C2)$ также, так как G^k удовлетворяет им являясь мультипликативной подгруппой кольца $\hat{G}^k$, и $(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}$ есть главное G^k-расслоение над коммутативной группой $(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}N)_{t,H}$ (смотри предложения $7(1,2)$ [22]). Таким образом, группы оберток можно взять как частные случаи групп для пучков, геометрических решеток и конструкций ростков (смотри §§1, 4, 11-13, 22, следствие 9, леммы 16 [22], 17, и т.д.).

Более конкретно это можно выполнить следующим образом. Для псевдо-многообразия $X = X_1 \times X_2$ над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, где X_1 и X_2 - это H^t_p-псевдо-многообразия над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, мы предположим, что для любых точек $s_{0,1}, \dots, s_{0,k}$ в X_1 и всякой окрестности U для $\{s_{0,1}, \dots, s_{0,k}\}$ в X_1, и точки $y_0 \in X_2$ и каждой окрестности V

для y_0 в X_2 существуют многообразия M и N такие, что $\{s_{0,1},...,s_{0,k}\} \subset M \subset U$ и $y_0 \in N \subset V$ для которого существует главное G-расслоение $E(N,G,\pi,\Psi)$ с отмеченной группой G удовлетворяющей условиям §2 [21]. Если

(1) $J(\Lambda) = \prod_{\alpha\in\Lambda} J_\alpha$

есть произведение топологических групп J_α, где Λ - это множество, и $\Lambda_2 \subset \Lambda_1$, тогда существует естественная проекция групп гомоморфизмов

(2) $\hat{s}_{\Lambda_2,\Lambda_1} : J(\Lambda_1) \to J(\Lambda_2)$.

Тогда мы определим пред-пучок F на X такой, что

(3) $F(U\times V) = \prod_{s_{0,1},...,s_{0,k}\in M\subset U; y_0\in N\subset V}(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E; N, G, \mathbf{P})_{t,H}$

и $s_{U_2\times V_2,U_1\times V_1} : F(U_1\times V_1) \to F(U_2\times V_2)$, так как $(W^{M_2,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E; N_2, G, \mathbf{P})_{t,H} \subset (W^{M_1,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E; N_1, G, \mathbf{P})_{t,H}$ при $\{s_{0,q} : q = 1,...,k\} \subset M_2 \subset M_1$ и $y_0 \in N_2 \subset N_1$ удовлетворяющих условиям теоремы 10 [22], где $U_2 \subset U_1$ и $V_2 \subset V_1$, причем открытые подмножества вида $U\times V$ содержат базу топологии для X.

Если $\mathcal{S}$ - это пучок на X и $\mathcal{S}(U)$ удовлетворяет условиям $4(A1,A2,C1,C2)$ для любого U открытого в X, тогда мы назовем $\mathcal{S}$ скрученным пучком над $\{i_0,...,i_{2^r-1}\}$.

При $k=1$ мы рассмотрим $x = \{s_0; y_0\} \in X$, но в общем мы берем $x = \{s_{0,1},...,s_{0,k}; y_0\} \in X_1^k \times X_2$ вместо $X_1\times X_2$. Тогда множество $\mathcal{F}_x$ всех ростков пред-пучка F в точке $x \in X_1^k\times X_2$ является индуктивным переделом $\mathcal{F}_x = ind-\lim F(U\times V)$ взятому по всем открытым окрестностям $U^k\times V$ точки x в $X_1^k\times X_2$. Тогда применение общей конструкции §1 дает пучок $\mathcal{S}_{W,X_1,X_2}$ групп оберток. Он скручен над $\{i_0,...,i_{2^r-1}\}$ для группы G скрученный над генераторами $\{i_0,...,i_{2^r-1}\}$ при $2\le r\le 3$. Этот пучок коммутативен, если группа G коммутативна.

Такой пучок получается из данного ниже обобщения взятием постоянного пучка группы $G = G(U)$ для любого U открытого в X_1.

Более общим образом, если имеется пучок $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{X_1}$ на X_1 групп такой, что для любого U открытого в X_1 группа $G(U)$ удовлетворяет условиям §2 в [21], тогда мы положим

(4) $F(U\times V) = \prod_{s_{0,1},...,s_{0,k}\in M\subset U; y_0\in N\subset V}(W^{M,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E; N, G(U), \mathbf{P})_{t,H}$,

где $s_{U_2,U_1} : G(U_1) \to G(U_2)$ является отображение ограничения для любого $U_2 \subset U_1$, так что определена структура параллельного переноса для $M \subset U$, $\mathcal{G}_{X_1}$ может быть скрученным при $2\le r\le 3$. Поэтому в силу теоремы 10 [22] и $(1,2)$ выше существует отображение ограничения $s_{U_2\times V_2,U_1\times V_1} : F(U_1\times V_1) \to F(U_2\times V_2)$ для любых открытых подмножеств $U_2 \subset U_1$ и $V_2 \subset V_1$. Тогда этот пред-пучок индуцирует пучок $\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}}$ групп оберток. Если $\mathcal{G}$ -это скрученный над $\{i_0,...,i_{2^r-1}\}$ при $2\le r\le 3$ пучок, тогда пучок $\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}}$ скручен над $\{i_0,...,i_{2^r-1}\}$. Если пучок $\mathcal{G}$ коммутативен, тогда пучок $\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}}$ тоже коммутативен.

26. Предложение. *Если $h_j : X_j \to Y_j$ - это H_p^t дифференцируемые отображения из X_j на Y_j, $j=1,2$, где $X = X_1\times X_2$ и $Y = Y_1\times Y_2$, X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 являются H_p^t-псевдо-многообразиями над $\mathcal{A}_r$, $0\le r\le 3$, $h_3 : \mathcal{G}_{Y_1} \to \mathcal{G}_{X_1}$ есть H_p^t гомоморфизм пучков,*

$t \ge [\max\{dim(X_1), dim(X_2), dim(Y_1), dim(Y_2)\}]/2+2$.

Тогда они индуцируют гомоморфизмы

$(h_1,h_3)_* : \mathcal{S}_{W,Y_1,X_2,\mathcal{G}_{Y_1}} \to \mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}_{X_1}}$ *и* $h_{2,*} : \mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}_{X_1}} \to \mathcal{S}_{W,X_1,Y_2,\mathcal{G}_{X_1}}$ *пучков оберток.*

Доказательство. Если $M_2 \subset U_2 \subset Y_1$, тогда $h_1^{-1}(M_2) =: M_1 \subset h_1^{-1}(U_2) =: U_1 \subset X_1$ и $h_1^{-1}(U_2) =: U_1$ открыто в X_1 для любого U_2 открытого в Y_1. В силу следствия 9 [21] и предложения 7.1 и теоремы 10 [22] существует гомоморфизм $(h_1,h_3)_* : (W^{M_2,\{v_{0,q}:q=1,...,k_2\}}E; N, G(U_2), \mathbf{P})_{t,H} \to (W^{M_1,\{s_{0,q}:q=1,...,k_1\}}E; N, G(U_1), \mathbf{P})_{t,H}$, где $h_3 : G(U_2) \to G(U_1)$ - это группа гомоморфизмов, $h_1(s_{0,q}) = v_{0,a(q)}$ для любого $q = 1,...,k_2$, $1\le a = a(q) \le k_2$. Выберем, в частности, $s_{0,q}$ таким, чтобы $k_1 = k_2 = k$. Поэтому существует гомоморфизм пред-пучков $(h_1,h_3)_* : F_{Y_1,X_2,\mathcal{G}_{Y_1}}(U_2\times V) \to F_{X_1,X_2,\mathcal{G}_{X_1}}(U_1\times V)$ для любого U_2 открытого в Y_1 и V открытого в X_2. Этот гомоморфизм пред-пучков индуцирует гомоморфизм пучков.

Если $f : M_1 \to N_1 \subset X_2$, то $h_2\circ f : M_1 \to N_2$ для H_p^t псевдо-многообразий M_1 в X_1, N_1 в X_2, N_2 в Y_2. Если f и h_2 -это H_p^t отображения, тогда в силу теоремы вложения Соболева [34] при $t \ge [\max\{dim(X_1), dim(X_2), dim(Y_1), dim(Y_2)\}]/2+2$ мы получим, что существует производная f', и она непрерывна почти всюду на X_1 и $h_2(f(*))$ является H_p^t отображением (смотри также [7]). Тогда $h_{2,*}(\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(x)) := \mathbf{P}_{h_2\circ\hat{\gamma},u}(x)$ влечет, что $h_{2,*} < \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} >_{t,H} = < \mathbf{P}_{h_2\circ\hat{\gamma},u} >_{t,H}$ для классов $R_{t,H}$

эквивалентных элементов, так как группа $G(U)$ и многообразие M заданы, и это же выполняется для N_1 и N_2. Поэтому существует индуцированный гомоморфизм

$h_{2,*} : (W^{M,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E; N_1, G(U), \mathbf{P})_{t,H} \to (W^{M,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E; N_2, G(U), \mathbf{P})_{t,H}$,

где $N_1 \subset V_1 \subset X_2$, $N_1 = h_2^{-1}(N_2)$, $y_{0,1} \in N_1$, $h_2(y_{0,1}) = y_{0,2}$, $y_{0,2} \in N_2 \subset V_2 \subset Y_2$. Итак, существует гомоморфизм пред-пучков $h_{2,*} : F_{X_1,X_2,\mathcal{G}_{X_1}}(U \times V_1) \to F_{X_1,Y_2,\mathcal{G}_{X_1}}(U \times V_2)$ (смотри §25), где $V_1 = h_2^{-1}(V_2)$, V_2 открыто в Y_2. Таким образом, $h_{2,*}$ индуцирует гомоморфизм пучков оберток.

27. Предложение. *Пусть $e \to \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}_3 \to e$ является точной последовательностью пучков на X_1. Тогда существует точная последовательность $e \to \mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}_1} \to \mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}_2} \to \mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}_3} \to e$ пучков оберток, где e - это единичный элемент (смотри §25).*

Доказательство. Для любого подмножества U открытого в X_1 существует короткая точная последовательность групп $e \to G_1(U) \to G_2(U) \to G_3(U) \to e$ такая, что $G_3(U)$ изоморфна фактор-группе $G_2(U)/G_1(U)$, где $G_1(U)$ - это нормальная замкнутая подгруппа в $G_2(U)$. В силу теоремы 10 [22] существует короткая точная последовательность $e \to (W^ME; N, G_1(U), \mathbf{P})_{t,H} \to (W^ME; N, G_2(U), \mathbf{P})_{t,H} \to (W^ME; N, G_3(U), \mathbf{P})_{t,H} \to e$. Тогда это индуцирует короткую точную последовательность пред-пучков оберток $e \to F_{G_1(U)}(U) \to F_{G_2(U)}(U) \to F_{G_3(U)} \to e$, и последнее в свою очередь дает короткую точную последовательность пучков оберток (смотри в общем случае также [3]).

28. Под-пучок оберток. В построении §25 рассмотрим под-пред-пучок соответствующий $F_N(U)$, то есть при $V = N$ с фиксированной отмеченной точкой $y_0 \in N$, где

(1) $F_N(U) := \prod_{s_{0,1},...,s_{0,k} \in M \subset U} (W^{M,\{s_{0,q}:q=1,...,k\}}E; N, G(U), \mathbf{P})_{t,H}$,

где $s^G_{U_2,U_1} : G(U_1) \to G(U_2)$ - это отображение ограничения для любого $U_2 \subset U_1$. В силу теоремы 10 [22] существует отображение ограничения $s_{U_2,U_1} : F_N(U_1) \to F_N(U_2)$ для любого открытого $U_2 \subset U_1$. Тогда этот пред-пучок индуцирует пучок $\mathcal{S}_{W,X_1,\mathcal{G}}(N)$ групп оберток, который является пред-пучком для $\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}}$.

29. Предложение. *Пусть $\eta : N_1 \to N_2$ - это $H^{t'}_p$-ретракция $H^{t'}_p$ многообразий, $N_2 \subset N_1$, $\eta|_{N_2} = id$, $y_0 \in N_2$, где $t' \ge t$, M есть H^t_p многообразие, $E(N_1, G, \pi, \Psi)$ и $E(N_2, G, \pi, \Psi)$ являются главными $H^{t'}_p$ расслоениями со структурной группой G удовлетворяющей условиям §2 [21], тогда существует гомоморфизм пучков η_* из $\mathcal{S}_{W,X_1,\mathcal{G}}(N_1)$ на $\mathcal{S}_{W,X_1,\mathcal{G}}(N_2)$.*

Доказательство. В силу предложения 17 [22] существует гомоморфизм групп $\eta_*(U)$ из $F_{N_1}(U)$ на $F_{N_2}(U)$ для любого U открытого в X_1, так что $\{s_{0,q} : q = 1, ..., k\} \subset M \subset X_1$. Если $\mathcal{B}$ есть пучок на X, и $\eta\mathcal{B}(U) = \mathcal{B}(\eta^{-1}(U))$ для любого U открытого в X, тогда существует пучок $\eta\mathcal{B}$, который называется образом пучка $\mathcal{B}$ (смотри также [3]). С другой стороны, $\eta_*(U_2) \circ s_{U_2,U_1} = s_{U_2,U_1} \circ \eta_*(U_1)$ для каждого открытого $U_2 \subset U_1$ благодаря условию 25(2). Тогда $\mathcal{S}_{W,X_1,\mathcal{G}}(N_2)$ - это образ $\mathcal{S}_{W,X_1,\mathcal{G}}(N_1)$, то есть $\eta_*\mathcal{S}_{W,X_1,\mathcal{G}}(N_1) = \mathcal{S}_{W,X_1,\mathcal{G}}(N_2)$, так как существует H^t_p отображение $id \times \eta$ из $M \times N_1$ на $M \times N_2$ (смотри §28). Это дает гомоморфизм пучков (смотри также §3 [3]).

30. Замечание. Для непрерывного отображения $f : X \to Y$ и пучка $\mathcal{B}$ на Y прообраз $f^*\mathcal{B}$ является пучком на X таким, что $f^*\mathcal{B} = \{(x, q) \in X \times \mathcal{B} : f(x) = \pi(q)\}$ (смотри [3]). В частности, если $f : X \to Y$ есть H^t_p отображение такое, что $f = (f_1, f_2)$, $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2$, тогда существует прообраз пучка $f^*\mathcal{S}_{W,Y_1,Y_2,\mathcal{G}_2}$, где $f_1^*\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_1$.

31. Следствие. *Пусть выполнены условия предложения 26, где h_j - это диффеоморфизмы при $j = 1, 2$ и изоморфизм при $j = 3$, тогда $\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}_{X_1}}$ и $\mathcal{S}_{W,Y_1,Y_2,\mathcal{G}_{Y_1}}$ являются изоморфными пучками.*

Доказательство. Это вытекает из предложения 26 и замечания 30.

32. Предложение. *Пусть пучок $\mathcal{G}$ представляется индуктивным пределом $ind-\lim_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$ пучков $\mathcal{G}_\alpha$, где Λ - это направленное множество. Тогда пучок оберток $\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}}$ является индуктивным пределом $ind - \lim_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}_\alpha}$.*

Доказательство. Для любого подмножества U открытого в X_1 и всех $\alpha < \beta \in \Lambda$ существует гомоморфизм $\pi^\alpha_\beta : \mathcal{G}_\alpha(U) \to \mathcal{G}_\beta(U)$. Тогда пучок $\mathcal{G}$ определяется как пучок порожденный пред-пучком $U \mapsto ind - \lim_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{G}_\alpha(U)$ (смотри также главу 1, §5 в [3]). Каждый гомоморфизм π^α_β порождает гомоморфизм главных расслоений из $E(N, G_\alpha, \pi, \Psi)$ в $E(N, G_\beta, \pi, \Psi)$. В силу предложения 26 для любого $\alpha < \beta \in \Lambda$ и всякого подмножества U открытого в X_1 существует гомоморфизм групп $\pi^\alpha_{\beta,*} : \mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}_\alpha}(U) \to \mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}_\beta}(U)$ порожденный π^α_β. Таким образом, существует $\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}} := ind - \lim_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}_\alpha}$.

33. Следствие. *Пусть $X_1 = ind - \lim_{\alpha\in\Lambda} X_{1,\alpha}$ и $\mathcal{G} = ind - \lim_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{G}_\alpha$ выполнены условия предложения 26, где $\mathcal{G}_\alpha = \mathcal{G}_{X_{1,\alpha}}$, и $X_{1,\alpha}$ есть H^t_p псевдо-многообразие для любого α в направленном множестве Λ. Тогда $\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}} = ind - \lim_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{S}_{W,X_{1,\alpha},X_2,\mathcal{G}_\alpha}$.*

Доказательство. Для H^t_p псевдо-многообразия X_1 база его топологии состоит из всех тех подмножеств U в X_1 таких, что $U = \bigcap_{v=1}^m U_{\alpha(v)}$ для некоторого $m \in \mathbf{N}$ и $\alpha(1), ..., \alpha(m) \in \Lambda$, где $V_\alpha = \pi_\alpha^{-1}(U_{\alpha(v)})$ открыто в X_α, $\pi_\alpha : X_{1,\alpha} \to X_1$ есть вложение для любого α в Λ. В силу предложения 26 для любого подмножества U открытого в X_1 и $\alpha < \beta \in \Lambda$ существует гомоморфизм групп $\pi^\alpha_{\beta,*} : \mathcal{S}_{W,X_{1,\alpha},X_2,\mathcal{G}_\alpha}(U) \to \mathcal{S}_{W,X_{1,\beta},X_2,\mathcal{G}_\beta}(U)$. В силу предложения 32 это порождает $\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}}$ как индуктивный предел пучков $\mathcal{S}_{W,X_{1,\alpha},X_2,\mathcal{G}_\alpha}$.

34. Теорема. *Пусть $X_2 = X_{2,1} \times X_{2,2}$, где X_1, $X_{1,2}$ и $X_{2,2}$ являются H^t_p и $H^{t'}_p$ псевдо-многообразиями соответственно над $\mathcal{A}_r$ как в §25. Тогда ограничение полного тензорного произведения пучков оберток $\mathcal{S}_{W,X_1,X_{2,1},\mathcal{G}_1} \hat{\otimes} \mathcal{S}_{W,X_1,X_{2,2},\mathcal{G}_2}$ на $\Delta_1 \times X_2$ изоморфно с $\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}}$, где $\mathcal{G}$ - это тензорное произведение $\mathcal{G} := \mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2$ пучков $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ на X_1, $\Delta_1 := \{(x,x) : x \in X_1\}$ обозначает диагональ в X_1^2.*

Доказательство. Если $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ - это пучки на топологическом пространстве X, тогда $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ обозначает пучок на X порожденный пред-пучком $U \mapsto \mathcal{B}_1(U) \otimes \mathcal{B}_2(U)$, где $(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)_x \cong \mathcal{B}_{1,x} \otimes \mathcal{B}_{2,x}$ есть естественный изоморфизм слоев. Пучок $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ называется тензорным произведением пучков.

Рассмотрим естественные проекции $\phi_1 : X_2 \to X_{2,1}$ и $\phi_2 : X_2 \to X_{2,2}$ имеющие продолжения $id \times \phi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1 \times X_{2,1}$ и $id \times \phi_2 : X_1 \times X_2 \to X_1 \times X_{2,2}$. Поэтому существует пучок $\mathcal{S} := \mathcal{S}_{W,X_1,X_{2,1},\mathcal{G}_1} \hat{\otimes} \mathcal{S}_{W,X_1,X_{2,2},\mathcal{G}_2} := [(id \times \phi_1)^* \mathcal{S}_{W,X_1,X_{2,1},\mathcal{G}_1}] \otimes [(id \times \phi_2)^* \mathcal{S}_{W,X_1,X_{2,2},\mathcal{G}_2}]$, который является полным тензорным произведением пучков (смотри в общем случае главу 1, §5 в [3]).

Если $\gamma : M \to X_2$ является H^t_p отображением сохраняющим отмеченные точки, тогда $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, где $\gamma_j : M \to X_{2,j}$ для $j = 1, 2$, $\gamma(s_{0,q}) = y_0$, $\gamma_j(s_{0,q}) = y_{j,0}$ для любого $q = 1, ..., k$ и $j = 1, 2$, $y_0 = y_{1,0} \times y_{2,0}$. Тогда мы получим поднятие $\hat{\gamma} : \hat{M} \to X_2$, так что $\gamma \circ \Xi = \hat{\gamma}$ (смотри §§2, 3 и 6 в [21]). Поэтому $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(\hat{s}_{0,k+q}) = \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,u_1}(\hat{s}_{0,k+q}) \otimes \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2,u_2}(\hat{s}_{0,k+q}) \in G$ для любого $q = 1, ..., k$, с $G = G_1 \otimes G_2$ являющимся прямым произведением групп для $G_1 = \mathcal{G}_1(U_1)$ и $G_2 = \mathcal{G}_2(U_2)$ для всякого U_j открытого в X_1, $j = 1, 2$, где $u \in E_{y_0}$, $u_j \in E_{j,y_{j,0}}$, $N = N_1 \times N_2$, $N_j \subset V_j \subset X_{2,j}$, $E = E(N, G, \pi, \Psi)$, $E_j = E(N_j, G_j, \pi_j, \Psi_j)$ - это главные расслоения, $y_0 = y_{0,1} \times y_{0,2}$, $y_{j,0} \in N_j$ являются отмеченными точками, V_j открыто в $X_{2,j}$ при $j = 1, 2$ (смотри также §25).

Для классов эквивалентных структур параллельных переносов мы получим $< \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} >_{t,H} = < \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,u_1} >_{t,H} \otimes < \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2,u_2} >_{t,H}$, следовательно, $F(U \times (V_1 \times V_2))$ изоморфно с $(\phi_1)^* F(U \times V_1) \otimes (\phi_2)^* F(U \times V_2)$ для любого подмножества U открытого в X_1 и всех V_j открытых в $X_{2,j}$, $j = 1, 2$, так как открытые множества вида $V = V_1 \times V_2$ образуют базу топологии в X_2, где $F(U \times V_j)$ дано для группы $\mathcal{G}_j(U)$. Здесь $U = U_1 = U_2$ и $(\phi_1)^* F(U \times V_1) \otimes (\phi_2)^* F(U \times V_2)$ изоморфно ограничению $(id \times \phi_1)^* F(U \times V_1) \otimes (id \times \phi_2)^* F(U \times V_2)$ с $U^2 \times V_1 \times V_2$ на $\Delta(U) \times V_1 \times V_2$, где $\Delta(U)$ обозначает диагональ в U^2. Таким образом, $\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}}$ изоморфно ограничению полного тензорного произведения пучков $\mathcal{S}_{W,X_1,X_{2,1},\mathcal{G}_1} \hat{\otimes} \mathcal{S}_{W,X_1,X_{2,2},\mathcal{G}_2}$ на $\Delta_1 \times X_2$.

35. Скрученные когомологии Александера-Спаньера.

Пусть G - это группа удовлетворяющая условиям $4(A1, A2)$, которая, в частности, может быть группой оберток для $\mathcal{A}_r$ псевдо-многообразий с $2 \le r \le 3$. Для открытого подмножества U в X обозначим через $A^m(U; G)$ группу всех функций $f : U^{m+1} \to G$ с поточечным умножением в G в качестве групповой операции. Поэтому функтор $U \mapsto A^m(U; G)$ является пред-пучком на X удовлетворяющим условиям:

$(S2)$ если $\{U_j : j\}$ - это семейство открытых подмножеств в X такое, что $\bigcup_j U_j = U$, тогда для семейства элементов $s_j \in A^m(U_j; G)$ такого, что $s_j|_{U_j \cap U_k} = s_k|_{U_j \cap U_k}$ для любого j, k существует $s \in A^m(U; G)$ такое, что $s|_{U_j} = s_j$ для любого j. Для удовлетворения этого условия мы положим $s_j = f_j : U_j^{m+1} \to G$ являющимися функциями здесь, и $s = f$ является их линейной комбинацией такой, что $f|_{U_j^{m+1}} = s_j$, причем f на $X^{m+1} \setminus (\bigcup_j U_j^{m+1})$ произвольно. Свойство

$(S1)$ если $U = \bigcup_j U_j$, где U_j открыто в X, и $f, g \in A^{m+1}(U; G)$ совпадают на U_j^{m+1} для любого j, тогда $f = g$ на $\bigcup_j U_j^{m+1}$ очевидно, так как f, g являются функциями.

Напомним, что семейство ϕ замкнутых подмножеств в X называется семейством носителей, если оно удовлетворяет условиям $(SP1, SP2)$:

$(SP1)$ если B есть замкнутое подмножество в C, где $C \in \phi$, тогда $B \in \phi$;

$(SP2)$ если $B_1, ..., B_m \in \phi$, $m \in \mathbf{N}$, тогда $\bigcup_{j=1}^m B_j \in \phi$.

Семейство ϕ носителей называется паракомпактифицирующим, если оно удовлетворяет двум дополнительным условиям:

$(SP3)$ каждый element в ϕ является паракомпактным пространством;

$(SP4)$ каждое множество из ϕ имеет замкнутую окрестность принадлежащую ϕ.

Объединение $\bigcup_{C\in\phi} C =: \mathsf{E}(\phi)$ называется распространением для ϕ. Мы положим $\Gamma_\phi(\mathcal{S}) := \{s \in \mathcal{S}(X) : |s| \in \phi\}$ для пучка $\mathcal{S}$ на X, где $|s| := \{x \in X : s(x) \ne e\}$ обозначает его носитель. Очевидно, что $\Gamma_\phi(\mathcal{S})$ является под-группой в $\mathcal{S}(X)$. Для пред-пучка A на X мы положим $A_\phi(X) := \{s \in A(X) : |s| \in \phi\}$. Для пред-пучка A на X мы положим $A_\phi(X) := \{s \in A(X) : |s| \in \phi\}$.

Пусть теперь $\mathsf{A}^m(X; G)$ является пучком порожденным пред-пучком $A^m(.; G)$. Мы зададим дифференциал $d : A^m(U; G) \to A^{m+1}(U; G)$ формулой:

$df(x_0, ..., x_{m+1}) = \sum_{j=0}^{m+1} (-1)^j f(x_0, ..., \hat{x}_j, ..., x_{m+1})$, где $f : U^{m+1} \to G$ является произвольной функцией. Тогда $f = \sum_{k=0}^{2^r-1} f_k i_k$, где $f_k \in \hat{G}_k$, $\{i_0, .., i_{2^r-1}\}$ являются генераторами алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, $2 \le r \le 3$. Таким образом, d является гомоморфизмом пред-пучков и $d^2 = 0$, так как $df = \sum_{k=0}^{2^r-1} (df_k) i_k$.

Тогда скрученные когомологии Александера-Спаньера определяются как

${}_{AS}\mathsf{H}^m_\phi(X; G) = \mathsf{H}^m(A^*_\phi(X; G))/A^*_0(X; G))$.

36. Теорема. *Пусть A - это пред-пучок на X удовлетворяющей условию 35$(S2)$, и $\mathcal{S}$ является пучком порожденным A, где $\mathcal{S}$ и A скручены над генераторами $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$ с $1 \le r \le 3$. Тогда для любого паракомпактифицирущего семейства ϕ носителей в X существует точная последовательность*

$e \to A_0(X) \to A_\phi(X) \xrightarrow{\theta} \Gamma_\phi(\mathcal{S}) \to e$, где $\theta : A(X) \to \mathcal{S}(X)$ есть естественное отображение пред-пучков в порожденный им пучок.

Доказательство. Рассмотрим $s \in \Gamma_\phi(\mathcal{S})$ и окрестность U для $|s|$ такую, что $cl(U) \in \phi$, где $cl(U)$ обозначает замыкание U в X. Поскольку $cl(U)$ является паракомпактным, то мы выберем локально конечное покрытие $\{U_j : j\}$ замыкания $cl(U)$, где каждое подмножество U_j открыто в X, и для которого существует $s_j \in A(U_j)$ такое, что $\theta(s_j) = s|_{U_j}$. Пусть $\{V_j : j\}$ является вписанным покрытием в $\{U_j : j\}$ таким, что $U \cap cl(V_j) \subset U_j$.

Для $x \in X$ множество $J(x) := \{j : x \in cl(V_j)\}$ конечно, следовательно, для любого $x \in X$ существует окрестность $W(x)$ такая, что $W(x) \subset U_j$ и для любого $j \in J(x)$ и всякого $y \in W(x)$ имеется включение $J(y) \subset J(x)$.

Для $j \in J(x)$ мы получим $\theta(s_j(x)) = s(x)$. Возьмем $W(x)$ достаточно малым таким, чтобы $s_j|_{W(x)} =: s_x$ не зависело от $j \in J(x)$, так как $J(x)$ конечно, следовательно, $s_x \in A(W(x))$.

Пусть $x, y \in U$, $z \in W(x) \cap W(y)$ и $j \in J(z)$, где $J(z) \subset J(x) \cup J(y)$. Тогда $s_x|_{W(x)\cap W(y)} = s_y|_{W(x)\cap W(y)}$. В силу условия $(S2)$ существует $\beta \in A(U)$ такое, что $\beta|_{W(x)} = s_x$ для любого $x \in U$, ясно, что $\theta(\beta) = s|_U$.

Мы возьмем теперь $C \in \phi$ такое, что $|s| \subset Int(C)$ и $C \subset U$, где $Int(C)$ обозначает внутренность множества C. Если $x \in C \setminus Int(C)$, тогда $\theta(\beta)(x) = s(x) = 0$. Поэтому существует покрытие $\{Q_j\}$ для множества $C \setminus Int(C)$ открытыми в X множествами Q_j такими, что $Q_j \subset U$ и $t|_{Q_j} = 0$ для всякого j.

Мы выберем открытое покрытие $\{Q_j\} \cup \{Int(C), X \setminus C\}$ для X и элементы $e \in A(Q_j)$, $\beta|_{Int(C)} \in A(Int(C))$ и $e \in A(X \setminus C)$. Ограничения каждых двух элементов на общую часть их областей определения совпадают. Таким образом, в силу условия $(S2)$ такие элементы имеют общее продолжение $q \in A(X)$ и неизбежно $\theta(q) = s$, и $|q| = |\theta(q)| = |s| \in \phi$. Последовательность $e \to A_0(X) \to A_\phi(X) \xrightarrow{\theta} \Gamma_\phi(\mathcal{S}) \to e$ точна, так как каждая подпоследовательность $e \to A_{0,k}(X) \to A_{\phi,k}(X) \xrightarrow{\theta} \Gamma_{\phi,k}(\mathcal{S}) \to e$ точна, где $\hat{A}_\phi = \sum_{k=0}^{2^r-1} \hat{A}_{\phi,k} i_k$ и $\hat{\Gamma}_\phi = \sum_{k=0}^{2^r-1} \hat{\Gamma}_{\phi,k} i_k$, где каждый член $\hat{A}_{\phi,k}$ коммутативен, и они попарно изоморфны для различных k, также $\hat{\Gamma}_{\phi,k}$ коммутативны и попарно изоморфны для различных значений k, так как пучок $\mathcal{S}$ скручен над (квази-) группой стандартных генераторов $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$ алгебры Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$.

Мы отметим, что для пред-пучка A удовлетворяющего условию $(S1)$ мы имеем $A_0(X) = e$.

37. Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 36. Тогда для паракомпактифицирущего семейства ϕ носителей существует естественный изоморфизм:*

$\mathsf{H}^m_\phi(X;G) \cong \mathsf{H}^m(\Gamma_\phi(\mathcal{S}^*(X;G))$.

Доказательство. Это немедленно вытекает из теоремы 36 и §35.

38. Скрученные сингулярные когомологии. Пусть $\mathcal{B}$ будет локально конечным скрученным пучком на X, то есть группа $\mathcal{B}(U)$ удовлетворяет условиям $4(A1, A2, C1, C2)$ для любого подмножества U открытого в X. Для $U \subset X$ мы обозначим через $S^m(U;\mathcal{B})$ группу сингулярных m-мерных коцепей пространства U с коэффициентами в $\mathcal{B}$. Каждый элемент $f \in S^m(U;\mathcal{B})$ является функцией сопоставляющей любому m-мерному симплексу $\sigma : \Delta^m \to U$ сечение $f(\sigma) \in \Gamma(\sigma^*(\mathcal{B}))$, где Δ^m обозначает стандартный m-мерный симплекс.

Пред-пучок $S^m(.;\mathcal{B})$ удовлетворяет условию $(S2)$. Пучок $\mathcal{B}$ локально постоянен, тогда пучок $\sigma^*(\mathcal{B})$ постоянен на Δ^m, так как симплекс Δ^m односвязен, где $m \geq 1$. Поэтому существует обычный кограничный оператор $d : S^m(U;\mathcal{B}) \to S^{m+1}(U;\mathcal{B})$.

Рассмотрим пучок $\mathcal{S}^m(U;\mathcal{B})$ порожденный пред-пучком $U \mapsto S^m(U;\mathcal{B})$. Тогда дифференциал d пред-пучка индуцирует дифференциал пучка. Для локально постоянного пучка $\mathcal{B}$ сингулярные когомологии с коэффициентами в $\mathcal{B}$ и носителями в семействе ϕ определены как ${}_\Delta\mathsf{H}^m_\phi(X;\mathcal{B}) = \mathsf{H}^m(S^*_\phi(X;\mathcal{B}))$. Поскольку $\mathcal{B}$ есть скрученный пучок над $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$, тогда $S^*_\phi(X;\mathcal{B})$ и неизбежно ${}_\Delta\mathsf{H}^m_\phi(X;\mathcal{B})$ скручены над $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$.

Пусть $\mathcal{U} := \{U_j : j\}$ является открытым покрытием для X, и пусть $S^*(\mathcal{U};\mathcal{B})$ - это группа сингулярных коцепей определенная на сингулярных симплексах вписанных в покрытие $\mathcal{U}$. С помощью подразделения мы получим, что гомоморфизм $b_\mathcal{U} : S^*(X;\mathcal{B}) \to S^*(\mathcal{U};\mathcal{B})$ индуцирует изоморфизм когомологий, следовательно, комплекс $K_\mathcal{U} = ker b_\mathcal{U}$ ацикличен. С другой стороны, $S^*_0(X;\mathcal{B}) = \bigcup K^*_\mathcal{U} = ind - \lim K_\mathcal{U}$, следовательно, $\mathsf{H}^*(S^*_0(X;\mathcal{B})) = \mathsf{H}^*(ind - \lim K^*_\mathcal{U}) = ind - \lim \mathsf{H}^*(K^*_\mathcal{U}) = e$.

Таким образом, для паракомпактифицирущего семейства носителей из точности последовательности

$e \to S^*_0 \to S^*_\phi \to \Gamma_\phi(\mathcal{S}^*) \to e$

и теоремы 36 вытекает изоморфизм ${}_\Delta\mathsf{H}^m_\phi(X;\mathcal{B}) \cong \mathsf{H}^m(\Gamma_\phi(\mathcal{S}^*(X;\mathcal{B})))$.

39. Скрученные дифференциальные пучки. Градуированный пучок - это последовательность $\{\mathcal{S}^m : m \in \mathbf{Z}\}$ пучков, которая называется дифференциальным пучком, если имеются гомоморфизмы

(1) $d : \mathcal{S}^m \to \mathcal{S}^{m+1}$ такие, что $d^2 = 0$ для любого m. Этот пучок может быть скрученным над $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$, где $2 \leq r \leq 3$. В этом случае мы предположим, что

(2) с точностью до автоморфизмов $\theta_m : \mathcal{S}^m \to \mathcal{S}^m$ выполняется включение $\theta_{m+1} \circ d(\mathcal{S}^m_k) \subset \mathcal{S}^{m+1}_k$ для любого $k = 0, ..., 2^r - 1$.

Дифференциальный пучок $\mathcal{S}^*$ имеющий $\mathcal{S}^m = 0$ для любого $m < 0$ и снабженный гомоморфизмом аугментации $\varepsilon : \mathcal{B} \to \mathcal{S}^0$ называется резольвентой пучка, если последовательность

$e \to \mathcal{B} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{S}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{S}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{S}^2 \to ...$

точна.

Понятие дифференциального градуированного пред-пучка формулируется аналогично. Если $\mathcal{S}^m$ скручен, то есть $\hat{\mathcal{S}}^m = \hat{\mathcal{S}}^m_0 i_0 + ... + \hat{\mathcal{S}}^m_{2^r-1} i_{2^r-1}$, где $\hat{\mathcal{S}}^m_k$ и $\hat{\mathcal{S}}^m_j$ попарно изоморфны и коммутативны для любого $k \neq j$, тогда $Ker(d : \mathcal{S}^m \to \mathcal{S}^{m+1})$ и $Im(d : \mathcal{S}^{m-1} \to \mathcal{S}^m)$ также скручены, так как с точностью до изоморфизмов $\theta_m : \mathcal{S}^m \to \mathcal{S}^m$ мы имеем $\theta_{m+1} \circ d(\mathcal{S}^m_k) \subset \mathcal{S}^{m+1}_k$ для любого $k = 0, ..., 2^r - 1$.

Пучок когомологий (другими словами производный пучок) определяется как $\mathsf{H}^m(\mathcal{S}^*) = Ker(d : \mathcal{S}^m \to \mathcal{S}^{m+1})/Im(d : \mathcal{S}^{m-1} \to \mathcal{S}^m)$. Если $\mathcal{S}^*$ порожден дифференциальным пред-пучком S^*, тогда $\mathsf{H}^m(\mathcal{S}^*)$ порождено пред-пучком $U \mapsto \mathsf{H}^m(S^*(U))$.

Для пучка $\mathcal{B}$ на топологическом пространстве X и открытого подмножества $U \subset X$ мы обозначим через $\mathsf{Y}^0(U;\mathcal{B})$ множество всех отображений (может быть разрывных) $f : U \to \mathcal{B}$ таких, что $\pi \circ f = id$ является тождественным отображением на U, где $\pi : \mathcal{B} \to X$ есть каноническая проекция. Таким образом, $\mathsf{Y}^0(U;\mathcal{B}) = \prod_{x\in U}\mathcal{B}_x$ и она является группой с поточечными групповыми операциями. Поэтому $U \mapsto \mathsf{Y}^0(U;\mathcal{B})$ - это пред-пучок удовлетворяющий условиям $(S1, S2)$, следовательно, он является пучком, который мы обозначим посредством $\mathcal{Y}^0(X;\mathcal{B})$. Если $\mathcal{B}$ скручен, то $\mathcal{Y}^0(U;\mathcal{B})$ также скручен.

Включение всех непрерывных сечений для $\mathcal{B}$ в семейство всех сечений не обязательно непрерывных индуцирует гомоморфизм аугментации $\varepsilon : \mathcal{B} \to \mathcal{Y}^0(X;\mathcal{B})$.

Для семейства ϕ носителей мы положим $\mathsf{Y}^0_\phi(X;\mathcal{B}) = \Gamma_\phi(\mathcal{Y}^0(X;\mathcal{B})$. Если $e \to \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_3 \to e$ есть короткая точная последовательность пучков (может быть скрученных), тогда последовательность пред-пучков $e \to \mathsf{Y}^0(X;\mathcal{B}_1) \to \mathsf{Y}^0(X;\mathcal{B}_2) \to \mathsf{Y}^0(X;\mathcal{B}_3) \to e$ точна. Если $f \in \mathsf{Y}^0_\phi(X;\mathcal{B})$, тогда его носитель таков $|f| := cl\{x : f(x) \ne e\}$. Поэтому f является образом сечения g пучка $\mathcal{B}$ такого, что g не обязательно непрерывен и $g(x) = e$, если $f(x) = e$ для $x \in X$, следовательно, $|g| = |f| \in \phi$.

Обозначим через $\mathcal{Z}^1(X;\mathcal{B})$ коядро гомоморфизма ε, так что последовательность $e \to \mathcal{B} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{Y}^0(X;\mathcal{B}) \xrightarrow{\partial} \mathcal{Z}^1(X;\mathcal{B})$ точна. По индукции мы определим пучки

$\mathcal{Y}^m(X;\mathcal{B}) = \mathcal{Y}^0(X;\mathcal{Z}^m(X;\mathcal{B}))$, $\mathcal{Z}^{m+1}(X;\mathcal{B}) = \mathcal{Z}^1(X;\mathcal{Z}^m(X;\mathcal{B}))$.

Если $\mathcal{B}$ скручен над $\{i_0, .., i_{2^r-1}\}$, тогда $\mathcal{Z}^1(X;\mathcal{B})$ также скручен, и по индукции $\mathcal{Z}^m(X;\mathcal{B})$ и $\mathcal{Y}^m(X;\mathcal{B})$ скручены для любого $m \in \mathbf{N}$. Поэтому последовательность $e \to \mathcal{Z}^m(X;\mathcal{B}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{Y}^m(X;\mathcal{B}) \xrightarrow{\partial} \mathcal{Z}^{m+1}(X;\mathcal{B}) \to e$ точна. Мы рассмотрим композицию $d = \varepsilon \circ \partial$ для $\mathcal{Y}^m(X;\mathcal{B}) \xrightarrow{\partial} \mathcal{Z}^{m+1}(X;\mathcal{B}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{Y}^{m+1}(X;\mathcal{B})$, тогда последовательность $e \to \mathcal{B} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{Y}^0(X;\mathcal{B}) \xrightarrow{d} \mathcal{Y}^1(X;\mathcal{B}) \xrightarrow{d} \mathcal{Y}^2(X;\mathcal{B}) \to ...$ точна. Таким образом, $\mathcal{Y}^*(X;\mathcal{B})$ есть резольвента пучка $\mathcal{B}$, которая называется канонической резольвентой.

40. Предложение. *Каноническая резольвента скрученного пучка $\mathcal{B}$ является послойно гомотопически тривиальной.*

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм $\mathsf{Y}^0(U;\mathcal{B}) \to \mathcal{B}_x$ такой, что $U \ni x \mapsto f(x) \in \mathcal{B}_x$ для каждых $f \in \mathsf{Y}^0(U;\mathcal{B})$ и $x \in U$. Прямой предел по окрестностям точки x индуцирует гомоморфизм $\eta_x : \mathcal{Y}^0(X;\mathcal{B})_x \to \mathcal{B}_x$, следовательно, $\eta_x \circ \varepsilon : \mathcal{B}_x \to \mathcal{B}_x$ есть тождественный изоморфизм, где $\eta_x \circ \varepsilon(z) = \eta_x(\varepsilon(z))$. Мы определим гомоморфизм $\nu_x : \mathcal{Z}^1(X;\mathcal{B}) \to \mathcal{Y}^0(X;\mathcal{B})$ по формуле $\nu_x \circ \partial = 1 - \varepsilon \circ \eta_x$, которая задает ν_x единственным образом. Поэтому существует расщепление слоя $\mathcal{Z}^m(X;\mathcal{B})_x \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{Y}^m(X;\mathcal{B}) \xrightarrow{\partial} \mathcal{Z}^{m+1}(X;\mathcal{B})_x$ и $\mathcal{Z}^m(X;\mathcal{B})_x \xleftarrow{\eta_x} \mathcal{Y}^m(X;\mathcal{B}) \xleftarrow{\nu_x} \mathcal{Z}^{m+1}(X;\mathcal{B})_x$. Мы положим $D_x := \nu_x \circ \eta_x : \mathcal{Y}^m(X;\mathcal{B})_x \to \mathcal{Y}^{m-1}(X;\mathcal{B})_x$ для $m > 0$. Поэтому $d \circ D_x + D_x \circ d = \varepsilon \circ \partial \circ \nu_x \circ \eta_x + \nu_x \circ \eta_x \circ \varepsilon \circ \partial = \varepsilon \circ \eta_x + \nu_x \circ \partial = 1$ на $\mathcal{Y}^m(X;\mathcal{B})$ при $m > 0$. В тоже время на $\mathcal{Y}^0(X;\mathcal{B})_x$ мы имеем $D_x \circ d = \nu_x \circ \eta_x \circ \varepsilon \circ \partial = \nu_x \circ \partial = 1 - \varepsilon \circ \eta_x$. Это означает, что $\mathcal{Y}^*(X;\mathcal{B})_x$ есть гомотопически послойно тривиальная резольвента.

41. Замечание. Функтор $\mathcal{Y}^0(X;\mathcal{B})$ точен по $\mathcal{B}$, следовательно, $\mathcal{Z}^1(X;\mathcal{B})$ является также точным функтором по $\mathcal{B}$. По индукции мы получим, что все функторы $\mathcal{Y}^m(X;\mathcal{B})$ и $\mathcal{Z}^m(X;\mathcal{B})$ точны по $\mathcal{B}$. Для произвольного семейства ϕ носителей на X мы положим $\mathsf{Y}^m_\phi(X;\mathcal{B}) := \Gamma_\phi(\mathcal{Y}^m(X;\mathcal{B})) = \mathsf{Y}^0_\phi(X;\mathcal{Z}^m(X;\mathcal{B}))$. Поскольку функтор $\mathsf{Y}^0(X;*)$ точен, то функтор $\mathsf{Y}^m_\phi(X;\mathcal{B})$ точен.

42. Определение. Когомологии в X с носителями в ϕ с коэффициентами в $\mathcal{B}$ определяются как $\mathsf{H}^m_\phi(X;\mathcal{B}) := \mathsf{H}^m(\mathsf{Y}^*_\phi(X;\mathcal{B}))$.

42.1. Замечание. Последовательность $e \to \Gamma_\phi(\mathcal{B}) \to \Gamma_\phi(\mathcal{Y}^0(X;\mathcal{B})) \to \Gamma_\phi(\mathcal{Y}^1(X;\mathcal{B}))$ точна, следовательно, $\Gamma_\phi(\mathcal{B}) \cong \mathsf{H}^0_\phi(X;\mathcal{B})$. Если имеется короткая точная последовательность скрученных пучков $e \to \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_3 \to e$ на X, тогда она влечет точность последовательности коцепных комплексов

$e \to \mathsf{Y}^*_\phi(X;\mathcal{B}_1) \to \mathsf{Y}^*_\phi(X;\mathcal{B}_2) \to \mathsf{Y}^*_\phi(X;\mathcal{B}_3) \to e$, что в свою очередь индуцирует длинную точную последовательность

$... \to \mathsf{H}^m_\phi(X;\mathcal{B}_1) \to \mathsf{H}^m_\phi(X;\mathcal{B}_2) \to \mathsf{H}^m_\phi(X;\mathcal{B}_3) \xrightarrow{\delta} \mathsf{H}^{m+1}_\phi(X;\mathcal{B}_1) \to ....$

43. Определение. Пусть G - это топологическая группа удовлетворяющая условиям $4(A1, A2, C1, C2)$ такая, что G является мультипликативной группой кольца $\hat{G}$, где $1 \le r \le 2$. Тогда мы зададим сплетающее (smashed) произведение G^s такое, что оно является мультипликативной группой кольца $\hat{G}^s := \hat{G} \otimes_l \hat{G}$, где $l = i_{2^r}$ обозначает генератор удвоения, умножение в $\hat{G} \otimes_l \hat{G}$ таково:

(1) $(a+bl)(c+vl) = (ac - v^*b) + (va + bc^*)l$ для любых $a, b, c, v \in \hat{G}$, где $v^* = conj(v)$.

Сплетающее произведение $M_1 \otimes_l M_2$ многообразий M_1, M_2 над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ с $dim(M_1) = dim(M_2)$ определяется как $\mathcal{A}_{r+1}$ многообразие с локальными координатами $z = (x, yl)$, где x в M_1 и y в M_2 - это локальные координаты.

44. Теорема. *Существуют сплетающие произведения* $\mathcal{S}^s := \mathcal{S}_1 \otimes_l \mathcal{S}_2$ *на* $X = X_1 = X_2$ *и* $\hat{\mathcal{S}}^s := \mathcal{S}_1 \hat{\otimes}_l \mathcal{S}_2$ *на* $X = X_1 \times X_2$ *над* $\{i_0, ..., i_{2^{r+1}-1}\}$ *изоморфных скрученных пучков* $\mathcal{S}_1$ *на* X_1 *и* $\mathcal{S}_2$ *на* X_2 *над* $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$ *с* $X_1 = X_2$, *в частности, пучков оберток, где* $1 \le r \le 2$, $l = i_{2^r}$.

Доказательство. Если $\mathcal{S}_j$ есть пучок на топологическом пространстве X_j скрученный над $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$, тогда $\hat{\mathcal{S}}_j = \hat{\mathcal{S}}_{0,j} i_0 \oplus ... \oplus \hat{\mathcal{S}}_{2^r-1,j} i_{2^r-1}$, где $\hat{\mathcal{S}}_{k,j}(U) = \mathcal{S}_{k,j}(U) \cup \{0\}$ являются коммутативными кольцами для любого подмножества U открытого в X_j, $\hat{\mathcal{S}}_{k,j}$ - это пучки на X_j попарно изоморфные для различных значений k. Тогда для $X = X_1 = X_2$ мы возьмем $\mathcal{S}^s_x := (\mathcal{S}_1)_x \otimes_l (\mathcal{S}_2)_x$ для любого $x \in X$ согласно определению 43, что определяет скрученный пучок $\mathcal{S}$ на X над $\{i_0, ..., i_{2^{r+1}-1}\}$ благодаря предложению 19 [22]. Этот пучок $\mathcal{S}$ является сплетающим тензорным произведением пучков.

Если $X = X_1 \times X_2$, тогда мы возьмем $\hat{\mathcal{S}}^s := \mathcal{S}_1 \hat{\otimes}_l \mathcal{S}_2 = (\pi_1^* \mathcal{S}_1) \otimes_l (\pi_2^* \mathcal{S}_2)$, что является сплетающим полным тензорным произведением пучков, где $\pi_1 : X \to X_1$ и $\pi_2 : X \to X_2$ - это проекции.

45. Следствие. *Пусть* $X_2 = X_{2,1} \otimes_l X_{2,2}$ *- это сплетающее произведение, где* X_1 *и* X_2 *являются* H^t_p *и* $H^{t'}_p$ *псевдо-многообразиями соответственно над* $\mathcal{A}_{r+1}$, $1 \le r \le 2$. *Тогда ограничение сплетающего полного тензорного произведения пучков оберток* $\mathcal{S}_{W,X_1,X_{2,1},\mathcal{G}} \hat{\otimes}_l \mathcal{S}_{W,X_1,X_{2,2},\mathcal{G}}$ *на* $\Delta_1 \times X_2$ *изоморфно с* $\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}^s}$, *где* $\mathcal{G}^s$ *является сплетающим тензорным произведением* $\mathcal{G}^s := \mathcal{G} \otimes_l \mathcal{G}$ *скрученным над* $\{i_0, ..., i_{2^{r+1}-1}\}$ *пучка* $\mathcal{G}$ *скрученного над* $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$ *на* X_1, $\Delta_1 := \{(x, x) : x \in X_1\}$ *обозначает диагональ в* X_1^2.

Доказательство. Сплетающее произведение многообразий было описано в деталях в доказательстве теоремы 20 [22]. Рассмотрим $\mathcal{A}_r$ тень для X_1 которая существует, так как $\mathcal{A}_{r+1} = \mathcal{A}_r \oplus \mathcal{A}_r l$, где $l = i_{2^r}$. Для любого подмножества U открытого в X_1 существует группа $\mathcal{G}(U)$, следовательно, $\mathcal{G}(U) \otimes_l \mathcal{G}(U)$ определено благодаря предложению 19 [22], что дает пучок $\mathcal{G}^s$ на X_1. Тогда пучки оберток $\mathcal{S}_{W,X_1,X_{2,b},\mathcal{G}}$ определены над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$, где $b = 1, 2$. Таким образом, утверждение этого следствия вытекает из предложения 19 [22] и теоремы 44, модифицирующей доказательство §34 для сплетающего полного тензорного произведения вместо полного тензорного произведения, так что $\mathbf{P}_{\hat{\gamma},u}(\hat{s}_{0,k+q}) = \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,u_1}(\hat{s}_{0,k+q}) \otimes_l \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2,u_2}(\hat{s}_{0,k+q}) \in G^s$ с $E = E(N, G^s, \pi, \Psi)$, где $G = \mathcal{G}(U)$, $U = U_1 = U_2$, следовательно, $< \mathbf{P}_{\hat{\gamma},u} >_{t,h} = < \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_1,u_1} >_{t,H} \otimes_l < \mathbf{P}_{\hat{\gamma}_2,u_2} >_{t,H}$.

46. Следствие. *Пусть* $X_1 = X_{1,1} \otimes_l X_{1,2}$ *и* $X_2 = X_{2,1} \otimes_l X_{2,2}$ *- это сплетающие произведения, где* X_1, *и* X_2 *являются* H^t_p *и* $H^{t'}_p$ *псевдо-многообразиями соответственно над алгеброй Кэли-Диксона* $\mathcal{A}_{r+1}$, $1 \le r \le 2$. *Тогда пучок оберток* $\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G}^s}$ *скручен над* $\{i_0, ..., i_{2^{r+1}-1}\}$ *и изоморфен сплетающему полному тензорному произведению дважды итерированных пучков оберток* $\mathcal{S}_{W,X_{1,2},X_{2,1},\mathcal{S}_{W,X_{1,1},X_{2,1},\mathcal{G}}} \hat{\otimes}_l \mathcal{S}_{W,X_{1,2},X_{2,2},\mathcal{S}_{W,X_{1,1},X_{2,2},\mathcal{G}}}$, *где* $\mathcal{G}^s$ *есть сплетающее тензорное произведение* $\mathcal{G}^s := \mathcal{G} \otimes_l \mathcal{G}$ *скрученных пучков* $\mathcal{G}$ *над* $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$ *на* X_1.

Доказательство. Мы рассмотрим проекции $\pi_{b,j} : X_b \to X_{b,j}$, где $j, b = 1, 2$. Каждое $\mathcal{A}_{r+1}$ многообразие имеет тень, которое является $\mathcal{A}_r$ многообразием, так как $\mathcal{A}_{r+1} = \mathcal{A}_r \oplus \mathcal{A}_r l$. Если подмножество U открыто в $X_{1,j}$, тогда $\pi^{-1}_{1,j}(U)$ открыто в X_1 и существует группа $\mathcal{G}(\pi^{-1}_{1,j}(U))$, где $j = 1, 2$.

Тогда существуют проекции пучков $\mathcal{G}_j = \pi^{-1}_{1,j}\mathcal{G}$ на $X_{1,j}$ индуцированные посредством $\mathcal{G}$, так что $\mathcal{G}_j(U) := \mathcal{G}(\pi^{-1}_{1,j}(U))$. Мы обозначим $\mathcal{G}_j$ на $X_{1,j}$ также через $\mathcal{G}$, так как $\mathcal{G}_j$ получается из $\mathcal{G}$ взятием специфического подсемейства открытых подмножеств. Для подмножества U_1 открытого в $X_{1,1}$ и подмножества U_2 открытого в $X_{1,2}$ мы возьмем подмножество $U = U_1 \times U_2$ открытое в X_1. Семейство всех таких подмножеств дает базу топологии в X_1.

Согласно определению 43 существует $\hat{\mathcal{G}}(U) \otimes_l \hat{\mathcal{G}}(U) =: \hat{\mathcal{G}}^s(U)$, что индуцирует $\mathcal{G}^s$ на X_1, так что $\hat{\mathcal{G}}^s_x = \hat{\mathcal{G}}_x \otimes_l \hat{\mathcal{G}}_x$ для каждого $x \in X_1$. Поэтому каждый элемент $q + vl$ принадлежит $\hat{\mathcal{G}}^s(U)$ для любых $q, v \in \hat{\mathcal{G}}(U)$. Таким образом, the утверждение данного следствие вытекает из §25, теорем

20 [22] и 44.

47. Мы рассмотрим теперь итерированные пучки оберток $\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G};b}$ итерированных групп оберток $(W^M E)_{b,\infty,H}$ с $b \in \mathbf{N}$ вместо групп оберток для $b=1$, так что их пред-пучок

(1) $F_b(U \times V) = \prod_{s_{0,1},\dots,s_{0,k} \in M \subset U; y_0 \in N \subset V} (W^{M,\{s_{0,q}:q=1,\dots,k\}}E; N, G(U), \mathbf{P})_{b;\infty,H}$,

где $s_{U_2,U_1} : G(U_1) \to G(U_2)$ - это отображение ограничения для любого $U_2 \subset U_1$, так что определена структура параллельного переноса для $M \subset U$, где $\mathcal{G}$ есть пучок на X_1, $G(U) = \mathcal{G}(U)$, псевдо-многообразия X_1 и X_2, и пучок $\mathcal{G}$ принадлежат классу H_p^∞ (смотри также §25).

Следствие. *Существует гомоморфизм итерированных пучков оберток* $\theta : \mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G};a} \otimes \mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G};b} \to \mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G};a+b}$ *для любых* $a, b \in \mathbf{N}$. *Более того, если (квази-) группа* $\mathcal{G}$ *или ассоциативна, или альтернативна, то* θ *или ассоциативен, или альтернативен соответственно.*

Доказательство. Для пред-пучков отображение

(2) $\theta : F_a(U \times V) \otimes F_b(U \times V) \to F_{a+b}(U \times V)$

индуцировано формулой 47(1) и согласно теореме 21 [22]. Тогда θ имеет продолжение на пучок итерированных групп оберток, так как $(\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G};a})_z = ind - \lim F_a(U \times V)$, где прямой предел берется по открытым подмножествам $U \times V$ для точки $z = x \times y \in X_1^k \times X_2$, $x \in X_1^k$, $y \in X_2$, так что $x \subset U$, $y \in V$, подмножество U открыто в X_1, подмножество V открыто в X_2.

Топология индуктивного предела в $(\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G};a})_z$ есть наиболее сильная топология, относительно которой каждое вложение $F_a(U \times V) \hookrightarrow (\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G};a})_z$ непрерывно. Если $f \in (\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G};a})_z$ и $g \in (\mathcal{S}_{W,X_1,X_2,\mathcal{G};b})_z$, то существуют открытые подмножества $U_1 \times V_1$ и $U_2 \times V_2$ такие, что $f \in F_a(U_1 \times V_1)$ и $g \in F_b(U_2 \times V_2)$, следовательно, $f \in F_a(U \times V)$ и $g \in F_b(U \times V)$, где $U = U_1 \cup U_2$ и $V = V_1 \cup V_2$, следовательно, $\theta(f,g) \in F_{a+b}(U \times V)$. Из (2) и определения топологии индуктивного предела вытекает, что отображение θ непрерывно, так как на итерированных группах оберток θ является H_p^∞ дифференцируемым.

Более того, согласно теореме 21 [22] θ или ассоциативно, или альтернативно, если (квази-) группа $\mathcal{G}$ или ассоциативна, или альтернативна.

48. Замечание. Пусть ϕ - это семейство носителей в X, и $\mathcal{B}$ - это пучок на X, где $\mathcal{B}$ может быть скрученным. Пучок $\mathcal{B}$ называется ϕ-ациклическим, если $\mathsf{H}_\phi^b(X;\mathcal{B}) = 0$ для любого $b > 0$.

Пусть $\mathcal{L}^*$ является резольвентой для $\mathcal{B}$. Мы положим $\mathcal{Z}^b := Ker(\mathcal{L}^b \to \mathcal{L}^{b+1}) = Im(\mathcal{L}^{b-1} \to \mathcal{L}^b)$, где $\mathcal{Z}^0 = \mathcal{B}$. Точная последовательность

(1) $e \to \mathcal{Z}^{b-1} \to \mathcal{L}^{b-1} \to \mathcal{Z}^b \to e$

индуцирует точную последовательность

(2) $e \to \Gamma_\phi(\mathcal{Z}^{b-1}) \to \Gamma_\phi(\mathcal{L}^{b-1}) \to \Gamma_\phi(\mathcal{Z}^b) \to \mathsf{H}_\phi^1(X;\mathcal{Z}^{b-1})$.

Поэтому существует мономорфизм

(3) $\mathsf{H}^b(\Gamma_\phi(\mathcal{L}^*)) = \Gamma_\phi(\mathcal{Z}^b)/Im(\Gamma_\phi(\mathcal{L}^{b-1} \to \Gamma_\phi(\mathcal{Z}^b)) \to \mathsf{H}_\phi^1(X;\mathcal{Z}^{b-1})$.

Более того, последовательность $e \to \mathcal{Z}^{b-v} \to \mathcal{L}^{b-v} \to \mathcal{Z}^{b-v+1} \to e$ индуцирует гомоморфизм:

(4) $\mathsf{H}_\phi^{b-1}(X;\mathcal{Z}^{b-v+1}) \to \mathsf{H}_\phi^v(X;\mathcal{Z}^{b-v})$.

Мы определим κ как композицию

(5) $\mathsf{H}^b(\Gamma_\phi(\mathcal{L}^*)) \to \mathsf{H}_\phi^1(X;\mathcal{Z}^{b-1}) \to \mathsf{H}_\phi^2(X;\mathcal{Z}^{b-2}) \to \dots \to \mathsf{H}_\phi^b(X;\mathcal{Z}^0)$.

Если все пучки $\mathcal{L}^b$ являются ϕ-ациклическими, то $(3,4)$ являются изоморфизмами. Мы назовем κ естественным, если из коммутативности диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{L}^* \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{M}^* \end{array}$$

где g есть гомоморфизм резольвент, вытекает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{H}^b(\Gamma_\phi(\mathcal{L}^*) & \xrightarrow{\kappa} & \mathsf{H}_\phi^b(X;\mathcal{B}) \\ \downarrow g^* & & \downarrow f^* \\ \mathsf{H}^b(\Gamma_\phi(\mathcal{M}^*) & \xrightarrow{\kappa} & \mathsf{H}_\phi^b(X;\mathcal{E}) \end{array}.$$

Таким образом, мы получаем такое утверждение.

48.1. Теорема. *Если $\mathcal{L}^*$ есть резольвента пучка $\mathcal{B}$, состоящего из ϕ-ациклических пучков, то для каждого $b \in \mathbf{N}$ естественное отображение*
$\kappa : \mathsf{H}^b(\Gamma_\phi(\mathcal{L}^*) \to \mathsf{H}^b_\phi(X; \mathcal{B})$ *является изоморфизмом.*
В силу последней теоремы, если $g : \mathcal{L}^* \to \mathcal{M}^*$ есть гомоморфизм двух резольвент пучков $\mathcal{B}$ состоящих из ϕ-ациклических пучков, тогда индуцированное отображение $\mathsf{H}^b(\Gamma_\phi(\mathcal{L}^*)) \to \mathsf{H}^b(\Gamma_\phi(\mathcal{M}^*))$ является изоморфизмом.

48.2. Следствие. *Если $e \to \mathcal{L}^0 \to \mathcal{L}^1 \to \mathcal{L}^2 \to ...$ есть точная последовательность ϕ-ациклических пучков, тогда соответствующая последовательность $e \to \Gamma_\phi(\mathcal{L}^0) \to \Gamma_\phi(\mathcal{L}^1) \to \Gamma_\phi(\mathcal{L}^2) \to ...$ точна.*

Доказательство. В силу теоремы 48.1 $\mathsf{H}^b(\Gamma_\phi(\mathcal{L}^*)) = \mathsf{H}^b_\phi(X; e)$. С другой стороны, $\mathsf{Y}^n_\phi(X; e) = e$, так как $\mathcal{Y}^0(X; e) = e$ и, следовательно, $\mathcal{Y}^n(X; e) = e$ для любого n. Итак, $\mathsf{H}^b(\Gamma_\phi(\mathcal{L}^*)) = e$ для любого b.

49. Дифференциальные формы и скрученные когомологии над октонионами. Решетчатое разрешение существует для всякого пучка или комплекса пучков. Рассмотрим дифференциальные формы на N. В локальных координатах мы запишем дифференциальную k-форму как

(1) $w = \sum_J f_J(z) dx_{b_1,j_1} \wedge dx_{b_2,j_2} \wedge ... \wedge dx_{b_k,j_k}$,

где $f_J : N \to \mathcal{A}_r$, $z = (z_1, z_2, ...)$ - это локальные координаты в N, $z_b = x_{b,0} i_0 + x_{b,1} i_1 + ... + x_{b,2^r-1} i_{2^r-1}$, где $z_b \in \mathcal{A}_r$, $x_{b,j} \in \mathbf{R}$ для любого b и всяких $j = 0, 1, ..., 2^r - 1$, $J = (b_1, j_1; b_2, j_2; ...; b_k, j_k)$. Для пучка $\mathcal{S}^k_{N,\mathcal{A}_r}$ ростков $\mathcal{A}_r$ значных k-форм на N имеется решетчатое разрешение:

(2) $0 \to \mathcal{S}^k_{N,\mathcal{A}_r} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{S}^k_{N,A\mathcal{A}_r} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{S}^k_{N,AB\mathcal{A}_r} \xrightarrow{\sigma} ...$,

где $\mathcal{S}^k_{N,AB^m\mathcal{A}_r}$ обозначает пучок ростков $AB^m\mathcal{A}_r$ значных k-форм на N.

Обозначим через $\mathbf{Z}(q, \mathcal{C}_r)$ группу аналогичную $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)$ с $u \in \mathcal{C}_r$ замененным на u^q, где u^q рассматривается эквивалентным с $(-u)^q$, $q \in \mathbf{N}$. Поэтому экспоненциальная последовательность

(3) $0 \to \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N \xrightarrow{\eta} \mathsf{C}^\infty(N, \mathcal{A}_r) \xrightarrow{\exp} \mathsf{C}^\infty(N, \mathcal{A}^*_r) \to 0$

может рассматриваться как квази-изоморфизм:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N & \xrightarrow{\eta} & \mathsf{C}^\infty(N, \mathcal{A}_r) \\ \downarrow & & \downarrow \exp \\ 0 & \longrightarrow & \mathsf{C}^\infty(N, \mathcal{A}^*_r) \end{array}$$

между комплексом $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)^\infty_D : \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N \to \mathsf{C}^\infty(N, \mathcal{A}_r)$ и пучком $\mathsf{C}^\infty(N, \mathcal{A}^*_r)$ ростков C^∞ функций из N в $\mathcal{A}^*_r$ помещенных с первой степени, что дает $\mathsf{C}^\infty(N, \mathcal{A}^*_r)[-1]$, где $\eta(z) = 2\pi z$ для любого z и $\exp(0) = 1$ (смотри также §19), $\mathcal{A}_r$ рассматривается как аддитивная группа $(\mathcal{A}_r, +)$, причем $\mathcal{A}^*_r$ есть мультипликативная группа $(\mathcal{A}^*_r, \times)$. Более общим образом это дает квази-изоморфизм:

(4) $\mathbf{Z}(1, \mathcal{C}_r)_N \longrightarrow \mathsf{C}^\infty(N, \mathcal{A}_r) \xrightarrow{d} \mathcal{S}^1_{N,\mathcal{A}_r} \xrightarrow{d} ... \xrightarrow{d} \mathcal{S}^{q-1}_{N,\mathcal{A}_r}$ и

$0 \longrightarrow \mathsf{C}^\infty(N, \mathcal{A}^*_r) \xrightarrow{dLn} \mathcal{S}^1_{N,\mathcal{A}_r} \xrightarrow{d} ... \xrightarrow{d} \mathcal{S}^{q-1}_{N,\mathcal{A}_r}$

с вертикальными гомоморфизмами $\mathbf{Z}(1, \mathcal{C}_r)_N \to 0$, $\mathsf{C}^\infty(N, \mathcal{A}_r) \xrightarrow{e} \mathsf{C}^\infty(N, \mathcal{A}^*_r)$, $\mathcal{S}^1_{N,\mathcal{A}_r} \xrightarrow{id} \mathcal{S}^1_{N,\mathcal{A}_r}, ..., \mathcal{S}^{q-1}_{N,\mathcal{A}_r} \xrightarrow{id} \mathcal{S}^{q-1}_{N,\mathcal{A}_r}$ при $2 \le q \in \mathbf{N}$, где $e(f) := \exp(f)$ между степенью q гладких скрученных комплексов

(5) $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)^\infty_D : \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)_N \to \mathsf{C}^\infty(N, \mathcal{A}_r) \xrightarrow{d} \mathcal{S}^1_{N,\mathcal{A}_r} \xrightarrow{d} ... \xrightarrow{d} \mathcal{S}^{q-1}_{N,\mathcal{A}_r}$

и комплекс $\mathcal{S}^{<q}(N, \mathcal{A}_r)(dLn)[-1]$, где

(6) $\mathcal{S}^{<q}(N, \mathcal{A}_r)(dLn) : \mathsf{C}^\infty(N, \mathcal{A}^*_r) \xrightarrow{dLn} \mathcal{S}^1_{N,\mathcal{A}_r} \xrightarrow{d} ... \xrightarrow{d} \mathcal{S}^{q-1}_{N,\mathcal{A}_r}$.

Гиперкогомология ${}_h\mathsf{H}^q(N, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)^\infty_D)$ of $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)^\infty_D$ скручена и некоммутативна при $r = 2$, и неассоциативна при $r = 3$. Она является гладкой когомологией Делинье на N, так как $\mathcal{A}_2 = \mathbf{H} = \mathbf{C} \oplus i_2\mathbf{C}$ и $\mathcal{A}_3 = \mathbf{O} = \mathbf{C} \oplus i_2\mathbf{C} \oplus i_4\mathbf{C} \oplus i_6\mathbf{C}$ - это алгебры кватернионов и октонионов над вещественным полем $\mathbf{R}$ с соответствующими скрученными структурами вызывающими скрученный структуры для AG и BG как это было описано выше. Таким образом, гиперкогомологии имеют индуцированные скрученные структуры. Мы также имеем, что $\mathcal{S}^{<q}(N, \mathcal{A}_r)(dLn))$ является усечением ациклического разрешения (6) постоянного пучка $(\mathcal{A}^*_r)_N$. Поэтому квази-изоморфизм (5) влечет

(7) ${}_h\mathsf{H}^b(N, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)^\infty_D) \cong {}_h\mathsf{H}^{b-1}(\mathcal{S}^{<q}(N, \mathcal{A}_r)(dLn))$ для всяких b и q.

Для размерности в смысле покрытий $b = dimN$ (смотри [51]) имеются изоморфизмы:

(8) ${}_h\mathsf{H}^b(\mathcal{S}^{<b+1}(N, \mathcal{A}_r)(dLn)) \xrightarrow{e_N} {}_h\mathsf{H}^b(N, \mathcal{A}^*_r) \xrightarrow{t^b_N} \mathcal{A}^*_r$,
композиция которых является изоморфизмом:

(9) $\mathsf{T}^b_N : {}_h\mathsf{H}^b(\mathcal{S}^{<b+1}(N, \mathcal{A}_r)(dLn)) \longrightarrow \mathcal{A}^*_r$.
Полезна также короткая точная последовательность комплексов пучков:

(10) $0 \to (\mathcal{A}^*_r)_N \to \mathsf{C}^\infty(N, \mathcal{A}^*_r) \xrightarrow{dLn} \mathcal{S}^1(N, \mathcal{A}_r) \xrightarrow{d} ... \xrightarrow{d} \mathcal{S}^q(N, \mathcal{A}_r) \xrightarrow{d} \mathcal{S}^{q+1,cl}(N, \mathcal{A}_r) \to 0$, где $\mathcal{S}^{q+1,cl}(N, \mathcal{A}_r)$ обозначает пучок ростков замкнутых $\mathcal{A}_r$ значных $q+1$ форм на N.

50. Замечание. Возьмем открытое покрытие $\mathcal{V} := \{V_j : j \in J\}$ для H^∞ многообразия N и обозначим через $\mathcal{T}(E) := \{g_j : g_j \in \Gamma(V_j, E), j \in J\}$ семейство локальных тривиализаций для E, где J является множеством. Если $V_k \cap V_j \ne \emptyset$, тогда фактор $g_{k,j} := g_k(1/g_j)$ является H^∞ гладкой $\mathcal{A}^*_r$-значной функцией на $V_k \cap V_j$, где $1 \le r \le 3$. Если $1 \le r \le 2$, то алгебра $\mathcal{A}_r$ ассоциативна и $g_{k,j}g_{j,l} = g_{k,l}$ на $V_k \cap V_j \cap V_l$, когда последнее множество непустое.

При $r = 3$ алгебра октонионов $\mathbf{O}$ является лишь альтернативной и в общем $g_{k,j}g_{j,l}$ может отличаться от $g_{k,l}$. Уже для кватернионов и, более того, для октонионов $Ln(xy)$ может отличаться от $Ln(x) + Ln(y)$ при $x, y \in \mathcal{A}_r$ с $2 \le r \le 3$, потому что алгебры Кэли-Диксона некоммутативны.

В силу предложения 3.2 [27, 28] для любых $x, y \in \mathcal{A}_r$ существует $z \in \mathcal{A}_r$ такое, что

(1) $e^x e^y = e^z = e^{a+b} e^{K(M,N)}$, где $a = Re(x)$, $b = Re(y)$, $M = x - Re(x) =: Im(x)$, $N = Im(y)$, $K = Im(z)$. Как обычно мы обозначим через ln функцию натурального логарифма в коммутативном случае $0 \le r \le 1$, а Ln обозначает функцию натурального логарифма над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ при $2 \le r$ (смотри параграф 3 в [27, 28] и [32]). Логарифмическая функция определена на области $\mathcal{A}_r \setminus \{0\}$ для ненулевых чисел Кэли-Диксона и имеет некоммутативный аналог римановой поверхности, так что exp и Ln являются $\mathcal{A}_r$ голоморфными. Для любого числа Кэли-Диксона v из мультипликативной группы $\mathcal{A}^*_r = \mathcal{A}_r \setminus \{0\}$ существует число $x \in \mathcal{A}_r$ такое, что $e^x = v$. Тогда

(2) $Ln(e^x e^y) = Ln(e^z) = a + b + K(M, N)$, где

(3) $K(M, N) - M - N =: P(M, N)$ может быть отлично от нуля. Мы выразим вещественную часть в виде

(4) $Re(z) = (z + (2^r - 2)^{-1}\{-z + \sum_{j=1}^{2^r-1} i_j(zi^*_j)\})/2$, тогда

(5) $Im(z) = z - Re(z) = (z - (2^r - 2)^{-1}\{-z + \sum_{j=1}^{2^r-1} i_j(zi^*_j)\})/2$
и зафиксируем эти z-представления, с которыми $M = M(x)$, $N = N(y)$ и $P(M, N)$ являются локально аналитическими функциями по x и y. Мы положим

(6) $Ln(f_k) = w_k$ и

(7) $Ln(g_{k,j}) = w_k - w_j + \nu_{k,j}$ и

(8) $Ln(g_{k,l}) = Ln(g_{k,j}) + Ln(g_{j,l}) + \eta_{k,j,l}$,
так что w_k и $\nu_{k,j}$ и $\eta_{k,j,l}$ являются H^∞ дифференциальными 1-формами. Тогда из $(6-8)$ вытекает, что

(9) $w_k - w_l + \nu_{k,l} = w_k - w_j + \nu_{k,j} + w_j - w_l + \nu_{j,l} + \eta_{k,j,k}$ и, следовательно,

(10) $\eta_{k,j,l} = \nu_{k,l} - \nu_{k,j} - \nu_{j,l}$.
В общем случае $\eta_{k,j,l}$ может быть отлично от нуля из-за некоммутативности и неассоциативности.

В силу альтернативности алгебры октонионов $\mathbf{O}$ тождества $e^M e^N = e^K$, $e^M = e^K e^{-N}$, $e^N = e^{-M} e^K$ и $e^{-K} = e^{-N} e^{-M}$ эквивалентны, что приводит к тождествам:

(11) $M = K(K(M, N), -N)$, $N = K(-M, K(M, N))$, $K(M, N) = -K(-N, -M)$,
где M, N, K являются чисто мнимыми октонионами, более того, $K(M, 0) = M$, $K(0, N) = N$, так как $e^0 = 1$.

Пусть $E(N, \mathcal{A}^*_r, \pi, \Psi)$ является H^∞ главным $\mathcal{A}^*_r$-расслоением с переходными функциями $\{g_{k,j} : V_k \cap V_j \to \mathcal{A}^*_r : k, j\}$, и мы рассмотрим семейство $\{w_k, \nu_{k,j}, \eta_{k,j,l} : k, j, l\}$ состоящее из 1-форм связанных уравнениями $(6-8)$, то есть $w_j \in \Gamma(V_j, \mathcal{S}^1_{N,\mathcal{A}_r})$, $\nu_{k,j} \in \Gamma(V_k \cap V_j, \mathcal{S}^1_{N,\mathcal{A}_r})$ при $V_k \cap V_j \ne \emptyset$, $\eta_{k,j,l} \in \Gamma(V_k \cap V_j \cap V_l, \mathcal{S}^1_{N,\mathcal{A}_r})$ при $V_k \cap V_j \cap V_l \ne \emptyset$, где $k, j, l \in J$.

Возьмем C^∞ разбиение единицы $\{f_j : j \in J\}$ подчиненное покрытию $\mathcal{V}$. Тогда

(12) $-w(x) = |f_{j_0}, f_{j_1}, ..., f_{j_n}, -w_{j_0}(x), -w_{j_1}(x), ..., -w_{j_n}(x)|$ и

(13) $-\nu(x) = |f_{j_0}f_{k_0}, f_{j_1}f_{k_1}, ..., f_{j_n}f_{k_n}, -\nu_{j_0,k_0}(x), -\nu_{j_1,k_1}(x), ..., -\nu_{j_n,k_n}(x)|$ и
(14) $-\eta(x) = |f_{j_0}f_{k_0}f_{l_0}, f_{j_1}f_{k_1}f_{l_1}, ..., f_{j_n}f_{k_n}f_{l_n}, -\eta_{j_0,k_0,l_0}(x), -\nu_{j_1,k_1,l_1}(x), ..., -\nu_{j_n,k_n,l_n}(x)|$,
где $w_j(x)$ и $\nu_{j,k}(x)$, и $\eta_{j,k,l}(x)$ обозначает ограничение w_j и $\nu_{j,k}$, и $\eta_{j,k,l}$ на T_xN, так что $w_j(x)$ и $\nu_{j,k}(x)$, и $\eta_{k,j,l}(x)$ являются $A\mathcal{A}_r$-значными 1-формами на N,

(15) $\pi_*(-w(x)) = |f_{j_0}, f_{j_1}(x), ..., f_{j_n}(x); [w_{j_0}(x) - w_{j_1}(x) + \nu_{j_0,j_1}(x)|...|w_{j_{n-1}}(x) - w_{j_n}(x) + \nu_{j_{n-1},j_n}]|$,
где $\pi : E\mathcal{A}_r \to B\mathcal{A}_r$ - это стандартная проекция.

Главное G-расслоение $E(N, G, \pi, \Psi)$ является ограниченным универсальным расслоением $AG \to BG$ по классифицирующему отображению $g_{E(N,G,\pi,\Psi)} : N \to BG$. В терминах функций перехода имеется равенство

(16) $g_{E(N,\mathcal{A}_r^*,\pi,\Psi)} = |f_{j_0}(x), f_{j_1}(x), ..., f_{j_n}(x); [g_{j_0,j_1}(x)|g_{j_1,j_2}(x)|...|g_{j_{n-1},j_n}(x)]|$. Поэтому

(17) $\pi_*(w) + dLn(g_{E(N,\mathcal{A}_r^*,\pi,\Psi)}) = 0$,
где для любой дифференцируемой функции $g : U \to B\mathcal{A}_r^*$ мы имеем

$g(x) = |f_0(x), f_1(x), ..., f_n(x); [g_1(x)|...|g_n(x)]|$. При этом

(18) $dLn(g(x)) := |f_0(x), f_1(x), ..., f_n(x); [dLn(g_1(x))|...|dLn(g_n(x))]|$.
Мы рассмотрим тотальный комплекс $(Tot^*(B_N^{*,<p}), D)$ of $B_N^{*,<p}$. Тогда $(b-1)$-коцикл в тотальном комплексе является последовательностью $(g, w_1, ..., w_{b-1})$, где $g \in H^\infty(N, AB^{b-1}\mathcal{A}_r^*)$ и $w_j \in S^j_{AB^{b-1-j}\mathcal{A}_r}(N)$ удовлетворяющие условию:

$\sigma(g) = 0$ означающим, что g есть дифференцируемое отображение из N в $B^{b-1}\mathcal{A}_r$;

$\sigma(w_1) + dLn(g) = 0$ означает, что w_1 является связностью на дифференцируемом главном $B^{b-2}\mathcal{A}_r^*$-расслоении над N индуцированное из g;

$\sigma(w_{j+1}) + (-1)^j dw_j = 0$ служит определением $(j+1)$-связности на дифференцируемом главном $B^{b-2}\mathcal{A}_r^*$-расслоении $E \to B$ ассоциированном с отображением g при $1 \le j \le b-2$. Тогда последовательность $(g, w_1, ..., w_j)$ называется j-связностью решетчатого коцикла.

Существует отношение эквивалентности в группе дифференцируемых главных $B^{b-2}\mathcal{A}_r^*$-расслоений с $(b-1)$-связностью, которая индуцирована отношением эквивалентности когомологий в комплексе $(Tot^*(B_N^{*,<b}), D)$. Таким образом, $\mathsf{H}^{b-1}(Tot^*(B^{*,<b}), D)$ можно отождествить с группой $\mathsf{E}(N, B^{b-2}\mathcal{A}_r^*, \nabla^{b-1})$ классов эквивалентности дифференцируемых главных $B^{b-2}\mathcal{A}_r^*$-расслоений с $(b-1)$-связностями.

Сопоставление $(g, w_1, w_2, ..., w_{b-1}) \mapsto (-1)^{b-1}dw_{b-1}$ индуцирует гомоморфизм $K : \mathsf{E}(N, B^{b-2}\mathcal{A}_r^*, \nabla^{b-1}) \to S^b_{\mathcal{A}_r}(N)$ называемый кривизной b-связности $(g, w_1, w_2, ..., w_{b-1})$. Ядро $ker(K)$ изоморфно группе $\mathsf{E}(N, B^{b-2}\mathcal{A}_r^*, \nabla^{flat})$ классов изоморфизмов дифференцируемых главных $B^{b-2}\mathcal{A}_r^*$-расслоений с плоскими связностями.

51. Кривизна голономии. Если $v, w \in T_0\mathbf{R}^n$, то мы положим

(1) $\gamma_{v,w}(u) = 4uv$ при $0 \le u \le 1/4$, $\gamma_{v,w}(u) = v + 4(u - 1/4)w$ при $1/4 \le u \le 1/2$, $\gamma_{v,w}(u) = w - 4(u - 3/4)v$ для $1/2 \le u \le 3/4$, $\gamma_{v,w}(u) = 4(1-u)w$ для $3/4 \le u \le 1$ и $\gamma^s_{v,w}(u) := \gamma_{sv,sw}(u)$, где $0 \le u, s \le 1$. Для последовательности векторов $\mathbf{w} = (w_0, w_1, ..., w_q)$ в $T_0\mathbf{R}^n$ с $q \in \mathbf{N}$ мы определим $(q+1)$-мерный параллелепипед $p[w_0, ..., w_q]$ в евклидовом пространстве $\mathbf{R^n}$ с $q < n$, если $w_0, ..., w_q$ линейно независимы. Тогда мы определим $\gamma_{w_0,w_1,w_2}(u_1, u_2) := \gamma_{\gamma_{w_0,w_1}(u_1),w_2}(u_2)$ и по индукции

(2) $\gamma_{w_0,...,w_q}(u_1, ..., u_q) = \gamma_{\gamma_{w_0,...,w_{q-1}}(u_1,...,u_{q-1}),w_q}(u_q)$ и $\gamma^s_{\mathbf{w}}(u_1, ..., u_q) := \gamma_{s\mathbf{w}}(u_1, ..., u_q)$, где $0 \le u_1, ..., u_q, s \le 1$. Это дает естественную параметризацию параллелепипеда $p[w_0, ..., w_q]$ и отображение $\gamma_{\mathbf{w}} : \partial I^{q+1} \to \mathbf{R}^n$, которое непрерывно и кусочно C^∞. Обозначим через $e_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ стандартный ортонормированный базис в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ с 1 на j-м месте. Мы положим $Ln(diag(a_1, ..., a_k)) := diag(Ln(a_1), ..., Ln(a_k))$, где Ln - это главная ветвь логарифмической функции с $Ln(1) = 0$, и $diag(a_1, ..., a_n)$ обозначает диагональную матрицу с элементами $a_1, ..., a_k \in \mathcal{A}_r^*$.

Если h есть $(\mathcal{A}_r^*)^k$-значная C^n голономия или гомоморфизм для групп обертоκ $(W^ME)_{\infty,H}$ с $\hat{M}$ являющимся H_p^∞ диффеоморфным с ∂I^{m+1} и $\psi = (y_1, ..., y_n)$ - это система координат центрированная в точке y, $\psi : V \to \mathbf{R}^n$, V - это открытая окрестность точки y в N, тогда кривизна для h в точке y является q-формой

(3) $K_y := \sum_{1 \le j_1 < ... < j_q \le n} K_{j_1,j_2,...,j_q}(y) dy_{j_1} \wedge dy_{j_2} \wedge ... \wedge dy_{j_q} \in \Lambda^q T_y^* N$, где

(4) $K_{j_1,...,j_q}(y) = (-1)^q \lim_{s\to 0} Ln[h(\psi^{-1}(\gamma^s_{e_{j_1},...,e_{j_q}}))]s^{-q-1}$,
где $m \geq q$.

Рассмотрим инверсию $(w_j, w_{j+1}) \mapsto (w_{j+1}, w_j)$. В силу теоремы 2 [22] при $\hat{M}$ являющимся H^∞_p диффеоморфным с ∂I^{m+1} используя итерированные петли и отображение $u_j \mapsto (1-u_j)$ мы получим, что

(5) $K_y(w_{g(1)}, ..., w_{g(q+1)}) = (-1)^{|g|} K_y(w_1, ..., w_{q+1})$,
где $g \in S_{q+1}$, S_q обозначает симметрическую группу множества $\{1, ..., q\}$, $|g| = 1$ для нечетного g, причем $|g| = 2$ для четной транспозиции g.

52. Замечание. Рассмотрим H^∞ многообразие N и псевдо-многообразие X. Отображение $\gamma : X \to N$ называется кусочно C^∞ или H^∞ гладким, если оно непрерывно и ограничение γ на каждый симплекс наибольшей размерности в X является C^∞ или H^∞ отображением. Кусочно гладкое отображение $\gamma : X \to N$ называется ориентированным сингулярным q-циклом псевдо-многообразия, если X - это ориентированный q-цикл псевдо-многообразия. Обозначим через $\mathsf{Z}^\psi_q(N) := \mathsf{Z}^\psi_q(X, N)$ группу ориентированных сингулярных q-циклов псевдо-многообразия в N.

Если существует ориентированное псевдо-многообразие с границей $(Y, \partial Y)$ с псевдо-диффеоморфизмом $\eta : \partial Y \to X$ и кусочно гладким отображением $\zeta : Y \to N$ таким, что $\gamma = \zeta|_{\partial Y} \circ \eta^{-1}$, где γ есть ориентированный сингулярный q-цикл псевдо-многообразия, тогда γ называется ориентированной сингулярной q-границей псевдо-многообразия в N. Обозначим через $\mathsf{B}^\psi_q(N) := \mathsf{B}^\psi_q(X, N)$ группу ориентированных сингулярных q-границ псевдо-многообразия в N.

Два ориентированных q-цикла псевдо-многообразия $\gamma_j : X_j \to N$, $j = 1, 2$, гомологичны, если существует ориентированное $(q+1)$-мерное псевдо-многообразие с границей $(Y, \partial Y)$ и кусочно дифференцируемое отображение $\zeta : Y \to N$ такое, что ∂Y изоморфна с $X_1 \cup X_2$, и $\zeta|_{X_j} = \gamma_j$ с точностью до изоморфизма $\partial Y \cong X_1 \cup X_2$ при $j = 1, 2$.

Тогда существует группа $\mathsf{H}^\psi_q(N) = \mathsf{Z}^\psi_q(N)/\mathsf{B}^\psi_q(N)$ гомологичных классов ориентированных сингулярных q-циклов псевдо-многообразий в N, где групповая структура дается дизъюнктным объединением.

Мы рассмотрим скрученный $\mathcal{A}_r$ аналог функтора Чигера-Симонса дифференцируемых групп состоящий из пар $(h, \alpha) \in Hom(\mathsf{Z}^\psi_q(N), \mathcal{A}^*_r) \times \mathsf{S}^{q+1}_{\mathcal{A}_r}(N)_0$ удовлетворяющих условию

(CS) $h(\partial\eta) = \exp((-1)^q \int_\eta \alpha)$ для любого $\eta \in \mathsf{S}_{q+1}(N)$,

где $\mathsf{S}_q(N)$ - это группа гладкий сингулярных q-цепей в N, $\mathsf{S}^{q+1}_{\mathcal{A}_r}(N)_0$ обозначает группу замкнутых дифференциальных $\mathcal{A}_r$-значных q-форм на N с $2\pi\mathbf{Z}(\mathsf{C}_r)$-целыми периодами принадлежащими $\mathcal{I}_r = \{z \in \mathcal{A}_r : Re(z) = 0\}$, $1 \leq r \leq 3$. Группа Чигера-Симонса $\hat{\mathsf{H}}^q_\psi(N, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r))$ степени q дифференцируемых характеров на N состоит из гомоморфизмов h описанных выше.

Предположим, что X является H^∞_p псевдо-многообразием. Мы построим факторы $\mathsf{Z}^{\tilde\psi}_q(N)$ и $\mathsf{B}^{\tilde\psi}_q(N)$ как факторы для $\mathsf{Z}^\psi_q(N)$ и $\mathsf{B}^\psi_q(N)$ по отношению эквивалентности:

$(E1)$ если $\gamma : X \to N$ - это ориентированное сингулярное q-цикл псевдо-многообразия, и ξ есть гомеоморфизм на X, так что его ограничение на все симплексы наибольшей размерности вписанной в триангуляцию T для X является H^∞_p диффеоморфизмом, тогда $\gamma \sim \gamma \circ \xi$ и как класс эквивалентных элементов мы возьмем $< \gamma >_{\infty,H}$, что является замыканием относительно H^∞_p-равномерности семейства всех таких $\gamma \circ \xi$. В силу теорем Морса и Сарда (смотри §§II.2.10, 11 [6]), если $\delta \in < \gamma >_{\infty,p}$, то δ гомологично γ. Мы положим $\mathsf{H}^{\tilde\psi}_q(N) := \mathsf{Z}^{\tilde\psi}_q(N)/\mathsf{B}^{\tilde\psi}_q(N)$, тогда $\mathsf{H}^{\tilde\psi}_q(N) \cong \mathsf{H}^\psi_q(N)$ изоморфны.

53. Высшие скрученные голономии. Предположим, что $E(N, B\mathcal{A}^*_r, \pi, \Psi)$ - это дифференцируемое главное $B\mathcal{A}^*_r$-расслоение с классифицирующим отображением $g : N \to B^q\mathcal{A}^*_r$ и q-связностью $(g, w_1, ..., w_q)$, где $2 \leq r \leq 3$. Мы рассмотрим q-мерное ориентированное замкнутое псевдо-многообразие X над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ и отображение $\gamma : X \to N$ класса гладкости H^∞. Мы имеем, что $B^q\mathcal{A}^*_r$ является q-связным и $g \circ \gamma : X \to B^q\mathcal{A}^*_r$ гомотопно постоянному отображению. Это влечет существование дифференцируемого отображения $\overline{g \circ \gamma} : X \to AB^{q-1}\mathcal{A}^*_r$ с $\pi \circ \overline{g \circ \gamma} = g \circ \gamma$, где $\pi : AB^{q-1}\mathcal{A}^*_r \to B^q\mathcal{A}^*_r$. С другой стороны,

$\pi_*(\gamma^* w_1 + dLn\overline{g \circ \gamma}) = \pi_*\gamma^* w_1 + dLn(g \circ \gamma) = \gamma^*(\pi_* w_1 + dLn(g)) = 0$, тогда $(\gamma^* w_1 + dLn(\overline{g \circ \gamma})$ является $B\mathcal{A}_r$-значной 1-формой на X.

Проекция $\pi : A\mathcal{A}_r \to B\mathcal{A}_r$ индуцирует сюръективный гомоморфизм $\pi_* : \mathsf{S}^j_{A\mathcal{A}_r}(X) \to \mathsf{S}^j_{B\mathcal{A}_r}(X)$ для любого $j = 1, 2, \ldots$. Поэтому существует $A\mathcal{A}_r$-значная 1-форма $\bar{w}_j \in \mathsf{S}^j_{A\mathcal{A}_r}(X)$ удовлетворяющая уравнению:

$\pi_*\bar{w}_1 = \gamma^* w_1 + dLn(\overline{g \circ \gamma})$. Поскольку $\sigma(\gamma^* w_2 - d\bar{w}_1) = \sigma\gamma^* w_2 - d\gamma^* w_1 = \gamma^*(\sigma w_2 - dw_1) = 0$, то $\gamma^* w_2 - dw_1$ является $\mathcal{A}_r$-значной 2-формой на X.

По индукции мы получаем, что существует дифференциальная j-форма $\bar{w}_j \in \mathsf{S}^j_{A\mathcal{A}_r}(X)$ такая, что $\pi_*\bar{w}_j = \gamma^* w_j + (-1)^{j-1} d\gamma^* w_{j-1}$ для любого $j = 2, ..., q$. Мы имеем, что $\sigma(\gamma^* w_j + (-1)^{j-1} d\bar{w}_{j-1}) = \sigma\gamma^* w_j + (-1)^{j-1} d\gamma^* w_{j-1} = \gamma^*(\sigma w_j + (-1)^{j-1} dw_{j-1}) = 0$, следовательно, $\gamma^* w_j + (-1)^{j-1} d\bar{w}_{j-1}$ есть $\mathcal{A}_r$-значная j-форма на X.

Голономия q-связности $(g, w_1, ..., w_q)$ вдоль $\gamma : X \to N$ дается формулой

$h(\gamma) = \exp(\int_X (\gamma^* w_q + (-1)^{q-1} d\bar{w}_{q-1}))$.

Если имеется некоторое поднятие $\hat{w}_{j-1}$, то $\hat{w}_{j-1} = \bar{w}_{j-1} + v_{j-1}$, где v_{j-1} является $\mathcal{A}_r$-значной $(j-1)$-формой на X. Поэтому $\int_X (\gamma^* w_j + (-1)^{j-1} d\hat{w}_{j-1}) = \int_X (\gamma^* w_j + (-1)^{j-1} d\bar{w}_{j-1}) + (-1)^{j-1} \int_X dv_{j-1} = \int_X (\gamma^* w_j + (-1)^{j-1} d\bar{w}_{j-1})$ в рассматриваемом здесь случае X с $\partial X = 0$.

Эта голономия может быть обобщена абстрактным образом для класса эквивалентности η данной q-связности $(g, w_1, ..., w_q)$ вдоль сингулярного ориентированного псевдо-многообразия X размерности q с H^∞ отображением $\gamma : X \to N$ такого, что $h^\eta(\gamma) \in \mathcal{A}_r$. Мы зададим $\mathsf{H}^{q+1}(X, \mathbf{Z}(\mathsf{C}_r)(q+1)^\infty_D) := \mathsf{H}^{q+1}(X \setminus S_X, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)(q+1)^\infty_D)$, где S_X - это сингулярность в X. Если размерность X равна q, то $\mathsf{H}^{q+1}(X, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)(q+1)^\infty_D) \cong \mathsf{H}^q(X, \mathcal{A}_r^*)$. Поскольку $codim(S_X) \geq 2$, то $\mathsf{H}^q(X, \mathcal{A}_r^*)$ имеет фундаментальный класс, что индуцирует интегрирование вдоль фундаментального изоморфного класса и $\mathsf{H}^q(X, \mathcal{A}_r^*) \cong \mathcal{A}_r^*$. Таким образом, мы получим изоморфизм $T^q_X : \mathsf{H}^{q+1}(X, \mathbf{Z}(\mathsf{C}_r)(q+1)^\infty_D) \to \mathcal{A}_r^*$. Поэтому $h^\eta(\gamma) = T^q_X(\gamma^*(\eta))$ является голономией q-связности соответствующей элементу $\eta \in \mathsf{H}^{q+1}(N, \mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)(q+1)^\infty_D)$ вдоль $\gamma : X \to N$ для сингулярного ориентированного $\mathcal{A}_r$ псевдо-многообразия $\phi : X \to N$ вещественной размерности q, где $2 \leq r \leq 3$.

54. Скрученные когомологии. Рассмотрим скрученный пучок $\mathcal{B}$ над $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$. Тогда скрученный аналог (или изоморфной Чеха) когомологии Александера-Спаньера с коэффициентами в $\mathcal{B}$ и носителями в семействе ϕ таков: ${}_{AS}\mathsf{H}^*_\phi(X; \mathcal{B}) = \mathsf{H}^*(\Gamma_\phi(\mathcal{S}^* \otimes \mathcal{B}))$.

Мы возьмем элемент $\eta \in {}_{AS}\mathsf{H}^q(\mathcal{S}^{<q+1}_{N,\mathcal{A}_r}(dLn)) := {}_{AS}\mathsf{H}^q(X, \mathcal{S}^{<q+1}_{N,\mathcal{A}_r}(dLn))$, где N имеет размерность q. Запишем это так: $\eta = (g_{\mathbf{j}_q}, w_{\mathbf{j}_{q-1}}, ..., w_{\mathbf{j}_0})$, где $\mathbf{j}_b := (j_0, ..., j_b)$ - это мульти-индекс. $\mathcal{A}_r^*$-значный q-коцикл $g_{\mathbf{j}_q}$ когомологичен нулю, так как N имеет размерность q. Поэтому $\mathsf{H}^q(\mathsf{C}^\infty_N(\mathcal{A}_r^*)) \cong \mathsf{H}^{q+1}(N, \mathbf{Z}(\mathsf{C}_r)) \cong 0$. Если $\bar{g}_{\mathbf{j}_{q-1}}$ является $(q-1)$-коцепью такой, что $\delta(\bar{g}_{\mathbf{j}_{q-1}}) = g^{-1}_{\mathbf{j}_q}$, тогда $(g_{\mathbf{j}_q}\delta(\bar{g}_{\mathbf{j}_{q-1}}), dLn(\bar{g}_{\mathbf{j}_{q-1}}) + w_{\mathbf{j}_{q-1}}, ..., w_{\mathbf{j}_0}) = (1, dLn(\bar{g}_{\mathbf{j}_{q-1}}) + w_{\mathbf{j}_{q-1}}, ..., w_{\mathbf{j}_0}) =: \eta'$. Обозначим через D дифференциал в скрученном комплексе в $\mathcal{S}^{<q+1}_{N,\mathcal{A}_r}(dLn)$, тогда условие коцикла $D(\eta') = 0$ приводит к $\delta(dLn(\bar{g}_{\mathbf{j}_{q-1}}) + w_{\mathbf{j}_{q-1}}) = 0$. Поскольку $\mathcal{S}^1_{N,\mathcal{A}_r}$ есть ациклический пучок, тогда его скрученный комплекс точен и неизбежно существует $(q-2)$-коцикл $\bar{w}_{\mathbf{j}_{q-2}}$ для которого $\delta(\bar{w}_{\mathbf{j}_{q-2}}) = dLn(\bar{g}_{\mathbf{j}_{q-1}}) + w_{\mathbf{j}_{q-1}}$. Тогда $D(1, -\bar{w}_{\mathbf{j}_{q-2}}, 0, ..., 0) + \eta'$ когомологичен коциклу имеющему вид $(1, 0, w'_{\mathbf{j}_{q-1}}, ..., w_{\mathbf{j}_0})$. Продолжение этой процедуры дает $(q-1)$-коцепь $\bar{\eta} = (\bar{g}_{\mathbf{j}_{q-1}}, \bar{w}_{\mathbf{j}_{q-2}}, ..., \bar{w}_{\mathbf{j}_0})$ скрученного комплекса $\mathcal{S}^{<q+1}_{N,\mathcal{A}_r}(dLn)$, так что $\eta + D(\bar{\eta}) = (1, 0, ..., 0, \hat{w}_{\mathbf{j}_0})$. Из условия коцикла $D(\eta + D(\bar{\eta})) = 0$ вытекает, что $\hat{w}_{\mathbf{j}_0}$ является глобальной q-формой на N, которую мы обозначим через $\hat{w}$. Мы положим

(1) $T^q_N(\eta) := \exp((-1)^q \int_N \hat{w})$.

Отображение T^q_N в формуле (1) зависит только от класса когомологии для η, так как если $\eta = D(\bar{\eta})$, то $\hat{w} = 0$. Более того, T^q_N не зависит от выбора цепи $\bar{\eta}$. В самом деле, если $\tilde{\eta}$ - это некоторая другая $(q-1)$-коцепь с $\eta + D(\tilde{\eta}) = (1, 0, ..., 0, \nu_{\mathbf{j}_0})$, то $\nu - \hat{w}$ является $2\pi\mathbf{Z}(\mathsf{C}_r)$-интегральной q-формой и неизбежно $\exp(\int_N (\nu - \hat{w})) = 0$.

Мы зададим изоморфизм $t^q_N : \mathsf{H}^q(N, \mathcal{A}_r^*) \to \mathcal{A}_r^*$ как ограничение для T^q_N на $\mathsf{H}^q(N, \mathcal{A}_r^*)$. Или это можно записать в виде: $t^q_N = T^q_N \circ i^q_N$, где $i^q_N : {}_{AS}\mathsf{H}^q(N, \mathcal{A}_r^*) \to {}_{AS}\mathsf{H}^m(\mathcal{Y}^{<q+1}_{N,\mathcal{A}_r}(dLn))$, $i^q_N(g_{\mathbf{j}_q}) = (g_{\mathbf{j}_q}, 0, ..., 0)$ является мономорфизмом индуцированным морфизмом комплексом пучков $(\mathcal{A}_r^*)_N \to \mathcal{S}^{<q+1}_{N,\mathcal{A}_r}(dLn)$.

Теперь мы рассмотрим изоморфизм $e^q_N : \mathsf{H}^q(\mathcal{S}^{<q+1}_{N,\mathcal{A}_r}(dLn)) \to \mathsf{H}^q(N, \mathcal{A}_r^*)$. Возьмем q-коцикл η

как выше, тогда $dw_{\mathbf{j}_0}=0$, так как N имеет размерность q. Это влечет существование $(q-1)$-коцепи $\bar{\eta}$ скрученного комплекса для $\mathcal{S}^{<q+1}_{N,\mathcal{A}_r}(dLn)$, так что $\eta+D(\bar{\eta})=(\bar{g}_{\mathbf{j}_q},0,...,0)$. Условие коцикличности $D(\eta+D(\bar{\eta}))=0$ влечет, что $\bar{g}_{\mathbf{j}_q}$ есть локально постоянная $\mathcal{A}^*_r$-значная коцепь. Тогда отображение $\eta\mapsto\bar{g}_{\mathbf{j}_q}$ индуцирует изоморфизм e^q_N : ${}_{AS}\mathsf{H}^q(\mathcal{S}^{<q+1}_{N,\mathcal{A}_r}(dLn))\to {}_{AS}\mathsf{H}^q(N,\mathcal{A}^*_r)$. Эта конструкция означает, что e^q_N является обратным к i^q_N, следовательно, $T^q_N=t^q_N\circ e^q_N$.

55. Теорема. *Для любого H^∞ многообразия N над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ отображение $\eta\mapsto h^\eta$ (see §54) индуцирует изоморфизм $h:\mathsf{H}^q(\mathcal{S}^{<q+1}_{N,\mathcal{A}_r}(dLn))\to\hat{\mathsf{H}}^q(N,\mathbf{Z}(\mathsf{C}_r))$.*

Доказательство. Достаточно показать, что следующая диаграмма с верхней строкой

$0\to\mathsf{H}^q(N,\mathcal{A}^*_r)\xrightarrow{i^p_N}\mathsf{H}^q(\mathcal{S}^{<q+1}_{N,\mathcal{A}_r}(dLn))\xrightarrow{d}\mathsf{S}^{q+1}_{\mathcal{A}_r}(N)_0\to 0$

и нижней строкой

$0\to Hom(\mathsf{H}^\psi_q(N),\mathcal{A}^*_r)\xrightarrow{\hat{i}^p_N}\hat{\mathsf{H}}^q_\psi(N,\mathbf{Z}(\mathsf{C}_r))\xrightarrow{\pi_2}\mathcal{S}^{q+1}_{\mathcal{A}_r}(N)_0\to 0$

и с вертикальными строками

$\mathsf{H}^q(N,\mathcal{A}^*_r)\xrightarrow{u}Hom(\mathsf{H}^\psi_q(N),\mathcal{A}^*_r)$ и

$\mathsf{H}^q(\mathcal{S}^{<q+1}_{N,\mathcal{A}_r}(dLn))\xrightarrow{h}\hat{\mathsf{H}}^q_\psi(N,\mathbf{Z}(\mathsf{C}_r))$ коммутативна. Для любого $\eta\in\mathsf{H}^q(\mathcal{S}^{<q+1}_{N,\mathcal{A}_r}(dLn))$ мы положим $h(\eta):=(h^\eta,K^\eta)$, где h^η - это голономия для η, и K^η обозначает кривизну для η. Если $\eta=(g_{j_q},w_{j_{q-1}},...,w_{j_0})$, то $K^\eta=K(g_{j_q},w_{j_{q-1}},...,w_{j_0})=dw_{j_0}$, следовательно, правая часть верхней диаграммы коммутативна.

Изоморфизм теоремы об универсальных коэффициентах $u:\mathsf{H}^q(N,\mathcal{A}^*_r)\to Hom(\mathsf{H}^\psi_q(N),\mathcal{A}^*_r)$ индуцирован спариванием сопоставляющим H^∞_p отображению $\gamma:M\to N$ и классу когомологии $\eta\in\mathsf{H}^q(N,\mathcal{A}^*_r)$ октонионное или кватернионное число $t^q_M\circ\gamma^*(\eta)$, где t^q_M обозначает ограничение T^q_M to $\mathsf{H}^q(N,\mathcal{A}^*_r)$. Поэтому для $\eta\in\mathsf{H}^q(N,\mathcal{A}^*_r)$ и q-цикла $\sum_j n_j\gamma_j$, где $\gamma_j:M\to N$ мы получаем $u(\eta)(\sum_j n_j\gamma_j)=t^q_M(\prod_j\gamma^*_j(\eta)^{n_j})$.

Из равенств $h^\eta(\gamma)=u(\eta)(\gamma)$ и $T^q_M=t^q_M\circ e^q_M$, и $e^q_M\circ i^q_M=id$ для произвольного H^∞_p отображения $\gamma:M\to N$ вытекает, что $h^{i^q_N(\eta)}(\gamma)=T^q_M\gamma^*i^q_N(\eta)=T^q_Mi^q_M\gamma^*(\eta)=t^q_Me^q_Mi^q_M\gamma^*(\eta)=t^q_M\gamma^*(\eta)=\hat{i}^q_Nu(\eta)(\gamma)$. Поскольку h есть гомоморфизм, то квадрат в левой части диаграммы также коммутативен.

56. Замечание. В силу теоремы 55 каждый элемент в $\hat{\mathsf{H}}^q_\psi(N,\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r))$ является гомоморфизмом голономии. Оператор T^q_X в определении голономии использует интегрирование, которое инвариантно при взятии отношения эквивалентности $52(E1)$. Тогда факторное отображение $\mathsf{Z}^\psi_q(N)\to\mathsf{Z}^{\tilde{\psi}}_q(N)$ индуцирует изоморфизм $\hat{\mathsf{H}}^q_{\tilde{\psi}}(N,\mathbf{Z}(\mathsf{C}_r))\to\hat{\mathsf{H}}^q_\psi(N,\mathbf{Z}(\mathsf{C}_r))$, где $\hat{\mathsf{H}}^q_{\tilde{\psi}}(N,\mathbf{Z}(\mathsf{C}_r))$ состоит их пар $(h,v)\in Hom(\mathsf{Z}^{\tilde{\psi}}_q(N),\mathcal{A}^*_r)\times\mathcal{S}^{q+1}_{\mathcal{A}_r}(N)_0$, так что $h(\partial\zeta)=\exp((-1)^q\int_\zeta v)$ для любого $\partial\zeta\in\mathsf{B}^{\tilde{\psi}}_q(N)$.

Теоретико множественное включение $H^\infty_p(M,N)\to\mathsf{Z}^\psi_q(M,N)$, где q - это размерность M, индуцирует групповой гомоморфизм $\kappa:(W^MN)_{t,H}\to\mathsf{Z}^{\tilde{\psi}}_q(M,N)$.

Обозначим через $\mathcal{L}^q_{N,\mathcal{A}^*_r}$ пучок ассоциированный с пред-пучком

$U\mapsto\{\gamma\in Hom^\infty((W^MN)_{\infty,H},\mathcal{A}^*_r):supp(\gamma)\subset U\}$. Параграф 53 и теорема 55 означают, что K^h является $2\pi\mathbf{Z}(\mathsf{C}_r)$-целой замкнутой $(q+1)$-формой на N.

56.1. Лемма. *Для любого H^∞_p отображения $\zeta:Y\to N$, где $(Y,\partial Y)$ - это псевдо-многообразие с границей ∂Y являющейся псевдо-многообразием над алгеброй Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ и всякого продолжения $\hat{h}:\mathsf{Z}^{\tilde{\psi}}_{qb}(M,N)\to G^{kb}$ для H^∞_p дифференцируемого гомоморфизма $h:(W^ME)_{b;\infty,H}\to G^{kb}$ являющегося элементом из $\hat{\mathsf{H}}^q_{\tilde{\psi}}(N,\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r))$ выполняется тождество:*

$\hat{h}(\partial\zeta)=\exp((-1)^q\int_\zeta K^h)$, где $b\in\mathbf{N}$, $E=E(N,G,\pi,\Psi)$, G есть коммутативная подгруппа в $\mathcal{A}^*_r$, G изоморфна с $\mathbf{C}^*$.

Доказательство. В силу изоморфизма $\mathsf{H}^q(\mathcal{S}^{<q+1}_{N,\mathcal{A}_r}(dLn))\to\hat{\mathsf{H}}^q_{\tilde{\psi}}(N,\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r))$ каждый элемент из $\hat{\mathsf{H}}^q_{\tilde{\psi}}(N,\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r))$ является гомоморфизмом голономии. Для каждого псевдо-многообразия с границей $(Y,\partial Y)$ и H^∞_p отображения $\zeta:Y\to N$ мы возьмем разбиение $\mathcal{T}$ для Y на малые кубики Q_j. Из свойства сокращения голономий мы получим, что $\hat{h}(\partial\zeta)=\prod_{Q_j\in\mathcal{T}}\hat{h}(\gamma|_{Q_j})$, так как группа G коммутативна. С другой стороны, $\hat{h}$ является продолжением h, следовательно, $\prod_{Q_j\in\mathcal{T}}\hat{h}(\gamma|_{Q_j})=$

$\prod_{Q_j \in \mathcal{T}} h(\gamma|_{Q_j})$. Таким образом, доказательство сводится к случаю Y являющегося $(q+1)$ мерным кубом $\mathcal{A}_r^m \times \mathbf{R}$, так что ∂Y вложено в $\mathcal{A}_r^m$ и имеет вещественную тень $\partial[0,1]^{q+1}$.

Если μ является борелевской мерой на Y относительно которой дана соболевская равномерность, тогда $\mu(Y_S) = 0$, так как $codim(Y_S) \geq 2$, где S_Y - это сингулярность на Y. Более того, мера Лебега на $\mathbf{R}^{q+1}$ индуцирует μ на Y используя тот факт, что $Y \setminus Y_S$ является $H^{t'}$-многообразием с $t' > [(q+1)/2] + 1$.

Для матрично-значных над $\mathcal{A}_r$ дифференциальных форм $w = (w_{j,k} : j,k = 1,...,m)$ мы положим

$$\int_\xi w = (\int_\xi w_{j,k} : j,k = 1,...,m),$$

для диагональных матриц $(a_1,...,a_m)$ мы положим $\exp(a_1,...,a_m) := (e^{a_1},...,e^{a_m})$, если $a_1 \neq 0$,...,$a_m \neq 0$, тогда $Ln(a_1,...,a_m) = (Ln(a_1),...,Ln(a_m))$.

Без ограничения общности h аддитивна и $\mathbf{R}$ гомогенна на $\mathsf{Z}_q(N)$. Для любого $n \in \mathbf{N}$ разделим отрезок $[0,1]$ на n малых подотрезков, что индуцирует подразделение $[0,1]^{q+1}$ на n^{q+1} кубиков с вершинами обозначаемыми через $v_{j_1,...,j_{q+1}}(n)$, где $j_1,...,j_{q+1} = 0,1,...,n$. Рассмотрим обертку $\gamma^n_{j_1,...,j_{q+1}} := \gamma_{e_1/n,...,e_{q+1}/n} + v_{j_1,...,j_{q+1}}(n)$, где $e_1,...,e_{q+1}$ есть стандартный базис в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{q+1}$.

Возьмем $\xi \in H^\infty_p(Y,E)$ таким, чтобы $\pi \circ \xi = \gamma$. Поэтому

$\int_\xi K = \int_Y \xi^* K = \lim_{n\to\infty} \sum_{j_1,...,j_{q+1}} \xi^* K(v_{j_1,...,j_{q+1}}(n)) n^{-q-1} =$

$(-1)^q \lim_{n\to\infty} \sum_{j_1,...,j_{q+1}} \lim_{s\to 0} [Ln\ h(\xi \circ \gamma^n_{j_1,...,j_{q+1}})] s^{-q-1} n^{-q-1}$,

где $\xi^* K_y = \xi^* K(y) dx_1 \wedge ... \wedge dx_{q+1}$ для каждого $y \in N$. Взятие $s = 1/n$ дает

$\lim_{n\to\infty} \lim_{s\to 0} \sum_{j_1,...,j_{q+1}} [Ln\ h(\xi \circ \gamma^n_{j_1,...,j_{q+1}})] s^{-q-1} n^{-q-1} =$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{j_1,...,j_{q+1}} Ln\ h(\xi \circ \gamma^n_{j_1,...,j_{q+1}}) =$

$\lim_{n\to\infty} Ln(\prod_{j_1,...,j_{q+1}} h(\xi \circ \gamma^n_{j_1,...,j_{q+1}})) = \lim_{n\to\infty} Ln\ h(\sum_{j_1,...,j_{q+1}} \xi \circ \gamma^n_{j_1,...,j_{q+1}}) =$

$\lim_{n\to\infty} Lnh(\xi \circ \gamma^n_{0,...,0}) = Ln\ h(\gamma)$,

так как $h(\gamma_1 \lambda \lambda^{-1} \gamma_2) = h(\gamma_1 \gamma_2)$, и группа G коммутативна, где $\lambda : Y \to N$ - это путь соединяющий отмеченные точки y_1 и y_2 оберток γ_1 и γ_2, то сеть $\gamma_j(\hat{s}_{0,q}) = y_j$ и $\lambda(\hat{s}_{0,q}) = y_1$, $\lambda(\hat{s}_{0,q+k}) = y_2$ причем $\lambda^{-1}(\hat{s}_{0,q}) = y_2$ и $\lambda^{-1}(\hat{s}_{0,q+k}) = y_1$ для любых $j = 1,2$ и $q = 1,...,k$.

57. Лемма. *Предположим, что $\phi : A \subset X$ является пунктированным включением CW-комплексов, и $\theta : X \to X/A$ есть факторное отображение. Пусть группа G скручена над $\{i_0,...,i_{2^r-1}\}$. Тогда $\theta_* : (W^M E; X, G, \mathbf{P})_{t,H} \to (W^M E; X/A, G, \mathbf{P})_{t,H}$ является главным $(W^M E; A, G, \mathbf{P})_{t,H}$-расслоением.*

Доказательство. Пусть G, E и B - это топологические группы, то есть G действует эффективно на E. Рассмотрим подмножество U открытое в B с $e \in U$. Предположим, что $\pi : E \to B$ является открытым сюръективным отображением. Каждый G-эквивариантное отображение $\xi : \pi^{-1} \to G$ индуцирует локальную тривиализацию для $\pi : E \to B$ над U. Групповая структура в E индуцирует систему локальных тривиализаций для E/B. Она описывается следующим образом. Для любого $v \in E$ возьмем открытое подмножество $U_v = \pi(v\pi^{-1}(U))$ в B. Тогда имеется семейство $\{U_v : v \in E\}$ форм на открытом покрытии для B. Для любого $v \in E$ существует G-эквивариантное отображение $\xi_v : \pi^{-1}(U_v) = v\pi^{-1}(U) \to G$ даваемое формулой $\xi_v(x) = \xi(v^{-1}x)$.

Поэтому открытое сюръективное отображение $\pi : E \to B$ является главным G-расслоением тогда и только тогда, когда существует окрестность U единичного элемента e в B и G-эквивариантное отображение $\xi : \pi^{-1}(U) \to G$.

Поскольку группа G скручена, то в силу предложения 19 и теоремы 20 [22] достаточно доказать эту лемма для коммутативной группы G_0.

Рассмотрим деформационную ретракцию $\eta : [0,1] \times V \to A$ из V на A, где V есть открытая окрестность подмножества A, положим $U = \theta_*[(W^M E; V, G_0, \mathbf{P})_{t,H}]$. $(W^M E; A, G_0, \mathbf{P})_{t,H}$-эквивариантное отображение $\xi : (\theta_*)^{-1}(U) = (W^M E; W, G_0, \mathbf{P})_{t,H} \to (W^M E; A, G_0, \mathbf{P})_{t,H}$ дается формулой $\xi(< \mathbf{P}_{\hat{\gamma},v} >_{t,H}) =< \eta(1, \mathbf{P}_{\hat{\gamma},v} >_{t,H}$ в силу предложений 7.1 и 13(2) [22].

58. Теорема. *Для любого связного гладкого многообразия N, гомоморфизм к индуцирует изоморфизм*

$\kappa_* : \pi_0((W^M E; N, \mathcal{A}_r^*, \mathbf{P})_{b;\infty,H}) \to \mathsf{H}_{qb}^{\tilde{\psi}}(N, \mathbf{Z}(\mathsf{C}_r))$, *где* $1 \le b \in \mathbf{N}$, q *- это размерность* M.

Доказательство. Равномерное пространство $H_p^\infty(M,E)$ всюду плотно в равномерном пространстве $C^0(M,E)$ всех непрерывных отображений из M в E, где M является H_p^∞-псевдомногообразием. Поэтому существует продолжение $N \mapsto \pi_0((W^M E; N, \mathcal{A}_r^*, \mathbf{P})_{b;\infty,H})$ до функтора на категории пунктированных CW-комплексов и пунктированных непрерывных отображений, что не изменяет тип гомотопии.

Мы напомним приведенную теорию гомологии. Задается функтор H_* из категории пунктированных CW-комплексов и пунктированных непрерывных отображений в категорию градуированных скрученных групп удовлетворяющих свойствам $(H1-H4)$.

$(H1)$. Для любого пунктированного непрерывного отображения CW-комплексов $f : X \to Y$ и $a \in \mathbf{Z}$, индуцированный гомоморфизм $f_* : \mathsf{H}_a(X) \to \mathsf{H}_a(Y)$ зависит лишь от типа гомотопии для f.

$(H2)$. Для любого пунктированного CW-комплекса X и $a \in \mathbf{Z}$ существует естественный изоморфизм

$\Sigma_X : \mathsf{H}_a(X) \to \mathsf{H}_{a+1}(\Sigma X)$,

где ΣX - это приведенная суспензия для X.

$(H3)$. Для любого пунктированного включения $i : A \subset X$ of CW-комплексов и $a \in \mathbf{Z}$ последовательность

$\mathsf{H}_a(A) \stackrel{i_*}{\to} \mathsf{H}_a(X) \stackrel{g_*}{\to} \mathsf{H}_a(X/A)$ точна,

где $g : X \to X/A$ - это факторное отображение.

$(H4)$. $\mathsf{H}_a(S^1) = e$ для $a \ne 1$ и $\mathsf{H}_1(S^1) = \mathbf{Z}$. Эти свойства стандартны и они демонстрируют лемму 4.5 [12] для коммутативных групп. В силу условий $4(A1, A2)$ на скрученные группы мы получим приведенную скрученную теорию гомологии.

В силу леммы 57 $\pi_j((W^M E; A, G, \mathbf{P})_{t,H}) \to \pi_j((W^M E; X, G, \mathbf{P})_{t,H}) \to \pi_j((W^M E; X/A, G, \mathbf{P})_{t,H})$ является фрагментом длинной точной гомотопической последовательности по слоям расслоения θ_*, где G является скрученной группой над $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$, $j = 0, 1, 2, ...$. Более того, условия $(H2, H3)$ вытекают из леммы 57. Поэтому свойства $(H1-H4)$ для скрученных групп являются прямыми следствиями соответствующих свойств для коммутативных групп. Хотя для доказательства этой теоремы случай коммутативных градуированных групп достаточен.

Поскольку κ является естественным преобразованием теории гомологии и в силу предложения 19 и теоремы 20 [22] это индуцирует изоморфизм κ^*.

59. Предложение. *Морфизм кривизны* $K : \mathcal{L}^q_{N,\mathcal{A}_r^*} \to \mathcal{S}^{q+1,cl}_{N,\mathcal{A}_r}$ *является изоморфизмом.*

Доказательство. Семейство $\mathbf{C}_M := \mathbf{R} \oplus M\mathbf{R}$ с $M \in \mathcal{A}_r$, $Re(M) = 0$ и $|M| = 1$ таково, что его объединение дает $\bigcup_M \mathbf{C}_M = \mathcal{A}_r$. В силу теоремы 55 и лемма 56.1 K является мономорфизмом и эпиморфизмом из $\mathcal{L}^q_{N,\mathcal{A}_r^*}$ на $\mathcal{S}^{q+1,cl}_{N,\mathcal{A}_r}$. Это дает утверждение данного предложения.

60. Теорема. *Гомоморфизм ограничения* $\kappa^* : Hom(\mathsf{Z}_{qb}^{\tilde{\psi}}(M,N), \mathcal{A}_r^*) \to Hom((W^M N)_{b;\infty,H}, \mathcal{A}_r^*)$ *индуцирует изоморфизм* $\hat{\kappa} : \hat{\mathsf{H}}^{qb}_{\tilde{\psi}}(N, \mathbf{Z}(\mathsf{C}_r)) \to Hom^\infty((W^M N)_{b;\infty,H}, \mathcal{A}_r)$, *где* $1 \le b \in \mathbf{N}$, q *- это размерность в смысле покрытий для* M, M *и* N *заданы над алгеброй Кэли-Диксона* $\mathcal{A}_r$.

Доказательство. Каждый гомоморфизм $h : \mathsf{Z}_{qb}^{\tilde{\psi}}(M,N) \to \mathcal{A}_r^*$ является голономией для $\hat{\mathsf{H}}^{qb}_{\tilde{\psi}}(N, \mathbf{Z}(\mathsf{C}_r))$, так как голономия индуцирует изоморфизм $\mathsf{H}^{qb}(\mathcal{S}^{<qb+1}_{N,\mathcal{A}_r}(dLn)) \to \hat{\mathsf{H}}^{qb}_{\tilde{\psi}}(N, \mathbf{Z}(\mathsf{C}_r))$. Тогда ограничение h на $(W^M E)_{b;\infty,H}$ принадлежит классу гладкости H^∞, где $E = E(N, G, \pi, \Psi)$ с $G = \mathbf{C}_M$ (смотри §56.1). Поэтому $\kappa^*(h) \in Hom^\infty((W^M N)_{b;\infty,H}, \mathcal{A}_r^*)$, так как $(W^M E)_{b;\infty,H}$ - это главное G^{bk}-расслоение над $(W^M N)_{b;\infty,H}$.

Мы рассмотрим продолжение $\hat{h} : \mathsf{Z}_{qb}^{\tilde{\psi}}(M,N) \to \mathcal{A}_r^*$ для h, следовательно, $\hat{h} \in \hat{\mathsf{H}}^{qb}_{\tilde{\psi}}(N, \mathbf{Z}(\mathsf{C}_r))$.

Имеется локально аналитическое отображение Ln из $\mathcal{A}_r^*$ на $\mathcal{A}_r$. Группа $(W^M N)_{b;\infty,H}$ коммутативна, поэтому вместо $Hom^\infty((W^M N)_{b;\infty,H}, \mathcal{A}_r^*)$ мы можем рассмотреть коммутативную аддитивную группу $Hom^\infty((W^M N)_{b;\infty,H}, \mathcal{A}_r)$, где алгебра Кэли-Диксона $\mathcal{A}_r$ рассматривается как аддитивная группа $(\mathcal{A}_r, +)$. В тоже время группа $\mathbf{Z}(\mathcal{C}_r)$ коммутативна. Тогда $Ln(\kappa^*(h)) \in Hom^\infty((W^M N)_{b;\infty,H}, \mathcal{A}_r)$.

Для любого $\xi \in \mathsf{Z}^{\tilde{\psi}}_{qb}(M,N)$ существуют $\zeta \in (W^M N)_{b;\infty,H}$ и $\partial\eta \in \mathsf{B}^{\tilde{\psi}}_{qb}(M,N)$ такие, что $\xi = \kappa(\zeta)+\partial\eta$, так как $\kappa_* : \pi_0((W^M E; N, \mathcal{A}_r^*, \mathbf{P})_{b;\infty,H}) \to \hat{\mathsf{H}}^{qb}_{\tilde{\psi}}(N, \mathbf{Z}(\mathsf{C}_r))$ - это изоморфизм благодаря теореме 58. Тогда для любого продолжения $\hat{h} : \mathsf{Z}^{\tilde{\psi}}_{qb}(M,N) \to \mathcal{A}_r^*$ гомоморфизма h выполняется тождество:

$\hat{h}(\xi) = h(\zeta) + \exp((-1)^{qb} \int_\eta K^h)$

благодаря параграфу 53 и лемме 59. Поэтому h имеет единственное продолжение $\hat{h}$. Это влечет, что $\hat{\kappa}$ является изоморфизмом.

61. Замечание. Отметим, что теоремы 55, 58 и 60 можно доказать другим способом используя соответствующие утверждения над $\mathbf{C}$ и скрученную структуру пучков над $\{i_0, ..., i_{2^r-1}\}$.

Литература

[1] Beggs E.J. The de Rham complex of infinite dimensional manifolds // *Quart. J. Math. Oxford*, (2) 38, 1987, pp.131-154.

[2] Bott R., Tu L.W. Differential forms in algebraic topology. New York, Springer-Verlag, 1982.

[3] Бредон Г.Е. Теория пучков. Москва, Наука, 1988.

[4] Гамильтон У.Р. Избранные труды. Оптика. Динамика. Кватернионы. Москва, Наука, 1994.

[5] Ding Y.H., Pang J.Z. Computing degree of maps between manifolds // *Acta Mathem. Sinica. English Series*, 21:6, 2005, pp.1277-1284.

[6] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Москва, Наука, 1979.

[7] Ebin D.G., Marsden J. Groups of diffeomorphisms and the motion of incompressible fluid // *Ann. of Math.*, 92, 1970, pp.102-163.

[8] Eichhorn J. The manifold structure of maps between open manifolds // *Ann. Glob. Anal. Geom.*, 3, 1993, pp.253-300.

[9] Eliasson H.I. Geometry of manifolods of maps // *J. Differ. Geom.*, 1, 1967, pp.169-194.

[10] Emch G. Mèchanique quantique quaternionienne et Relativitè restreinte // *Helv. Phys. Acta*, 36, 1963, pp.739-788.

[11] Esnault H. Algebraic theory of characteristic classes of bundles with connection // *Algebraic K-theory. Proc. Symp. in Pure Math.*, 67, 1999, pp.13-25.

[12] Gajer P. Higher holonomies, geometric loop groups and smooth Deligne cohomolgy // *"Advances in geometry". Progr. in Math.*, 172, 1999, pp.195-235 (Boston: Birkhäuser).

[13] Gajer P. Geometry of Deligne cohomology // *Invent. Mathem*, 127, 1997, pp.155-207.

[14] Gürsey F., Tze C.-H. On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics. Singapore, World Scientific Publ. Co., 1996.

[15] Зорич В.А. Математический анализ, т. 2. Москва, Наука, 1984.

[16] Harvey F.R. Spinors and calibrations. Perspectives in Mathem. 9, Boston, Academic Press, 1990.

[17] Isham C.J. Topological and global aspects of quantum theory. Relativity, groups and topology.II. Les Hauches, Editors: R. Stora, B.S. De Witt, 1983, pp.1059-1290. (Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1984).

[18] Kantor I.L., Solodovnikov A.S. Hypercomplex numbers. Berlin, Springer-Verlag, 1989.

[19] Klingenberg W. Riemannian geometry. Berlin, Walter de Gruyter, 1982.

[20] Lawson H.B., Michelson M.-L. Spin geometry. Princeton, Princ. Univ. Press, 1989.

[21] Людковский С.В. Группы оберток кватернионных и октонионных расслоений // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (11), т.6, 2009, с.72-90.

[22] Людковский С.В. Структура групп оберток гиперкомплексных расслоений // *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, 1 (11), т.6, 2009, с.91-109.

[23] Людковский С.В. Квазиинвариантные меры на группах петель римановых многообразий // *Доклады Акад. Наук*, 370, 3, 2000, с.306-308.

[24] Ludkovsky S.V. Poisson measures for topological groups and their representations // *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 25, 2002, p.653-680. (коротко в Усп. Матем. Наук 56: 1, 2001, с.169-170; предыдущие версии: IHES/M/98/88, 38 pages, also Los Alamos Nat. Lab. math.RT/9910110).

[25] Ludkovsky S.V. Functions of several Cayley-Dickson variables and manifolds over them // *J. Mathem. Sci.*, 141, 3, 2007, pp.1299-1330 (предыдущий вариант: Los Alamos Nat. Lab. math.CV/0302011).

[26] Людковский С.В. Нормальные семейства функций и группы псевдоконформных диффеоморфизмов кватернионных и октонионных переменных // *Соврем. Матем. Фундам. Направл.*, 18, 2006, p.101-164 (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab. math.DG/0603006).

[27] Ludkovsky S.V., F. van Oystaeyen. Differentiable functions of quaternion varaibles // *Bull. Sci. Math. (Paris)*, Ser. 2., 127, 2003, c.755-796.

[28] Ludkovsky S.V. Differentiable functions of Cayley-Dickson numbers and line integration // *J. Mathem. Sci.*, 141, 3, 2007, p.1231-1298 (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab. math.NT/0406048; math.CV/0406306; math.CV/0405471).

[29] Ludkovsky S.V. Stochastic processes on geometric loop groups, diffeomorphism groups of connected manifolds, associated unitary representations // *J. Mathem. Sci.*, 141, 3, 2007, p.1331-1384 (предыдущий вариант: Los Alam. Nat. Lab. math.AG/0407439, July 2004).

[30] Ludkovsky S.V. Geometric loop groups and diffemorphism groups of manifolds, stochastic processes on them, associated unitary representations. In the book: "Focus on Groups Theory Research". Nova Science Publishers, Inc., New York, 2006, pp.59-136.

[31] Ludkovsky S.V. Generalized geometric loop groups of complex manifolds, Gaussian quasi-invariant measures on them and their representations // *J.Mathem. Sci.*, 122, 1, 2004, p.2984-3011 (предыдущая версия: Los Alam. Nat. Lab. math.RT/9910086, October 1999).

[32] Ludkovsky S.V. Quasi-conformal functions of quaternion and octonion variables, their integral transformations // *Far East J. of Math. Sci. (FJMS)*, 28, 1, 2008, p.37-88.

[33] Менский М.Б. Группа путей. Измерения. Поля. Частицы. Москва, Наука, 1983.

[34] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в чатсных производных. Москва, Наука, 1976.

[35] Michor P.W. Manifolds of differentaible mappings. Boston, Shiva, 1980.

[36] J. Milnor. Morse theory. Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press, 1963.

[37] Milnor J. On spaces having the homotopy type of a CW-complex // *Transactions of the A.M.S.*, 90, 1959, p.272-280.

[38] Murakoshi N., Sekigawa K., Yamada A. Integrability of almost quaternion manifolds // *Indian J. Mathem.*, 42, 3, p.313-329, 2000.

[39] Narici L., Beckenstein E. Topological vector spaces. New York, Marcel-Dekker Inc., 1985.

[40] Omori H. Groups of diffeomorphisms and their subgroups // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 179, 1973, p.85-122.

[41] Omori H. Local structures of groups of diffeomorphisms // *J. Math. Soc. Japan*, 24, 1, 1972, p.60-88.

[42] Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. Москва, Наука, 1984.

[43] Seeley R.T. Extensions of C^∞ functions defined in a half space // *Proceed. Amer. Math. Soc.*, 15, 1964, p.625-626.

[44] Souriau J.M. Groupes differentiels. Berlin, Springer Verlag, 1981.

[45] Steenrod N. The topology of fibre bundles, Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press, 1951.

[46] Sulanke R., Wintgen P. Differentialgeometrie und Faserbündel. Berlin, Veb deutscher Verlag der Wissenschaften, 1972.

[47] Swan R.C. The Grothendieck ring of a finite group // *Topology*, 2, 1963, p.85-110.

[48] Свитцер Р.М. Алгебраическая топология - гомотопии и гомологии. Москва, Наука, 1985.

[49] Tougeron J.C. Ideaux de fonctions differentiels. Berlin, Springer-Verlag, 1972.

[50] Whitehead J.H.C. Combinatorial homotopy.I // *Bull. Amer. Mathem. Soc.*, 55, 1949, p.213-245.

[51] Энгелькинг Р. Общая топология. Москва, Мир, 1986.

[52] Yano K., Ako M. An affine connection in almost quaternion manifolds // *J. Differ. Geom.*, 3, 1973, p.341-347.

TWISTED COHOMOLOGIES OF WRAP GROUPS OVER QUATERNIONS AND OCTONIONS

S.V. Ludkovsky

Moscow State Technical University MIREA, Moscow, Russia

sludkowski@mail.ru

This article is devoted to the investigation of wrap groups of connected fiber bundles over the fields of real **R**, complex **C** numbers, the quaternion skew field **H** and the octonion algebra **O**. Cohomologies of wrap groups and their structure are investigated. Sheaves of wrap groups are constructed and studied. Moreover, twisted cohomologies and sheaves over quaternions and octonions are investigated as well.

Key Words: twisted cohomologies, wrap groups, octonion algebra, connected fiber bundle, sheaf, smashed product.