О ФОРМАХ СТЕПЕНИ N, ДОПУСКАЮЩИХ КОМПОЗИЦИЮ[1]

Р. Д. Шафер

Передано Эндрю. М. Глисоном

Любая конечномерная сепарабельная альтернативная алгебра A над полем F является прямой суммой $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_r$ простых идеалов A_i, где центр Z_i алгебры A_i является сепарабельным расширением F степени d_i. Общая (generic) норма $n_i(x_i)$ для A_i ([6], стр. 180) есть (однородная) форма степени $m_i d_i$ над F, где m_i – степень A_i как центральной простой алгебры над Z_i (в случае, если A_i неассоциативна, A_i является алгеброй Кэли над Z_i и $m_i = 2$). Пусть $f_1, \ldots, f_r$ – произвольные положительные целые числа и $x = x_1 + \ldots + x_r$, $x_i \in A_i$. Тогда

$$N(x) = [n_1(x_1)]^{f_1} \cdots [n_r(x_r)]^{f_r} \tag{1}$$

является формой степени

$$n = \sum_{i=1}^{r} f_i m_i d_i \tag{2}$$

на A, *допускающей композицию:*

$$N(xy) = N(x)N(y) \qquad \text{для всех} \quad x, y \in A \tag{3}$$

Если F имеет характеристику 0 или $p > n$, $N(x)$ невырождена.

В [9] было сделано предположение, что обратно, любая (возможно, бесконечномерная) алгебра A с 1 над F характеристики 0 или $p > n$, на которой определена невырожденная форма $N(x)$ степени n, допускающая композицию, является конечномерной сепарабельной альтернативной алгеброй с $N(x)$, получаемой посредством (1) и (2). Это классический результат ([1], [5], [7]) для квадратичных форм, размерность A равна $1, 2, 4$ или 8. Для конечномерной A теорема известна для кубических форм ([9]), размерность A равна $1, 2, 3, 5$ или 9. В данной работе мы докажем для произвольного n, без предположения конечномерности, что A альтернативна (Теорема 2). Мы докажем также, что элементы из A удовлетворяют хорошо определенным уравнениям степени n.

Предположив, что A конечномерна, мы докажем, что A является сепарабельной (альтернативной) алгеброй $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_r$ с $N(x) = N_1(x_1) \cdots N_r(x_r)$, где $N_i(x_i)$ на простом идеале A_i есть невырожденная форма степени n_i, допускающая композицию, $n = n_1 + \ldots + n_r$. Это сводит предположение для конечномерной алгебры A к следующему: что невырожденная форма степени $\leqslant n$, допускающая композицию на простой альтернативной алгебре, является степенью общей (generic) нормы.

В последнем разделе мы докажем для конечномерной A, что, если $N(x)$ – квадраформа (quartic form), то $N(x)$ дается посредством (1) с $n = 4$ в (2). Таким образом, размерность A равна $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12$ или 16.

После того, как данная работа была написана, Натан Джекобсон информировал автора, что он доказал, что форма степени n, допускающая композицию на конечномерной простой альтернативной алгебре над полем, содержащим более, чем n элементов, является степенью общей нормы. Это результат, который включает доказательство для конечномерной A предположения из [9], появится в Osaka Mathematical Journal.

[1] Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 12, No. 5 (1963), перевод А. Элиовича.

1. Формы степени n**.** Пусть V – векторное пространство (возможно, бесконечномерное) над полем F характеристики 0 или $p > n$. Отображение $x \to N(x)$ V на F называется *формой степени* n на V в случае $N(\alpha x) = \alpha^n N(x)$ для всех $\alpha \in F$ и $x \in V$, и

$$(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!}\Big[N(x_1 + \ldots + x_n) - \sum_{i=1}^{n} N(x_1 + \ldots + \breve{x}_i + \ldots + x_n) \\ + \sum_{i<j} N(x_1 + \ldots + \breve{x}_i + \ldots + \breve{x}_j + \ldots + x_n) - \ldots + (-1)^{n-1}\sum N(x_i)\Big], \quad (4)$$

n-линейна, где запись $\breve{x}_i$ означает, что x_i опущен. Так как

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i C_n^i (n-i)^n = n!,$$

где C_n^i – биномиальные коэффициенты ([4], стр. 63, уравнение (12.17)), мы имеем $N(x) = (x, \ldots, x)$. Мы говорим, что $N(x)$ и ассоциированная симметричная n-линейная форма (4) являются невырожденными в случае, когда $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ для любых $x_2, \ldots, x_n \in V$ означает $x_1 = 0$.

Предположим, что форма $N(x)$ степени n определена на неассоциативной алгебре A над F, и что $N(x)$ допускает композицию:

$$(xy, \ldots, xy) = (x, \ldots, x)(y, \ldots, y).$$

Мы линеаризуем это по x, чтобы получить

$$(x_1 y, \ldots, x_n y) = (x_1, \ldots, x_n)N(y), \tag{5}$$

и линеаризуем (5) по y, чтобы получить фундаментальное соотношение

$$\sum_{\sigma}(x_1 y_{\sigma(1)}, \ldots, x_n y_{\sigma(n)}) = n!(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_n), \tag{6}$$

где σ пробегает все перестановки $1, 2, \ldots, n$. Тогда из (6) вытекает

$$(xy_1, \ldots, xy_n) = N(x)(y_1, \ldots, y_n). \tag{7}$$

Мы предполагаем повсюду, что классические результаты для $n \leqslant 2$ известны. Таким образом, во всех формулах и доказательствах мы можем положить $n \geqslant 3$. Фактически, большая часть формул, данных здесь, справедливы для $n \geqslant 2$. Если получится, что в некоторых формулах мы молчаливо предполагаем $n \geqslant 3$ или $n \geqslant 4$, присутствие $(n-2)$ и/или $(n-3)$ среди коэффициентов как правило делает формулы формально справедливыми для $n \geqslant 2$.

Предположим, что A содержит 1. Для $i = 1, \ldots, n$ определим форму $T_i(x)$ степени i на A посредством

$$T_i(x) = C_n^i(\underbrace{x, \ldots, x}_{i}, 1, \ldots, 1) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

В частности, мы имеем *след*

$$T(x) = T_1(x) = n(x, 1, \ldots, 1); \tag{9}$$

также

$$N(x) = T_n(x).$$

(Мы принимаем соглашение, что для любых $x \in A$, мы имеем $T_0(x) = 1$ и $T_{n+q}(x) = 0$ если $q > 0$). Тогда A является векторным пространством прямой суммы

$$A = F1 + A_0 \tag{10}$$

$F1$ и подпространства A_0 всех элементов следа 0.

Положим $y_1 = a, y_2 = \ldots = y_n = 1$ в (6) чтобы получить

$$(x_1 a, x_2, \ldots, x_n) + (x_1, x_2 a, \ldots, x_n) + \ldots + (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n a) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)T(a). \tag{11}$$

Согласно (10), так как $T(\alpha 1) = n\alpha$ для $\alpha \in F$, тождество (11) эквивалентно

$$(x_1 a_0, x_2, \ldots, x_n) + (x_1, x_2 a_0, \ldots, x_n) + \ldots + (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n a_0) = 0$$

для всех элементов a_0 следа 0; так что (11) эквивалентно утверждению, что все правые умножения R_{a_0}, соответствующие элементам следа 0 оставляют симметричную n-линейную форму $(x_1, \ldots, x_n)$ *инвариантной*. Симметрично, мы имеем

$$(ax_1, x_2, \ldots, x_n) + (x_1, ax_2, \ldots, x_n) + \ldots + (x_1, \ldots, x_{n-1}, ax_n) = T(a)(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{12}$$

Следовательно

$$([x_1, a], x_2, \ldots, x_n) + (x_1, [x_2, a], \ldots, x_n) + \ldots + (x_1, \ldots, x_{n-1}, [x_n, a]) = 0. \tag{13}$$

так что все $R_a - L_a$, как и все левые умножения, связанные с элементами следа 0, оставляют форму $(x_1, \ldots, x_n)$ инвариантной.

Прежде, чем применить тождество (6) в его полную силу, мы должны получить ряд следствий из (11) и (12). Например, (11) и (12) справедливы в [10], хотя (6) – нет. Положив $y_{i+1} = \ldots x = y_n$ в (12), мы имеем

$$\begin{gathered}(ax_1, x_2, \ldots, x_i, 1, \ldots, 1) + \ldots + (x_1, x_2, \ldots, ax_i, 1, \ldots, 1) \\ + (n-j)(x_1, \ldots, x_i, a, 1, \ldots, 1) = T(a)(x_1, \ldots, x_i, 1, \ldots, 1) \\ \text{для} \quad j = 1, \ldots, n-1.\end{gathered} \tag{14}$$

Подстановка $a = x_1 = \ldots = x_i = x$ в (14) дает

$$jC_n^j(x^2, \underbrace{x, \ldots, x}_{i-1}, 1, \ldots, 1) + (j+1)T_{i+1}(x) = T(x)T_i(x), \qquad \text{для} \quad j = 1, \ldots, n-1, \tag{15}$$

согласно (8). Особый случай $j = 2$ в (14) есть

$$\begin{gathered}(ax_1, x_2, 1, \ldots, 1) + (x_1, ax_2, 1, \ldots, 1) \\ + (n-2)(x_1, x_2, a, 1, \ldots, 1) = T(a)(x_1, x_2, 1, \ldots, 1).\end{gathered} \tag{16}$$

Положив $a = x,\ x_1 = y,\ x_2 = 1$ в (16), мы имеем

$$T(xy) = T(x)T(y) - n(n-1)(x, y, 1, \ldots, 1). \tag{17}$$

Следовательно,

$$T(x^2) = [T(x)]^2 - 2T_2(x) \tag{18}$$

и

$$T(xy) = T(yx) \qquad \text{для} \quad x, y \in A. \tag{19}$$

Тогда из (17), (16) и (13) вытекает, что

$$T((xy)z) = T(x(yz)) \qquad \text{для всех} \quad x, y, z \in A, \tag{20}$$

так как

$$\begin{aligned} T((xy)z) - T(x(yz)) = T(xy)T(z) - n(n-1)(xy, z, 1, \ldots, 1) - T(x)T(yz) \\ + n(n-1)(x, yz, 1, \ldots, 1) = n(n-1)[T(x)(y, z, 1, \ldots, 1) \\ - (xy, z, 1, \ldots, 1) - T(z)(x, y, 1, \ldots, 1) + (x, yz, 1, \ldots, 1)] = \\ n(n-1)[([x, z], y, 1, \ldots, 1) + (x, [y, z], 1, \ldots, 1)] = \\ - n(n-1)(n-2)(x, y, [1, z], 1, \ldots, 1) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, симметричная билинейная форма

$$B(x, y) = T(xy)$$

является *ассоциативной*: $B(xy, z) = B(x, yz)$ для всех $x, y, z \in A$.

Мы покажем теперь, что если n-линейная форма $(x_1, \ldots, x_n)$ невырождена на A, то также невырождена и билинейная форма $B(x, y)$. Положим, что $B(x, y) = 0$ для всех $y \in A$. Тогда $T(x) = B(x, 1) = 0$, так что

$$B(x, y) = -n(n-1)(x, y, \ldots, 1)$$

по (17), или $(x, y, \ldots, 1) = 0$ для всех $y \in A$. Это случай $i = 2$ уравнения

$$(x, x_2, \ldots, x_i, 1, \ldots, 1) = 0 \qquad \text{для всех} \quad x_2, \ldots, x_i \in A. \tag{21}$$

Мы докажем (21) посредством индукции по i. Для $2 \leqslant i \leqslant n-1$, мы имеем

$$\begin{aligned} (x_{i+1}x, x_2, \ldots, x_i, 1, \ldots, 1) + (x, x_{i+1}x_2, \ldots, x_i, 1, \ldots, 1) \\ + \ldots + (x, x_2, \ldots, x_{i+1}x_i, 1, \ldots, 1) + (n-i)(x, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, 1, \ldots, 1) \\ = T(x_{i+1})(x, x_2, \ldots, x_i, 1, \ldots, 1) \end{aligned}$$

по (14), так что

$$(x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}x, 1, \ldots, 1) = -(n-i)(x, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, 1, \ldots, 1) \tag{22}$$

для всех $x_2, \ldots, x_{i+1}$ из A согласно предположению (21) индукции. Взаимная замена x_{i+1} и $x_i (j = 2, \ldots, i)$ в (22) дает

$$(x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{i+1}, 1, \ldots, 1) = -(n-i)(x, x_2, \ldots, x_{i+1}, 1, \ldots, 1) \ \ \text{для} \ \ j = 2, \ldots, i. \tag{23}$$

Тогда

$$\begin{aligned} (x_2x, x_3, \ldots, x_{i+1}, 1, \ldots, 1) + \ldots + (x_2, \ldots, x_{i+1}x, 1, \ldots, 1) \\ + (n-i)(x_2, \ldots, x_{i+1}, x, 1, \ldots, 1) = (x_2, \ldots, x_{i+1}, 1, \ldots, 1)T(x) = 0 = \\ = -(i-1)(n-i)(x, x_2, \ldots, x_{i+1}, 1, \ldots, 1) \end{aligned}$$

согласно (23), из чего вытекает $(x, x_2, \ldots, x_{i+1}, 1, \ldots, 1) = 0$ пока $2 \leqslant i \leqslant n-1$. Следовательно, (21) верно; в частности, $(x, x_2, \ldots, x_n) = 0$ для всех $x, x_2, \ldots, x_n \in A$

так что $x = 0$, поскольку $(x_1, \ldots, x_n)$ невырождена. Поэтому $B(x, y)$ – невырожденная симметричная ассоциативная билинейная форма, определенная на A, и для конечномерной A мы можем применить теорему Дьюдонна ([11], стр. 37), которая утверждает, что конечномерная неассоциативная алгебра является полупростой в случае (i) на алгебре A определена невырожденная ассоциативная симметричная билинейная форма $B(x, y)$, и (ii) $I^2 \neq 0$ для каждого идеала $I \neq 0$ из A.

Теорема 1. *Пусть A – неассоциативная алгебра с 1 над полем F характеристики 0 или $p > n$. Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ – симметричная n-линейная форма на A, и след $T(x)$ определен согласно (9). Если $(x_1, \ldots, x_n)$ – инвариантна относительно всех левых и правых умножений, соответствующих элементам следа 0, то*

(a) *$B(x, y) = T(xy)$ является симметричной ассоциативной билинейной формой на A;*

(b) *если $(x_1, \ldots, x_n)$ невырождена, то невырождена и $B(x, y)$;*

(c) *если $(x_1, \ldots, x_n)$ невырождена и A конечномерна, то $A = A_1 \oplus \ldots A_r$ является прямой суммой простых идеалов A_i (и A сепарабельна в случае $p > n$).*

Доказательство. Нам нужно только проверить (ii) выше для невырожденной формы $B(x, y)$. Предположим, что I – идеал на A, удовлетворяющий $I^2 = 0$. Мы покажем сначала, что $T(x) = 0$ для всех $x \in I$. Для любого $x \in I$, мы имеем $x^2 = 0$. Тогда из (15) вытекает

$$(j + 1)T_{i+1}(x) = T(x)T_i(x) \qquad \text{для} \quad j = 1, \ldots, n - 1, \tag{24}$$

и, положив $a = x_1 = \ldots = x_n = x$ в (12) мы имеем

$$T(x)N(x) = 0. \tag{25}$$

Предположим, что $T(x) \neq 0$ для некоторого $x \in I$. Тогда из (25) вытекает $T_n(x) = N(x) = 0$. Это случай $i = 0$ уравнения $T_{n-i}(x) = 0$, которое мы доказали с помощью индукции по i. Согласно (24) мы имеем $T(x)T_{n-(i+1)}(x) = (n - i)T_{n-i}(x) = 0$ для $i = 0, 1, \ldots, n - 2$, так что $T_{n-(i+1)} = 0$ для $i = 0, 1, \ldots, n - 2$, как и хотели. В частности, мы имеем $T(x) = T_1(x) = 0$, т. е. противоречие. Поэтому $T(x) = 0$ для всех $x \in I$. Так как I является идеалом на A, мы имеем $xy \in I$ для всех $x \in I, y \in A$. Поэтому $B(x, y) = T(xy) = 0$ для всех $y \in A$, из чего вытекает $x = 0$ для всех $x \in I$, или $I = 0$.

2. Альтернативные алгебры. Напомним, что *альтернативная алгебра* A – это такая алгебра, которая является одновременно *левой альтернативной*:

$$x^2 a = x(xa) \qquad \text{для всех} \quad x, a \in A \tag{26}$$

и *правой альтернативной*:

$$ax^2 = (ax)x \qquad \text{для всех} \quad x, a \in A. \tag{27}$$

Теорема 2. *Пусть поле F имеет характеристику 0 или $p > n$. Если невырожденная форма $N(x)$ степени n, допускающая композицию, определена на алгебре A (возможно, бесконечномерной) с 1 над F, то A альтернативна.*

Доказательство. Сначала выведем ряд следствий из фундаментального тождества (6). Положим

$$x_1 = x_2 = x, \quad y_1 = a, \quad y_2 = y, \quad x_3 = \ldots = x_n = y_3 = \ldots = y_n = 1$$

в (6) чтобы получить

$$2(xa, xy, 1, \ldots, 1) + 2(n-2)(xa, x, y, 1, \ldots, 1) + 2(n-2)(xy, x, a, 1, \ldots, 1)$$
$$+ (n-2)(n-3)(x, x, a, y, 1, \ldots, 1) = 2T_2(x)(a, y, 1, \ldots, 1). \quad (28)$$

Симметрично мы имеем

$$2(ax, yx, 1, \ldots, 1) + 2(n-2)(ax, x, y, 1, \ldots, 1) + 2(n-2)(yx, x, a, 1, \ldots, 1)$$
$$+ (n-2)(n-3)(x, x, a, y, 1, \ldots, 1) = 2T_2(x)(a, y, 1, \ldots, 1). \quad (29)$$

Тогда из (28) и (29) вытекает

$$2T_2(x)(a, y, 1, \ldots, 1) - (xa, xy, 1, \ldots, 1) - 2(n-2)(xa, x, y, 1, \ldots, 1) =$$
$$(n-2)(xy, x, a, 1, \ldots, 1) + (n-2)(n-3)(x, x, a, y, 1, \ldots, 1)$$
$$+ (n-2)(yx, x, a, 1, \ldots, 1) + (n-2)(ax, x, y, 1, \ldots, 1) + (ax, yx, 1, \ldots, 1). \quad (30)$$

Положим $x_1 = a, \quad y_1 = y, \quad x_2 = y_2 = x, \quad x_3 = \ldots = x_n = y_3 = \ldots = y_n = 1$ в (6) чтобы получить

$$(ay, x^2, 1, \ldots, 1) + (n-2)(ay, x, x, 1, \ldots, 1) + (n-2)(ax, x, y, 1, \ldots, 1)$$
$$+ (n-2)(n-3)(a, x, x, y, 1, \ldots, 1) + +(ax, xy, 1, \ldots, 1) + (n-2)(a, x^2, y, 1, \ldots, 1)$$
$$+ (n-2)(a, xy, x, 1, \ldots, 1) = n(n-1)(a, x, 1, \ldots, 1)(y, x, 1, \ldots, 1). \quad (31)$$

Из (20) мы имеем $T(((ax)y)x) = T((ax)(yx))$, так что

$$T((ax)y)T(x) - n(n-1)((ax)y, x, 1, \ldots, 1) = T(ax)T(yx) - n(n-1)(ax, yx, 1, \ldots, 1)$$

согласно (17), или

$$n(n-1)[(ax, yx, 1, \ldots, 1) - T(y)(ax, x, 1, \ldots, 1)$$
$$+ (ax, xy, 1, \ldots, 1) + (n-2)(ax, x, y, 1, \ldots, 1)] =$$
$$T(x)[T(y)T(ax) - n(n-1)T(a)(y, x, 1, \ldots, 1) - T((ax)y)]$$
$$+ n^2(n-1)^2(a, x, 1, \ldots, 1)(y, x, 1, \ldots, 1) =$$
$$n(n-1)T(x)[(ax, y, 1, \ldots, 1) - T(a)(y, x, 1, \ldots, 1)]$$
$$+ n^2(n-1)^2(a, x, 1, \ldots, 1)(y, x, 1, \ldots, 1)$$

по (17) и (11). Следовательно

$$(ax, yx, 1, \ldots, 1) + T(y)(a, x^2, 1, \ldots, 1) + (n-2)T(y)(a, x, x, 1, \ldots, 1) + (ax, ay, 1, \ldots, 1)$$
$$+ (n-2)(ax, x, y, 1, \ldots, 1) - n(n-1)(a, x, 1, \ldots, 1)(y, x, 1, \ldots, 1) =$$
$$T(x)[T(y)(a, x, 1, \ldots, 1) - (ay, x, 1, \ldots, 1) - (n-2)(y, x, 1, \ldots, 1)] \quad (32)$$

согласно (11) и (12). Тогда из (31) и (32) вытекает

$$(ax, yx, 1, \ldots, 1) + T(y)(a, x^2, 1, \ldots, 1) - (ay, x^2, 1, \ldots, 1) =$$
$$T(x)(a, xy, 1, \ldots, 1) - (n-2)T(y)(a, x, x, 1, \ldots, 1) + (n-2)(a, x^2, y, 1, \ldots, 1)+$$
$$(n-2)(a, xy, x, 1, \ldots, 1) + (n-2)(ay, x, x, 1, \ldots, 1) + (n-2)(n-3)(a, x, x, y, 1, \ldots, 1)$$
$$(33)$$

согласно (11). Следовательно

$$\begin{aligned}
&B(x^2a,y)-B(x(xa),y)= \\
&\quad = n(n-1)[(x(xa),y,1,\ldots,1)-(x^2a,y,1,\ldots,1)] && \text{по (17) и (20)} \\
&\quad = n(n-1)[T(x)(xa,y,1,\ldots,1)-(xa,xy,1,\ldots,1) \\
&\qquad -(n-2)(xa,y,x,1,\ldots,1)-T(x^2)(a,y,1,\ldots,1) \\
&\qquad +(a,x^2y,1,\ldots,1)+(n-2)(a,y,x^2,1,\ldots,1)] && \text{по (12)} \\
&\quad = n(n-1)T(x)[(xa,y,1,\ldots,1)-T(x)(a,y,1,\ldots,1)] \\
&\qquad +n(n-1)[2T_2(x)(a,y,1,\ldots,1)-(xa,xy,1,\ldots,1) \\
&\qquad -(n-2)(xa,y,x,1,\ldots,1)+T(y)(a,x^2,1,\ldots,1)-(ay,x^2,1,\ldots,1)] && \text{по (8) и (11)} \\
&\quad = n(n-1)T(x)[-(a,xy,1,\ldots,1)-(n-2)(a,y,x,1,\ldots,1)] \\
&\qquad +n(n-1)[(n-2)(xy,x,a,1,\ldots,1) \\
&\qquad +(n-2)(n-3)(x,x,y,a,1,\ldots,1)+(n-2)(yx,x,a,1,\ldots,1) \\
&\qquad +(n-2)(ax,x,y,1,\ldots,1)+(ax,yx,1,\ldots,1) \\
&\qquad +T(y)(a,x^2,1,\ldots,1)-(ay,x^2,1,\ldots,1)] && \text{по (12) и (30)} \\
&\quad = n(n-1)(n-2)[-T(x)(a,y,x,1,\ldots,1)+2(xy,x,a,1,\ldots,1) \\
&\qquad +2(n-3)(x,x,y,a,1,\ldots,1)+(yx,x,a,1,\ldots,1) \\
&\qquad +(ax,x,y,1,\ldots,1)-T(y)(a,x,x,1,\ldots,1) \\
&\qquad +(a,x^2,y,1,\ldots,1)+(ay,x,x,1,\ldots,1) && \text{по (33)} \\
&\quad = 0 \qquad \text{для всех} \quad y\in A && \text{по (11).}
\end{aligned}$$

Так как B(x,y) невырождена, мы имеем (26); так что A является левоальтернативной. Симметрично, удовлетворяется (27) и A альтернативна, что и требовалось доказать.

Следствие. *Любая конечномерная алгебра A, удовлетворяющая предположениям Теоремы 2 является прямой суммой $A = A_1 \oplus \ldots A_r$ простых идеалов A_i, каждый из которых или ассоциативен, или представляет собой алгебру Кэли над своим центром Z_i.*

Теорема 3. *Пусть F имеет характеристику 0 или $p > n$. Если невырожденная форма $N(x)$ степени n, допускающая композицию, определена на алгебре A (возможно, бесконечномерной) с 1 над F, то любой элемент $x \in A$ удовлетворяет соотношению*

$$x^n - T_1(x)x^{n-1} + T_2(x)x^{n-2} - \ldots + (-1)^n T_n(x)1 = 0. \tag{34}$$

Доказательство. Для $i = 1,\ldots,n-1$, положим $x_1 = x^{n-i}$, $y_1 = \ldots = y_i = x$, $y_{i+1} = \ldots = y_n = 1$ в (6) чтобы получить

$$\begin{aligned}
(x^{n-i+1}, x_2x,\ldots,x_ix,x_{i+1}\ldots,x_n)+\ldots(x^{n-i+1},x_2,\ldots,x_{n-i+1}x,x_{n-i+2}x,\ldots,x_nx)+\ldots \\
+(x^{n-i},x_2x,\ldots,x_{i+1}x,x_{i+2},\ldots,x_n)+\ldots+(x^{n-i},x_2,\ldots,x_{n-i},x_{n-i+1}x,\ldots,x_nx)= \\
=(x^{n-i},x_2,\ldots,x_n)T_i(x) \qquad \text{для} \quad i=1,\ldots,n-1.
\end{aligned} \tag{35}$$

Тогда из (35) и (5) вытекает

$$(x^n - T_1(x)x^{n-1} + T_2(x)x^{n-2} - \ldots + (-1)^n T_n(x)1,\ x_2,\ldots,x_n) = 0 \tag{36}$$

для всех $x_2,\ldots,x_n \in A$, из чего вытекает (34), так как $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ невырождена.

3. Сведение к простым алгебрам. Мы будем предполагать отныне, что алгебра A удовлетворяет предположениям Теоремы 2.

Пусть e – идемпотент $\neq 1$ на A. Тогда из (34) вытекает

$$1 - T(e) + T_2(e) - \ldots + (-1)^{n-1}T_{n-1}(e) = 0, \qquad N(e) = 0, \tag{37}$$

так как e и 1 линейно независимы. Положим $x = e$ в (15) чтобы получить

$$(j+1)T_{i+1}(e) = [T(e) - j]T_i(e) \qquad \text{для} \quad j = 1, \ldots, n-1. \tag{38}$$

Так как $T_n(e) = N(e) = 0$ согласно (37), существует наименьшее целое число m такое, что $T_{m+1}(e) = \ldots = T_n(e) = 0$. Тогда $T_m(e) \neq 0$ с $1 \leqslant m \leqslant n-1$, так как $T_1(e) = \ldots = T_n(e) = 0$ противоречит (37). Полагая $j = m$ в (38), мы имеем

$$T(e) = m, \tag{39}$$

что является частным случаем $i = 1$ соотношения

$$T_i(e) = C_i^m \qquad \text{для} \quad i = 1, \ldots, m. \tag{40}$$

Используя (38), мы докажем (40) с помощью индукции по i, как ниже:

$$T_{i+1}(e) = \frac{m-i}{i+1}T_i(e) = \frac{m-i}{i+1}C_m^i = C_m^{i+1}.$$

Предположим, что существуют идеалы $G \neq 0, G' \neq 0$ такие, что $A = G \oplus G'$. (Это случай, когда алгебра A не проста, но конечномерна, так что $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_r$ с простыми A_i с $r > 1$ согласно Теореме 1(c).) Тогда $1 = e+e'$,где $e \neq 1$ (соответственно, $e' \neq 1$) является единичным элементом на G (соответственно, G'). Для $g \in G, g' \in G'$, определим

$$N_G(g) = N(g + e'), \qquad N_{G'}(g') = N(g' + e). \tag{41}$$

Тогда, для любого $x = g + g' \in A$, из (3) вытекает

$$N(x) = N_G(g)N_{G'}(g') \tag{42}$$

и

$$N_G(g_1g_2) = N_G(g_1)N_G(g_2) \qquad \text{для всех} \quad g_1, g_2 \in G. \tag{43}$$

Мы покажем дальше, что

$$N_G(g) = T_m(g) \qquad \text{для всех} \quad g \in G \qquad \text{где} \quad m = T(e), \tag{44}$$

из чего вытекает, что $N_G(g)$ является формой степени m на G. Симметрично, справедливы формулы для $N_{G'}(g')$, соответствующие (43) и (44), так что $N(x)$ является произведением (42) форм, которые допускают композицию и имеют степени m и m', $n = m + m'$, $m > 0$, $m' > 0$.

Для любого $i = 0, 1, \ldots, n$, положим

$$a = e, \quad x_1 = \ldots = x_i = g \in G, \quad x_{i+1} = \ldots = x_n = e'$$

в (12). Тогда из (39) вытекает

$$(\underbrace{g, \ldots, g}_{i}, e', \ldots, e') = 0 \qquad \text{кроме} \quad i = T(e) = m. \tag{45}$$

Также

$$(\underbrace{g,\ldots,g}_{m},\underbrace{e,\ldots,e}_{i},1,\ldots,1)=0 \qquad \text{для всех} \quad i>0, \tag{46}$$

как мы доказали с помощью индукции по i. Положим

$$j=m, \qquad a=e, \qquad x_1=\ldots=x_m=g\in G$$

в (14), чтобы получить

$$(\underbrace{g,\ldots,g}_{m},e,1,\ldots,1)=0 \tag{47}$$

так как $m<n$. Однако, (47) – это случай $i=1$ соотношения (46). Положим

$$j=m+i, \qquad x_1=\ldots=x_m=g\in G, \qquad a=x_{m+1}=\ldots=x_{m+i}=e$$

в (14), чтобы получить

$$i(\underbrace{g,\ldots,g}_{m},\underbrace{e,\ldots,e}_{i},1,\ldots,1)+(n-m-i)(\underbrace{g,\ldots,g}_{m},\underbrace{e,\ldots,e}_{i+1},1,\ldots,1)=0,$$

так что

$$(\underbrace{g,\ldots,g}_{m},\underbrace{e,\ldots,e}_{i+1},1,\ldots,1)=0$$

согласно предположению (46) индукции. Тогда из (45) и (46) вытекает (44). Согласно (41) мы имеем:

$$\begin{aligned}
N_G(g)&=(g+e',\ldots,g+e')\\
&=\textstyle\sum_{i=0}^{n}C_n^i(\underbrace{g,\ldots,g}_{i},e',\ldots,e')\\
&=C_n^m(\underbrace{g,\ldots,g}_{m},e',\ldots,e')\\
&=C_n^m(\underbrace{g,\ldots,g}_{m},1-e,\ldots,1-e)\\
&=C_n^m\textstyle\sum_{i=0}^{n-m}(-1)^iC_{n-m}^i(\underbrace{g,\ldots,g}_{m},\underbrace{e,\ldots,e}_{i},1.\ldots,1)\\
&=C_n^m(\underbrace{g,\ldots,g}_{m},1,\ldots,1)\\
&=T_m(g).
\end{aligned}$$

Далее мы покажем, что $N_G(g)$ невырождена на G (и симметрично $N_{G'}(g')$ невырождена на G'). Согласно (8) и (44) форма $N_G(g)$ имеет ассоциированную симметричную m-линейную форму $C_n^m(g_1,\ldots,g_m,1,\ldots,1)$, $g_i\in G$. Предположим, что $(g_1,g_2,\ldots,g_m,1,\ldots,1)=0$ для всех $g_2,\ldots,g_m\in G$. Чтобы показать, что $g_1=0$, как требуется, мы сначала покажем, что $T(g_1)=0$. Зададим

$$(\underbrace{g_1,e,\ldots,e}_{m},1,\ldots,1)=0,$$

что является частным случаем $i=0$ соотношения

$$(\underbrace{g_1,e,\ldots,e}_{m-i},1,\ldots,1)=0 \qquad i=0,1,\ldots,m-1. \tag{48}$$

При доказательстве (48) по индукции, положим

$$j = m - i - 1, \qquad x_1 = g_1, \qquad a = x_2 = \ldots = x_{m-i-1} = e$$

в (14), чтобы получить

$$(i+1)(\underbrace{g_1, e, \ldots, e}_{m-i-1}, 1, \ldots, 1) = (n - m + i + 1)(\underbrace{g_1, e, \ldots, e}_{m-i}, 1, \ldots, 1) = 0$$

согласно предположению индукции, из чего вытекает

$$(\underbrace{g_1, e, \ldots, e}_{m-(i+1)}, 1, \ldots, 1) = 0,$$

что и требовалось. Случай $i = m - 1$ в (48) дает $T(g_1) = 0$. Для любого $y = g + g'$ из A ($g \in G$, $g' \in G'$), мы имеем

$$B(g_1, y) = T(g_1 y) = T(g_1 g) = T(g_1)T(g) - n(n-1)(g_1, g, 1, \ldots, 1) = -n(n-1)(g_1, g, 1, \ldots, 1)$$

согласно (17). Но мы задались

$$(\underbrace{g_1, g, e, \ldots, e}_{m}, 1, \ldots, 1) = 0,$$

который является случаем $i = 0$ соотношения

$$(\underbrace{g_1, g, e, \ldots, e}_{m-i}, 1, \ldots, 1) = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, m-2, \tag{49}$$

которое мы докажем по индукции следующим образом: положим

$$j = m - i - 1, \qquad x_1 = g_1, \qquad x_2 = g, \qquad a = x_3 = \ldots = x_{m-i-1} = e$$

в (14), чтобы получить

$$(i+1)(\underbrace{g_1, g, e, \ldots, e}_{m-i-1}, 1, \ldots, 1) = (n - m + i + 1)(\underbrace{g_1, g, e, \ldots, e}_{m-i}, 1, \ldots, 1) = 0$$

согласно предположению индукции (49). Поэтому

$$(\underbrace{g_1, g, e, \ldots, e}_{m-(i+1)}, 1, \ldots, 1) = 0,$$

что и требовалось. Случай $i = m - 2$ соотношения (49) дает

$$B(g_1, y) = -n(n-1)(g_1, g, 1, \ldots, 1) = 0$$

для всех $y \in A$, из чего вытекает $g_1 = 0$ так как $B(x, y)$ невырождена. Поэтому $N_G(g)$ невырождена на G (и то же самое относится к $N_{G'}(g')$ на G').

Так как F имеет характеристику 0 или $p > n > m$ (соответственно, m'), это доказательство может быть повторено для G и G'. В случае конечномерной алгебры мы за конечное число шагов получаем

Теорема 4. Пусть поле F имеет характеристику 0 или $p > n$. Пусть A – конечномерная алгебра с 1 над F, на которой определена невырожденная форма $N(x)$

степени n, допускающая композицию, так что $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_r$ с простыми (альтернативными) A_i. Тогда $N(x) = N_1(x_1) \cdots N_r(x_r)$, где $x = x_1 + \ldots + x_r,\ x_i \in A_i$, и $N_i(x_i)$ – невырожденная форма степени n_i на A_i, которая допускает композицию, $n = n_1 + \ldots + n_r$.

Теорема 4 сводит определение формы $N(x)$ на конечномерной A к рассмотрению простых алгебр. Таким образом, для конечномерной A исходное предположение для произвольного n сводится к следующему: что форма $N_i(x_i)$ любой степени $n_i \leqslant n$, допускающая композицию на простой альтернативной алгебре A_i, является степенью общей (generic) нормы для A_i.

Как было отмечено в последнем абзаце перед §1, Натан Джекобсон информировал автора после того, как данная статья была написана, что он доказал, что форма степени n, допускающая композицию на конечномерной простой альтернативной алгебре над полем, содержащим более чем n элементов, является степенью общей нормы. Этот результат появится в виде Следствия Теоремы 3 работы, озаглавленной "Общая (Generic) Норма Алгебры", направленной в Osaka Mathematical Journal. Это завершает доказательство для конечномерной A предположения, высказанного в [9] и делает следующую секцию (§4) данной работы необязательной.

4. Квадраформы (quartic forms). Мы докажем для квадраформ на конечномерных алгебрах с помощью метода, использованного для кубических форм в [9], что $N(x)$ дается посредством (1) с $n = 4$ в (2).

Теорема 5. *Пусть A – конечномерная неассоциативная алгебра с 1 над F характеристики $\neq 2, 3$. Необходимое и достаточное условие для существования невырожденной квадраформы $N(x)$, допускающей композицию, на A является, что A представляет собой сепарабельную альтернативную алгебру $A = A_1 \oplus \ldots A_r, A_i$ простые, для которой $N(x)$ дается посредством (1) с $n = 4$ в (2). Таким образом, A имеет размерность* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12$ *или* 16.

Доказательство. Достаточное условие очевидно и нам остается доказать лишь необходимое. Согласно Теореме 4 мы можем положить A простой, так как соответствующий результат уже известен для степени < 4. (Нужно подчеркнуть, что метод доказательства в [9] требует дополнительного предположения, что F имеет характеристику $\neq 5$. Доказательство в [9] основывается на [3], где предположение, что характеристика $\neq 5$ не может быть обойдено ([3, 320]). Однако, доказательство Следствия из Теоремы 2 в настоящей работе (которое включает случай $n = 3$) не требует никаких дополнительных предположений о характеристике. Тогда из [9, §3] следует, что формулировка Теоремы в [9] корректна.)

Пусть K – алгебраическое замыкание F. Тогда A_K – конечномерная алгебра с 1 над K, на A_K существует невырожденная форма степени n, допускающая композицию. Все результаты по данному вопросу остаются справедливыми для A_K, мы имеем $A_K = D_1 \oplus \ldots \oplus D_d$, где D_i – расщепляемая центральная простая альтернативная алгебра над K, $D_1 \cong D_2 \cong \ldots \cong D_d$. Если $d > 1$, существует невырожденная форма степени n_i, допускающая композицию на D_i, $1 \leqslant n_1 \leqslant \ldots \leqslant n_d$, $\sum n_i = 4$. Если $n_1 = 1$, то $D_1 (\cong D_i)$ является 1-мерной над K с $d = 2, 3$ или 4. Если $n_1 = 2$, то $n_2 = 2$, $d = 2$, и мы знаем, что $dim\, D_i = 1, 4$ или 8. Соответственно, существуют следующие возможности для A:

(A) A является квадраполем (quartic field) над F $(n_1 = 1,\ d = 4)$;
(B) A – кубическое поле над F $(n_1 = 1,\ d = 3)$;
(C) A – квадратичное поле над F $(n_1 = 1,\ d = 2$; также $n_1 = 2,\ dim\, D_i = 1)$;

(D) A – (обобщенная) кватернионная алгебра над своим центром Z, квадратичное расширение F $(n_1 = 2,\ dim\, D_i = 4)$;

(E) A – алгебра Кэли над своим центром Z, квадратичное расширение F $(n_1 = 2,\ dim\, D_i = 8)$;

(F) A – центральная простая алгебра $(d = 1)$.

Согласно (34) с $n = 4$ возможности в случае (F) таковы:

$(F, 1)$ $A = F1$ (так что $N(\alpha 1) = \alpha^4, \alpha \in F$);

$(F, 2)$ A – (обобщенная) кватернионная алгебра или алгебра Кэли над F:

$(F, 3)$ A – центральная простая ассоциативная алгебра степени 3 над F;

$(F, 4)$ A – центральная простая ассоциативная алгебра степени 4 над F.

С очевидностью, возможности (A), (D), (E) и $(F, 4)$ могут иметь место. В этих случаях про квадраформу $N(x)$ известно, что она должна быть общей (generic) нормой. Также (C) и $(F, 2)$ могут иметь место с $N(x) = [n(x)]^2$, где $n(x)$ – общая норма для A; в Лемме 1 мы покажем, что никаких других $N(x)$ не может быть для (C) или $(F, 2)$. Наконец, мы докажем в Лемме 2, что (B) и $(F, 3)$ не могут иметь места. Это, вместе с Леммами 1 и 2, завершает доказательство Теоремы 5.

Лемма 1. *Пусть F имеет характеристику $\neq 2, 3$, и пусть алгебра A с общей (generic) $n(x)$ является одной из следующих:*

(i) квадратичное поле над F;

(ii) (обобщенная) кватернионная алгебра или алгебра Кэли над F.

Если $N(x)$ – невырожденная квадраформа наA, допускающая композицию, то $N(x) = [n(x)]^2$.

Доказательство. В обоих случаях (i) и (ii) общее (generic) минимальное уравнение для $x \in A$ ([6], стр. 180) таково:

$$x^2 - t(x)x + n(x)1 = 0. \tag{50}$$

Кроме того, $A = F1 + M$, где $M = \{x_0 | x_0 \in A, t(x_0) = 0\}$. В случае (i) мы имеем $M = Fu_0$, где $u_0^2 = \beta 1 = -n(u_0)1$, β неквадратична на F, в то время как в случае (ii) квадратичная форма f, определенная на M посредством

$$x_0^2 = f(x_0)1 = -n(x_0)1 \qquad \text{для всех} \quad x_0 \in M \tag{51}$$

невырождена. Теперь из (50) и (34) с $n = 4$ вытекает

$$T_3(x_0) = T(x_0)n(x_0) \qquad \text{для всех} \quad x_0 \in M \tag{52}$$

и

$$N(x_0) = T_2(x_0)n(x_0) - [n(x_0)]^2 \qquad \text{для всех} \quad x_0 \in M. \tag{53}$$

Полагая $j = 2$ в (15), мы имеем

$$3T_3(x_0) = T(x_0)T_2(x_0) + 3T(x_0)n(x_0).$$

Поэтому из (52) вытекает $T(x_0)T_2(x_0) = 0$ для всех $x_0 \in M$, где

$$2T_2(x_0) = [T(x_0)]^2 + 4n(x_0) \qquad \text{для всех} \quad x_0 \in M \tag{54}$$

по (18). Существует достаточно много несовпадающих элементов в F, чтобы мы сделали вывод, что мы имеем либо

$$T(x_0) = 0 \qquad \text{для всех} \quad x_0 \in M, \tag{55}$$

либо $T_2(x_0) = 0$ для всех $x_0 \in M$, так что

$$-n(x_0) = \Big[\frac{1}{2}T(x_0)\Big]^2 \qquad \text{для всех} \quad x_0 \in M \tag{56}$$

по (54). Предположим, что (56) верно. В случае (i) мы имеем $\beta = -n(u_0)$, квадрат на F, что является противоречием. В случае (ii) мы имеем невырожденную квадратичную форму $f(x_0) = -n(x_0)$, квадрат линейной формы на M, из чего вытекает, что M одномерна, противоречие. Мы доказали (55). Тогда

$$T_2(x_0) = 2n(x_0), \qquad t_3(x_0) = 0, \qquad N(x_0) = [n(x_0)]^2$$

согласно (54), (52) и (53). Для любого $x = \alpha 1 + x_0 (\alpha \in F, x_0 \in M)$ мы имеем

$$N(x) = N(\alpha 1 + x_0) = \sum_{i=0}^{4} \alpha^{4-i} T_i(x_0) = [\alpha^2 + n(x_0)]^2 = [n(x)]^2,$$

что и требовалось.

Лемма 2. *Пусть F имеет характеристику $\neq 2, 3$. Невырожденная квадраформа, допускающая композицию, не может быть определена на (i) кубическом поле A над F, (ii) центральной простой ассоциативной алгебре A степени 3 над F.*

Доказательство. В случае (ii) мы можем положить, что F алгебраически замкнуто, так как невырожденная квадраформа, допускающая композицию, существует на A только, если существует такая форма на A_K, где K – алгебраическое замыкание F. Поэтому в (ii) мы можем считать, что A – алгебра всех матриц 3×3 над алгебраически замкнутым полем F. В обоих случаях (i) и (ii) общее (generic) минимальное уравнение для $x \in A$ таково:

$$x^3 - t(x)x^2 + q(x)x - n(x)1 = 0, \tag{57}$$

где $t(x)$ (соответственно, $q(x)$, $n(x)$) – линейная (соответственно, квадратичная, кубическая) форма на A, $n(x)$ – общая норма. Также $A = F1 + M$, где M состоит из всех x_0, удовлетворяющих $t(x_0) = 0$. В случае (i) M содержит u_0 (удовлетворяющее $u_0^3 = -q(u_0)u_0 + n(u_0)1$) такое, что

$$\lambda^3 + q(u_0)\lambda - n(u_0) \qquad \text{неприводимо}, \tag{58}$$

в то время, как в случае (ii) $t(x)$ – обычный след и $n(x) = det\, x$ – детерминант 3×3 матрицы x. Теперь из (34) с $n = 4$ и (57) вытекает

$$[T_2(x_0) - q(x_0)]x_0^2 + [T(x_0)q(x_0) + n(x_0) - T_3(x_0)]x_0 + [N(x_0) - T(x_0)n(x_0)]1 = 0$$

для всех $x_0 \in M$, так что в обоих случаях (i) и (ii) мы имеем

$$T_2(x_0) = q(x_0), \qquad T_3(x_0) = T(x_0) + n(x_0), \qquad N(x_0) = T(x_0)n(x_0) \tag{59}$$

для всех $x_0 \in M$. Теперь из (12) следует

$$3(x^2x, x, x, 1) + (x, x, x, x^2) = T(x^2)(x, x, x, 1)$$

для всех $x \in A$, так что из (57), (7), (18) и (59) вытекает

$$q(x_0)[[T(x_0)^3] + T(x_0)q(x_0) - n(x_0)] = 0 \qquad \text{для всех} \quad x_0 \in M. \tag{60}$$

В случае (i) мы имеем либо

$$q(u_0) = 0, \tag{61}$$

либо

$$n(u_0) = [T(u_0)]^3 + T(u_0)q(u_0). \tag{62}$$

Если (62) верно, то $\lambda^3 + q(u_0)\lambda - n(u_0)\lambda$ имеет своим делителем $\lambda - T(u_0)$ в противоречии с (58). Если (61) верно, то $u_0^3 = n(u_0)1$ так что $T(u_0^3) = 4n(u_0)$, тогда как $T(u_0^3) = [T(u_0)]^3 + 3n(u_0)$ согласно (17), (15) с $j = 2$, (18) и (59). Следовательно, $n(u_0) = [T(u_0)]^3$, куб на F, так что $\lambda^3 - n(u_0)$ приводимо,что противоречит (58) и исключает (i).

В случае (ii) алгебраически замкнутое поле F содержит бесконечно много элементов, так что из (60) следует, что либо $q(x_0) = 0$ для всех $x_0 \in M$, либо

$$n(x_0) = [T(x_0)]^3 + T(x_0)q(x_0) \qquad \text{для всех} \quad x_0 \in M. \tag{63}$$

Однако, легко найти 3×3 матрицы $x_0 \in M$ такие, что $q(x_0) \neq 0$ (например, если элементы обычного матричного базиса обозначить как e_{ij}, то матрица $x_0 = e_{12} + e_{21}$ будет удовлетворять этому). Поэтому (63) верно и длялюбого $x = \alpha 1 + x_0 \ \in A$ ($T(x) = 3\alpha$), мы имеем

$$det\, x = det(\alpha 1 = x_0) = n(\alpha 1 + x_0) = \alpha^3 + \alpha^2 t(x_0) + \alpha q(x_0) + n(x_0) = \\ [\alpha + T(x_0)][\alpha^2 - \alpha T(x_0) + [T(x_0)]^2 + q(x_0)],$$

так что детерминант $det\, x$ имеет линейным делителем $t(x)/3 + T(x_0) = T(x) - t(x)$, противоречие. Это завершает доказательство Леммы 2 и Теоремы 5.

Замечание. Как в [7] и [9], легко видеть, что даже без допущения в Теореме 5, что алгебра A содержит 1, возможные размерности A есть $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10$ или 16.

Литература

1. A. A. Albert. Quadratic forms permitting composition. Ann. of Math. **43** (1942), 161-177.

2. A. A. Albert. Power-associative rings. Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 552-593.

3. A. A. Albert. A theory of trace-admissible algebras. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **35** (1949), 317-322.

4. W. Feller. An Introduction to Probability Theory and its Applications (2nd edition). Wiley, New York, 1959.

5. N. Jacobson. Composition algebras and their automorphisms. Rend. Circ. Mat. Palermo **7** (1958), 55-80.

6. N. Jacobson. Some groups of linear transformations defined by Jordan algebras, I. J. reine angew. Math. **201** (1959), 178-195.

7. I. Kaplansky. Infinite-dimensional quadratic forms permitting composition. Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 956-960.

8. R. D. Schafer. Noncommutative Jordan algebras of characteristic 0. Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 472-475.

9. R. D. Schafer. On cubic forms permitting composition. Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 917-925.

10. R. D. Schafer. Cubic forms permitting a new type of composition. J. Math. Mech. **10** (1961), 159-174.

11. R. D. Schafer. "An Introduction to Nonassociative Algebras" (multilith), Oklahoma State University, 1961.

Массачусеттский Технологический институт,
Кембридж, Массачусеттс