ЛАГРАНЖЕВ ПОДХОД В $(N+1)$-МЕРНОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ "ЭЙНШТЕЙНА-ГАУССА-БОННЕ" И N-МЕРНАЯ МЕТРИКА БЕРВАЛЬДА-МООРА

В. Д. Иващук

Центр гравитации и фундаментальной метрологии, ВНИИМС, Москва,
Институт гравитации и космологии, РУДН, Москва
ivashchuk@mail.ru

Рассмотрена $(n+1)$-мерная модель "Эйнштейна-Гаусса-Бонне" (ЭГБ). В случае диагональных космологических метрик уравнения движения записаны в виде системы уравнений Лагранжа с лагранжианом, содержащим две "минисуперметрики" на $\mathbb{R}^n$: 2-метрику псевдоевклидовой сигнатуры и финслерову 4-метрику, пропорциональную n-мерной 4-метрике Бервальда-Моора. В случае синхронной временной переменной уравнения движения сводятся к автономной системе дифференциальных уравнений первого порядка. В случае "чистой" модели Гаусса-Бонне выписаны точные решения со степенным и экспоненциальным поведением масштабных факторов (по отношению к синхронной временной переменной). В случае ЭГБ космологии показано, что для всякого нетривиального решения с экспоненциальным поведением масштабных факторов $a_i(\tau) = A_i \exp(v^i \tau)$ имеет место не более трёх различных чисел среди $v^1, ..., v^n$.

Ключевые слова: космологические метрики, модель "Эйнштейна-Гаусса-Бонне", метрика Бервальда-Моора.

1 Введение

В настоящей работе рассматривается так называемая D-мерная гравитационная модель "Эйнштейна-Гаусса-Бонне" (ЭГБ). Действие имеет вид

$$S = \int_M d^D z \sqrt{|g|} \{\alpha_1 R[g] + \alpha_2 \mathcal{L}_2[g]\}, \tag{1.1}$$

где метрика $g = g_{MN} dz^M \otimes dz^N$ определена на многообразии M, $\dim M = D$, $|g| = |\det(g_{MN})|$ и

$$\mathcal{L}_2 = R_{MNPQ} R^{MNPQ} - 4 R_{MN} R^{MN} + R^2 \tag{1.2}$$

– скаляр Гаусса-Бонне. Здесь α_1 и α_2 суть константы. Появление скаляра Гаусса-Бонне в многомерной гравитации мотивируется теорией струн [1, 2].

В настоящее время модель ЭГБ и её обобщения широко используются в космологии, см. [3,4] (для $D = 4$), [5]- [12] и ссылки там, в т. ч. для объяснения ускоренного расширения Вселенной в согласии с наблюдательными данными по сверхновым (типа Ia) [13]. В ряде работ [5]– [12] были получены точные космологические решения в модели ЭГБ.

В данной работе рассматриваются космологические решения с диагональными метриками, которые управляются масштабными факторами, зависящими от временной переменной.

При $\alpha_2 = 0$ получим решение казнеровского типа с метрикой

$$g = -d\tau \otimes d\tau + \sum_{i=1}^{n} A_i^2 \tau^{2p^i} dy^i \otimes dy^i, \tag{1.3}$$

где $A_i > 0$ – произвольные константы интегрирования, $D = n + 1$ и параметры p^i удовлетворяют соотношениям $\sum_{i=1}^{n} p^i = \sum_{i=1}^{n} (p^i)^2 = 1$ и, следовательно, $\sum_{1 \le i < j \le n} p^i p^j = 0$. Для $D = 4$ это известное решение Казнера [14].

В работе Н. Дерюэль [6] рассматривалась модель ЭГБ. В случае "чистой" модели Гаусса-Бонне с $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 \neq 0$ в [6] было получено космологическое решение с метрикой (1.3) для $n = 4, 5$ и параметрами, удовлетворяющими соотношениям

$$\sum_{i=1}^{n} p^i = 3, \qquad \sum_{1 \le i < j < k < l \le n} p^i p^j p^k p^l = 0. \tag{1.4}$$

В работе С. Павлюченко [15] это решение было проверено для всех $n > 3$ (при $n = 6, 7$ оно было проверено ранее А. Топоренским и П. Третьяковым [9]).

В настоящей работе рассматриваются космологические решения со степенным и экспоненциальным поведением масштабных факторов для произвольных n. Отметим, что численный анализ космологических решений в ЭГБ-гравитации для $D = 5, 6$ [11] показал, что сингулярные решения типа (1.3), (1.4) могут возникать как асимптотические решения при определённых начальных условиях по аналогии с тем, как это имеет место для решений казнеровского типа.

2 Космологическая модель и её эффективный лагранжиан

2.1 Модель

Рассмотрим многообразие

$$M = \mathbb{R}_* \times M_1 \times \ldots \times M_n, \tag{2.1}$$

с метрикой

$$g = -e^{2\gamma(t)} dt \otimes dt + \sum_{i=1}^{n} e^{2\beta^i(t)} dy^i \otimes dy^i, \tag{2.2}$$

где M_i – 1-мерное многообразие с метрикой $g^i = dy^i \otimes dy^i$, $i = 1, \ldots, n$. Здесь и ниже $\mathbb{R}_* = (t_-, t_+)$ – открытое подмножество в $\mathbb{R}$. (Функции $\gamma(t)$ и $\beta^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, суть гладкие функции на $\mathbb{R}_*$.)

Подынтегральное выражение (1.1) при подстановке в него метрики (2.2) запишется следующим образом [6, 16]

$$\sqrt{|g|}\{\alpha_1 R[g] + \alpha_2 \mathcal{L}_2[g]\} = L + \frac{df}{dt}, \tag{2.3}$$

где

$$L = \alpha_1 e^{-\gamma+\gamma_0} G_{ij} \dot{\beta}^i \dot{\beta}^j - \frac{1}{3} \alpha_2 e^{-3\gamma+\gamma_0} G_{ijkl} \dot{\beta}^i \dot{\beta}^j \dot{\beta}^k \dot{\beta}^l, \tag{2.4}$$

$\gamma_0 = \sum_{i=1}^{n} \beta^i$ и

$$G_{ij} = \delta_{ij} - 1, \tag{2.5}$$
$$G_{ijkl} = (\delta_{ij} - 1)(\delta_{ik} - 1)(\delta_{il} - 1)(\delta_{jk} - 1)(\delta_{jl} - 1)(\delta_{kl} - 1) \tag{2.6}$$

суть, соответственно, компоненты двух "минисуперметрик" на $\mathbb{R}^n$. Первая метрика – это известная 2-метрика псевдоевклидовой сигнатуры: $< v_1, v_2 >= G_{ij} v_1^i v_2^j$, а вторая – это финслерова 4-метрика: $< v_1, v_2, v_3, v_4 >= G_{ijkl} v_1^i v_2^j v_3^k v_4^l$, $v_s = (v_s^i) \in \mathbb{R}^n$, где $< .,. >$ и $< .,.,.,. >$ суть, соответственно, 2- и 4-линейные симметричные формы на $\mathbb{R}^n$. (Здесь и ниже обозначено $\dot{A} = dA/dt$ и т. д.)

Явный вид функции $f = f(\gamma, \beta, \dot{\beta})$ в (2.3) приведен в [16].

Вывод (2.4) основан на следующих тождествах [16]:

$$G_{ij} v^i v^j = \sum_{i=1}^{n} (v^i)^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n} v^i\Big)^2, \tag{2.7}$$

$$G_{ijkl} v^i v^j v^k v^l = \Big(\sum_{i=1}^{n} v^i\Big)^4 - 6\Big(\sum_{i=1}^{n} v^i\Big)^2 \sum_{j=1}^{n} (v^j)^2$$
$$+3\Big(\sum_{i=1}^{n} (v^i)^2\Big)^2 + 8\Big(\sum_{i=1}^{n} v^i\Big) \sum_{j=1}^{n} (v^j)^3 - 6 \sum_{i=1}^{n} (v^i)^4. \tag{2.8}$$

Из определений (2.5) и (2.6) следует, что

$$G_{ij} v^i v^j = -2 \sum_{i<j} v^i v^j, \tag{2.9}$$

$$G_{ijkl} v^i v^j v^k v^l = 24 \sum_{i<j<k<l} v^i v^j v^k v^l. \tag{2.10}$$

В силу (2.10) $G_{ijkl} v^i v^j v^k v^l = 0$ для $n = 1, 2, 3$ ($D = 2, 3, 4$). При $n = 4$ ($D = 5$) $G_{ijkl} v^i v^j v^k v^l = 24 v^1 v^2 v^3 v^4$ и 4-метрика пропорциональна известной 4-метрике Бервальда-Моора [17, 18] (см. также [19, 20] и ссылки там). Напомним, что 4-мерная метрика Бервальда-Моора удовлетворяет соотношениям: $< v, v, v, v >_{BM}= v^1 v^2 v^3 v^4$. Финслерова 4-метрика с компонентами (2.6) совпадает с точностью до множителя с n-мерным аналогом 4-метрики Бервальда-Моора.

2.2 Уравнения движения

Уравнения движения, отвечающие действию (1.1) имеют следующий вид

$$\mathcal{E}_{MN} = \alpha_1 \mathcal{E}^{(1)}_{MN} + \alpha_2 \mathcal{E}^{(2)}_{MN} = 0, \tag{2.11}$$

где

$$\mathcal{E}^{(1)}_{MN} = R_{MN} - \frac{1}{2} R g_{MN}, \tag{2.12}$$

$$\mathcal{E}^{(2)}_{MN} = 2(R_{MPQS} {R_N}^{PQS} - 2 R_{MP} {R_N}^P$$
$$-2 R_{MPNQ} R^{PQ} + R R_{MN}) - \frac{1}{2} \mathcal{L}_2 g_{MN}. \tag{2.13}$$

Уравнения поля (2.11) для метрики (2.2) эквивалентны уравнениям Лагранжа, отвечающим лагранжиану L из (2.4) [16]:

$$\alpha_1 G_{ij} \dot{\beta}^i \dot{\beta}^j - \alpha_2 e^{-2\gamma} G_{ijkl} \dot{\beta}^i \dot{\beta}^j \dot{\beta}^k \dot{\beta}^l = 0, \tag{2.14}$$

$$\frac{d}{dt}[2\alpha_1 G_{ij} e^{-\gamma+\gamma_0} \dot{\beta}^j - \frac{4}{3} \alpha_2 e^{-3\gamma+\gamma_0} G_{ijkl} \dot{\beta}^j \dot{\beta}^k \dot{\beta}^l] - L = 0, \tag{2.15}$$

$i = 1, \dots, n$. В силу (2.14)

$$L = \frac{2}{3} e^{-\gamma+\gamma_0} \alpha_1 G_{ij} \dot{\beta}^i \dot{\beta}^j. \tag{2.16}$$

3 Точные решения в модели Гаусса-Боннэ

Здесь мы полагаем $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 \neq 0$, т. е. мы рассматриваем космологическую модель с действием

$$S_2 = \alpha_2 \int_M d^D z \sqrt{|g|} \mathcal{L}_2[g]. \tag{3.1}$$

Уравнения движения (2.14), (2.15) в этом случае имеют следующий вид

$$G_{ijkl} \dot{\beta}^i \dot{\beta}^j \dot{\beta}^k \dot{\beta}^l = 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-3\gamma+\gamma_0} G_{ijkl} \dot{\beta}^j \dot{\beta}^k \dot{\beta}^l \right] = 0, \tag{3.3}$$

$i = 1, \ldots, n$. Здесь $L = 0$ в силу (3.2).

Положим $\ddot{\beta}^i = 0$ для всех i, что равносильно,

$$\beta^i = c^i t + c_0^i, \tag{3.4}$$

где c^i и c_0^i суть константы, $i = 1, \ldots, n$. Положим также

$$3\gamma = \gamma_0 = \sum_{i=1}^{n} \beta^i, \tag{3.5}$$

т. е. мы используем "модифицированную гармоническую" временную переменную. Напомним, что в случае $\alpha_1 \neq 0$ и $\alpha_2 = 0$ выбор $\gamma = \gamma_0$ отвечает гармонической временной переменной t [23].

Уравнения (3.3) при этом удовлетворяются тождественно, а уравнение (3.2) приводит к следующему уравнению связи

$$G_{ijkl} c^i c^j c^k c^l = 24 \sum_{i<j<k<l} c^i c^j c^k c^l = 0. \tag{3.6}$$

3.1 Решение со степенным поведением масштабных факторов

Рассмотрим решение с $\sum\limits_{i=1}^{n} c^i \neq 0$.

Вводя синхронную временную переменную $\tau = \frac{1}{c}\exp(ct + c_0)$, где $c = \frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{n} c^i$, $c_0 = \frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{n} c_0^i$, и определяя новые параметры $p^i = c^i/c$, $A_i = \exp[c_0^i + p^i(\ln c - c_0)]$, получим "степенное" решение с метрикой

$$g = -d\tau \otimes d\tau + \sum_{i=1}^{n} A_i^2 \tau^{2p^i} dy^i \otimes dy^i, \tag{3.7}$$

где $A_i > 0$ – произвольные постоянные, а параметры p^i удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{n} p^i = 3, \tag{3.8}$$

$$G_{ijkl} p^i p^j p^k p^l = 24 \sum_{i<j<k<l} p^i p^j p^k p^l = 0. \tag{3.9}$$

Это решение сингулярно для любого набора параметров [16]. Для $n = 4, 5$ оно было получено ранее Н. Дерюэль [6] и проверено А. Топоренским и П. Третьяковым [9] ($n = 6, 7$) и С. Павлюченко [15] (для всех $n > 3$).

При $D > 4$ метрика (3.7) является решением уравнений движения (2.11) тогда и только тогда, когда набор параметров $p = (p^1, ..., p^n)$ либо удовлетворяет соотношениям (3.8) и (3.9), либо $p = (a, b, 0, ..., 0), (a, 0, b, 0, ..., 0), \ldots$, где a, b – произвольные вещественные числа [16].

Для $D = 2, 3, 4$ метрика (3.7) удовлетворяет уравнениям движения (2.11) для любого набора параметров p^i.

3.2 Решения с экспоненциальным поведением масштабных факторов

Рассмотрим решения с $\sum\limits_{i=1}^{n} c^i = 0$. Вводя синхронную временную переменную $\tau = t \exp(c_0)$, где $c_0 = \frac{1}{3} \sum\limits_{i=1}^{n} c_0^i$ и определяя параметры $v^i = c^i \exp(-c_0)$, $B_i = \exp(c_0^i)$, получим несингулярное космологическое решение с метрикой

$$g = -d\tau \otimes d\tau + \sum_{i=1}^{n} B_i^2 e^{2v^i \tau} dy^i \otimes dy^i, \qquad (3.10)$$

где $B_i > 0$ – произвольные постоянные и параметры v^i удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{n} v^i = 0, \qquad (3.11)$$

$$G_{ijkl} v^i v^j v^k v^l = 24 \sum_{i<j<k<l} v^i v^j v^k v^l = 0. \qquad (3.12)$$

Замечание. Для $D = 4$ ($n = 3$) уравнения движения (3.2), (3.3) удовлетворяются тождественно для произвольных (гладких) функций $\beta^i(t)$ и $\gamma(t)$. Это находится в согласии с тем фактом, что в размерности $D = 4$ действие (3.1) является топологическим инвариантом и его вариация тождественно равна нулю.

4 Сведение к автономной системе дифференциальных уравнений первого порядка

Положим теперь $\gamma = 0$, т. е. мы рассмотрим "синхронную" временную калибровку. Обозначим $t = \tau$. Вводя "хаббловские" переменные $h^i = \dot{\beta}^i$, запишем уравнения (2.14) и (2.15) в следующем виде

$$\alpha_1 G_{ij} h^i h^j - \alpha_2 G_{ijkl} h^i h^j h^k h^l = 0, \qquad (4.1)$$

$$\left[2\alpha_1 G_{ij} h^j - \frac{4}{3}\alpha_2 G_{ijkl} h^j h^k h^l\right] \sum_{s=1}^{n} h^s + \frac{d}{d\tau}\left[2\alpha_1 G_{ij} h^j - \frac{4}{3}\alpha_2 G_{ijkl} h^j h^k h^l\right] - L = 0, \qquad (4.2)$$

$i = 1, \ldots, n$, где

$$L = \alpha_1 G_{ij} h^i h^j - \frac{1}{3}\alpha_2 G_{ijkl} h^i h^j h^k h^l. \qquad (4.3)$$

В силу (4.1) $L = \frac{2}{3}\alpha_1 G_{ij} h^i h^j$. Таким образом, мы приходим к автономной системе дифференциальных уравнений первого порядка на $h^1(\tau), ..., h^n(\tau)$.

При изучении данной системы уравнений наряду с формулами (2.7), (2.8) могут быть использованы следующие полезные соотношения для слагаемых в (4.2) (с $v^i = h^i$) [16]

$$G_{ij} v^j = v^i - S_1, \qquad (4.4)$$

$$G_{ijkl} v^j v^k v^l = S_1^3 + 2S_3 - 3S_1 S_2 + 3(S_2 - S_1^2) v^i + 6 S_1 (v^i)^2 - 6 (v^i)^3, \qquad (4.5)$$

$i = 1, \dots, n$, где $S_k = S_k(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} (v^i)^k$.

Рассмотрим неподвижную точку системы уравнений (4.1), (4.2): $h^i(\tau) = v^i$, где вектор $v = (v^i)$ отвечает решению

$$\beta^i = v^i \tau + \beta^i_0, \tag{4.6}$$

и β^i_0 суть постоянные, $i = 1, \dots, n$. В этом случае мы получим метрику (3.10) с экспоненциальным поведением масштабных факторов.

Положим $\alpha_1 \neq 0$ и $\alpha_2 \neq 0$. Для неподвижной точки $v = (v^i)$ получим систему полиномиальных уравнений

$$G_{ij} v^i v^j - \alpha G_{ijkl} v^i v^j v^k v^l = 0, \tag{4.7}$$

$$\left[2G_{ij} v^j - \frac{4}{3} \alpha G_{ijkl} v^j v^k v^l \right] \sum_{s=1}^{n} v^s - \frac{2}{3} G_{ij} v^i v^j = 0, \tag{4.8}$$

$i = 1, \dots, n$, где $\alpha = \alpha_2 / \alpha_1$.

При $n > 3$ возникает система полиномиальных уравнений уравнений четвёртого порядка.

Тривиальное решение $v = (v^i) = (0, ..., 0)$ отвечает плоской метрике g.

Для любого нетривиального решения v получим $\sum\limits_{i=1}^{n} v^i \neq 0$ (в противном случае из (4.8) следует $G_{ij} v^i v^j = \sum\limits_{i=1}^{n} (v^i)^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} v^i)^2 = 0$, откуда получим $v = (0, \dots, 0)$).

Рассмотрим изотропный случай $v^1 = ... = v^n = a$. Тогда система уравнений (4.7), (4.8) сводится к уравнению

$$n(n-1)a^2 + \alpha n(n-1)(n-2)(n-3)a^4 = 0. \tag{4.9}$$

Для $n = 1$ параметр a произволен и $a = 0$ для $n = 2, 3$. При $n > 3$ ненулевое решение уравнения (4.9) существует лишь при $\alpha < 0$ и в этом случае

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{|\alpha|(n-2)(n-3)}}. \tag{4.10}$$

Здесь возникает проблема классификации всех решений уравнений (4.7), (4.8) при заданном n. В литературе рассматривались (для ряда размерностей) некоторые частные решения вида $(a, ..., a, b, ..., b)$, в контексте космологии с двумя фактор-пространствами, см. например, [5, 7, 8, 12].

Ниже мы выделим три свойства решений системы полиномиальных уравнений (4.7), (4.8):

i) для всякого решения $v = (v^1, ..., v^n)$ вектор $(-v) = (-v^1, ..., -v^n)$ также является решением;

ii) для всякого решения $v = (v^1, ..., v^n)$ и всякой перестановки σ набора индексов $\{1, ..., n\}$ вектор $v = (v^{\sigma(1)}, ..., v^{\sigma(n)})$ также является решением;

iii) для всякого нетривиального решения $v = (v^1, ..., v^n) \neq (0, ..., 0)$ имеется не более трёх различных чисел среди $v^1, ..., v^n$.

Первое утверждение тривиально. Второе следует из соотношений (2.7), (2.8), (4.4), (4.5).

Докажем утверждение **iii)**. Предположим, что существует нетривиальное решение $v = (v^1, ..., v^n)$ с более чем тремя различными числами среди $v^1, ..., v^n$. В силу (4.5), (4.8) и $\sum\limits_{i=1}^{n} v^i \neq 0$ каждое число v^i $(i = 1, \dots, n)$ удовлетворяет кубическому уравнению $C_0 + C_1 v^i +$

$C_2(v^i)^2 + C_3(v^i)^3 = 0$ с $C_3 \neq 0$, и, следовательно, не более трёх чисел среди v^i могут быть различными. Таким образом, мы приходим к противоречию. Утверждение **iii)** доказано.

Это означает, что в будущих исследованиях решений уравнений (4.7), (4.8) для произвольных n лишь следующие нетривиальные случаи должны быть рассмотрены: 1) $v = (a, ..., a)$ (см. (4.10)); 2) $v = (a, ..., a, b, ..., b)$ ($a \neq b$); 3) $v = (a, ..., a, b, ..., b, c, ..., c)$ ($a \neq b$, $b \neq c$, $a \neq c$). В силу **i)** можно также положить $a > 0$.

Заключение

В настоящей работе рассматривалась $(n + 1)$-мерная модель "Эйнштейна-Гаусса-Бонне". Для диагональных космологических метрик уравнения движения были записаны в виде уравнений Лагранжа с лагранжианом, управляемым двумя "минисуперметриками" на $\mathbb{R}^n$: i) псевдоевклидовой 2-метрикой и ii) финслеровой 4-метрикой. Финслерова 4-метрика пропорциональна n-мерной метрике Бервальда-Моора. Таким образом, найдено достаточно естественное применение n-мерной метрики Бервальда-Моора ($n = 4, 5, \dots$) в $(n + 1)$-мерной гравитации с членом Гаусса-Бонне.

В случае "чистой" модели Гаусса-Бонне нами выведены два точных решения: со степенным и экспоненциальным поведением масштабных факторов (по отношению к синхронной временной переменной). Как уже ранее отмечалось, "степенное" решение было получено впервые в [6] для $n = 4, 5$ и проверено в [15] для произвольных n.

В случае синхронной временной калибровки уравнения движения, как было показано, сводятся к автономной системе дифференциальных уравнений первого порядка. Для $\alpha_1 \neq 0$ и $\alpha_2 \neq 0$ также показано, что для всякого нетривиального решения с экспоненциальным поведением масштабных факторов $a_i(\tau) = A_i \exp(v^i \tau)$ имеет место не более трёх различных чисел среди $v^1, ..., v^n$. Это означает, что решения такого типа имеют "ограниченную" анизотропию. Эти и более общие решения могут быть использованы для построения космологических решений, описывающих ускоренное расширение нашего 3-мерного фактор-пространства и (возможно) достаточно малую вариацию эффективной гравитационной постоянной, см. [21, 22] и ссылки там.

Благодарности

Настоящая работа была частично поддержана РФФИ, грант Nr. 09-02-00677-а. Автор также признателен А. В. Топоренскому и Д. Г. Павлову за стимулирующие доклады на семинаре РУДН-ВНИИМС, а также участникам V-ой Международной конференции "Финслеровы обобщения теории относительности" (27 сентября – 3 октября 2009 г., Москва-Фрязино), где были доложены результаты данной работы, за многочисленные полезные обсуждения.

Литература

[1] B. Zwiebach, *Phys. Lett.* **B 156**, 315 (1985).

[2] D. Gross and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B 277**, 1 (1986).
D. J. Gross and J. H. Sloan, *Nucl. Phys.* **B 291**, 41 (1987);
R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin, *Phys. Lett.* **B 191**, 354 (1987);
R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin, *Nucl. Phys.* **B 293**, 385 (1987).

[3] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **4**, 115-146 (2007); hep-th/0601213.

[4] G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov and S. Zerbini, One-loop effective action for non-local modified Gauss-Bonnet gravity in de Sitter space, arXiv: 0905.0543.

[5] H. Ishihara, *Phys. Lett.* **B 179**, 217 (1986).

[6] N. Deruelle, *Nucl. Phys.* **B 327**, 253 (1989).

[7] E. Elizalde, A. N. Makarenko, V. V. Obukhov, K. E. Osetrin and A. E. Filippov, *Phys. Lett.* **B 644**, 1–6 (2007); hep-th/061121.
[8] K. Bamba, Z.-K. Guo and N. Ohta, *Prog. Theor. Phys.*, **118**, 879–892 (2007), arXiv: 0707.4334.
[9] A. Toporensky and P. Tretyakov, *Grav. Cosmol.* **13**, 207–210 (2007); arXiv: 0705.1346.
[10] I. V. Kirnos, A. N. Makarenko, S. A. Pavluchenko and A. V. Toporensky, The nature of singularity in multiмерных anisotropic Gauss-Bonnet cosmology with a perfect fluid, arXiv: 0906.0140.
[11] S. A. Pavluchenko and A. V. Toporensky, *Mod. Phys. Lett.* **A 24**, 513–521 (2009).
[12] I. V. Kirnos and A. N. Makarenko, Accelerating cosmologies in Lovelock gravity with dilaton, arXiv: 0903.0083.
[13] M. Kowalski, D. Rubin et al., Improved Cosmological Constraints from New, Old and Combined Supernova Datasets, arXiv: 0804.4142.
[14] E. Kasner, *Amer. J. Math.*, **3**, 217 (1921).
[15] S. A. Pavluchenko, On the general features of Bianchi-I cosmological models in Lovelock gravity, *Phys. Rev.* **D 80** (2009), 107501; arXiv: 0906.0141.
[16] V. D. Ivashchuk, On cosmological type solutions in multidimensional model with Gauss-Bonnet term, to be published in IJGMMP.
[17] L. Berwald, *Ann. Math.* **48**, 755–781, (1947).
[18] A. Moór, Ergänzung, *Acta Math.* **91**, 187–188 (1954).
[19] G. Bogoslovsky, *SIGMA* **4**, 045, 21 pages, (2008); arXiv: 0712.1718.
[20] G. I. Garas'ko and D. G. Pavlov, Construction of the pseudo Riemannian geometry on the base of the Berwald-Moor geometry; math-ph/0609009.
[21] V. Baukh and A. Zhuk, *Phys Rev.* **D 73**, 104016 (2006).
[22] V. D. Ivashchuk, S. A. Kononogov and V. N. Melnikov, *Grav. Cosmol.* **14**, No. 3, 235–240 (2008); arXiv: 0901.0025.
[23] V. D. Ivashchuk, V. N. Melnikov and A. I. Zhuk, *Nuovo Cimento* **B 104**, No 5, 575–581 (1989).
[24] D. Lowelock, *J. Math. Phys.* **12**, No. 3, 498–501 (1971).

Lagrange aproach in $(n+1)$-dimensional "Einstein-Gauss-Bonnet" model and n-dimensional Berwald-Moor metric

V. D. Ivashchuk

Center for Gravitation and Fundamental Metrology, VNIIMS, Moscow, Russia,
Institute of Gravitation and Cosmology, Peoples Friendship University, Moscow, Russia
ivashchuk@mail.ru

A $(n+1)$-dimensional Einstein-Gauss-Bonnet (EGB) model is considered. For diagonal cosmological metrics the equations of motion are written as a set of Lagrange equations with the Lagrangian containing two "minisuperspace" metrics on $\mathbb{R}^n$: a 2-metric of pseudo-Euclidean signature and Finslerian 4-metric that is proportional to n-dimensional Berwald-Moor 4-metric. For the case of synchronous time variable the equations of motion reduce to an autonomous system of first order differential equations. For the case of the "pure" Gauss-Bonnet model exact solutions with power-law and exponential dependence of scale factors (w.r.t. synchronous time variable) are presented. In the case of EGB cosmology, it is shown that for any non-trivial solution with exponential dependence of scale factors $a_i(\tau) = A_i \exp(v^i \tau)$ there are no more than three different numbers among $v^1, ..., v^n$.

Key-words: cosmological metrics, "Einstein-Gauss-Bonnet" model, Berwald-Moor metric.