О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ АНИЗОТРОПНЫМИ РИМАНОВЫМИ МЕТРИКАМИ И ФИНСЛЕРОВЫМИ МЕТРИКАМИ

М. Л. Фильченков[1,2], Ю. П. Лаптев[1,3]

[1] *Институт гравитации и космологии, РУДН, Москва,*
[2] *Фридмановская лаборатория теоретической физики, Санкт-Петербург,*
[3] *Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана*
fmichael@mail.ru

Рассмотрена возможность представления финслеровых метрик типа Бервальда-Моора в виде произведения двух анизотропных римановых метрик. Если пространственные детерминанты римановых метрик равны нулю, то факторизация происходит с уменьшением размерности пространства. Ненулевые детерминанты реализуются лишь в ограниченном интервале значений параметров анизотропии римановых метрик, соответствующих комплексным коэффициентам финслеровых метрик.

Ключевые слова: анизотропные космологические модели, финслерова геометрия, метрика Бервальда-Моора.

Введение

Настоящая работа является продолжением двух предыдущих работ по анизотропным космологическим моделям. В первой из них [1] рассматривались параметры анизотропии, которые могут быть получены из наблюдений, согласующиеся с двухкомпонентной моделью с деситтеровским вакуумом и пылью. Во второй [2] рассмотрены квантовые модели для той же двухкомпонентной среды, а также метрики типа Бервальда-Моора, сводящиеся к произведению римановых метрик с нулевыми пространственными детерминантами. В настоящей работе рассмотрены финслеровы метрики типа Бервальда-Моора более общего вида, которые могут быть представлены в виде произведения двух анизотропных римановых метрик с, вообще говоря, ненулевыми пространственными детерминантами.

Анизотропные римановы метрики изучались давно. В 20-х годах прошлого века Казнером было получено анизотропное вакуумное решение [3], которое, как предполагалось, могло бы устранить космологическую сингулярность. Однако для материи с положительным давлением это оказалось невозможным в силу того, что в этом случае выполнялись условия теоремы Хокинга–Пенроуза о неизбежности сингулярности, которые были доказаны в 60-х годах прошлого века [4]. В конце 40-х годов появилась работа Гёделя [5], в которой рассматривалась метрика для нерасширяющейся модели с глобальным вращением, пылью и космологической постоянной. Решение Гёделя содержало замкнутые времениподобные мировые линии. В 50-х годах было выведено скалярное уравнение Райчаудури [6] для космологической жидкости с кинематическими инвариантами: расширением, вращением, сдвигом и дивергенцией ускорения. Изучение глобального вращения было стимулировано астрономическими наблюдениями поляризации радиогалактик [7], квазаров [8] реликтового излучения [9]. В 90-х годах прошлого века Ли-Син Ли [10] и в начале этого века М. Шидловский и др. [11] показали, что вращение спиральных галактик возможно обусловлено глобальным вращением Вселенной. Обнаруженные на рубеже миллениума большая анизотропия реликтового излучения на малых мультиполях и параметра Хаббла [12] вызвали новый всплеск интереса к анизотропным космологическим моделям.

Описание анизотропии Вселенной возможно в рамках финслеровой геометрии с использованием метрик типа Бервальда-Моора. Ниже мы покажем в чем состоит отличие в описании анизотропии с помощью финслеровых и римановых метрик.

1 Метрики типа Бервальда-Моора

Рассмотрим метрику типа Бервальда-Моора [2]

$$\begin{aligned} ds^4 = {} & (cdt + Adx + Bdy + Cdz)(cdt + Ddx + Edy + Fdz) \\ & (cdt + Gdx + Hdy + Idz)(cdt + Kdx + Ldy + Mdz), \end{aligned} \tag{1}$$

где величины $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M$, вообще говоря, являются функциями времени и пространственных координат, в отличие от постоянных, равных ± 1 для метрики Бервальда-Моора. Сравним метрику с произведением двух римановых анизотропных метрик типа

$$ds_A^2 = c^2dt^2 - 2g_{0\alpha}cdtdx^\alpha - \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \tag{2}$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Приравнивая (2) к билинейной форме

$$ds^2 = (cdt + Adx + Bdy + Cdz)(cdt + Ddx + Edy + Fdz), \tag{3}$$

получим

$$\begin{aligned} A &= -g_{01} \pm \sqrt{g_{01}^2 + \gamma_{11}}, \\ B &= -g_{02} \pm \sqrt{g_{02}^2 + \gamma_{22}}, \\ C &= -g_{03} \pm \sqrt{g_{03}^2 + \gamma_{33}}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} D &= -g_{01} \mp \sqrt{g_{01}^2 + \gamma_{11}}, \\ E &= -g_{02} \mp \sqrt{g_{02}^2 + \gamma_{22}}, \\ F &= -g_{03} \mp \sqrt{g_{03}^2 + \gamma_{33}}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\gamma_{12} = \sqrt{(g_{01}^2 + \gamma_{11})(g_{02}^2 + \gamma_{22})} - g_{01}g_{02}, \tag{6}$$

$$\gamma_{13} = \sqrt{(g_{01}^2 + \gamma_{11})(g_{03}^2 + \gamma_{33})} - g_{01}g_{03}, \tag{7}$$

$$\gamma_{23} = \sqrt{(g_{02}^2 + \gamma_{22})(g_{03}^2 + \gamma_{33})} - g_{02}g_{03}. \tag{8}$$

2 Римановы метрики с нулевыми пространственными детерминантами

Наложим следующие условия на коэффициенты

$$\begin{gathered} G = A, \quad D = K = -A, \quad E = B, \\ H = L = -B, \quad M = C, \quad F = I = -C, \end{gathered} \tag{9}$$

Из формул (6) – (9) получим

$$g_{01} = g_{03} = \gamma_{12} = \gamma_{23} = 0, \quad \gamma_{13} = \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{33}}, \quad \gamma_{22} = -g_{02}^2. \tag{10}$$

Тогда формулы (4), (5) примут вид

$$\begin{aligned} A &= \pm\sqrt{\gamma_{11}}, \quad B = -g_{02}, \quad C = \pm\sqrt{\gamma_{33}}, \\ D &= \mp\sqrt{\gamma_{11}}, \quad E = -g_{02}, \quad F = \mp\sqrt{\gamma_{33}}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} G &= \pm\sqrt{\gamma_{11}}, \quad H = g_{02}, \quad I = \mp\sqrt{\gamma_{33}}, \\ K &= \mp\sqrt{\gamma_{11}}, \quad L = g_{02}, \quad M = \pm\sqrt{\gamma_{33}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Анизотропная метрика (2) сводится к

$$ds_A^2 = c^2dt^2 - 2g_{02}cdtdy - \gamma_{11}dx^2 + g_{02}^2dy^2 - \gamma_{33}dz^2 - 2\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{33}}dxdz. \tag{13}$$

Отсюда следует, что метрика типа Бервальда-Моора может быть сведена к произведению двух римановых анизотропных метрик: одна дается формулой (13), а другая следующей формулой

$$ds_{A'}^2 = c^2dt^2 + 2g_{02}cdtdy - \gamma_{11}dx^2 + g_{02}^2dy^2 - \gamma_{33}dz^2 + 2\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{33}}dxdz. \tag{14}$$

Так как определитель пространственной части $\gamma = \det\gamma_{\alpha\beta} = 0$ для метрик ds_A^2 и $ds_{A'}^2$, то они могут сводиться к виду

$$ds_A^2 = c^2dT^2 - dL^2, \quad ds_{A'}^2 = c^2dT^2 - dl^2, \tag{15}$$

где

$$cdT = cdt - g_{02}dy, \quad dL = \sqrt{\gamma_{11}}dx + \sqrt{\gamma_{33}}dz, \quad dl = \sqrt{\gamma_{11}}dx - \sqrt{\gamma_{33}}dz.$$

Метрика типа Бервальда-Моора принимает вид

$$ds^4 = (c^2dT^2 - dL^2)(c^2dT^2 - dl^2). \tag{16}$$

Таким образом, метрика типа Бервальда-Моора представляет собой «пересечение» двух римановых метрик с нулевым определителем γ, имеющих одну временную и одну пространственную координату.

3 Римановы метрики с ненулевыми пространственными детерминантами

Детерминант пространственной метрики, имеющий вид

$$\gamma = \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33} + 2\gamma_{12}\gamma_{13}\gamma_{23} - \gamma_{11}\gamma_{23}^2 - \gamma_{22}\gamma_{13}^2 - \gamma_{33}\gamma_{12}^2, \tag{17}$$

заведомо не равен нулю при условии

$$\gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0. \tag{18}$$

В этом случае

$$\gamma = \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33}. \tag{19}$$

Из формул (6) – (8) легко видеть, что

$$g_{01} = \pm\sqrt{-\frac{\gamma_{11}}{2}}, \quad g_{02} = \pm\sqrt{-\frac{\gamma_{22}}{2}}, \quad g_{03} = \pm\sqrt{-\frac{\gamma_{33}}{2}}, \tag{20}$$

если все знаки $g_{0\alpha}$ одинаковы, где

$$\gamma_{11} < 0, \quad \gamma_{22} < 0, \quad \gamma_{33} < 0. \tag{21}$$

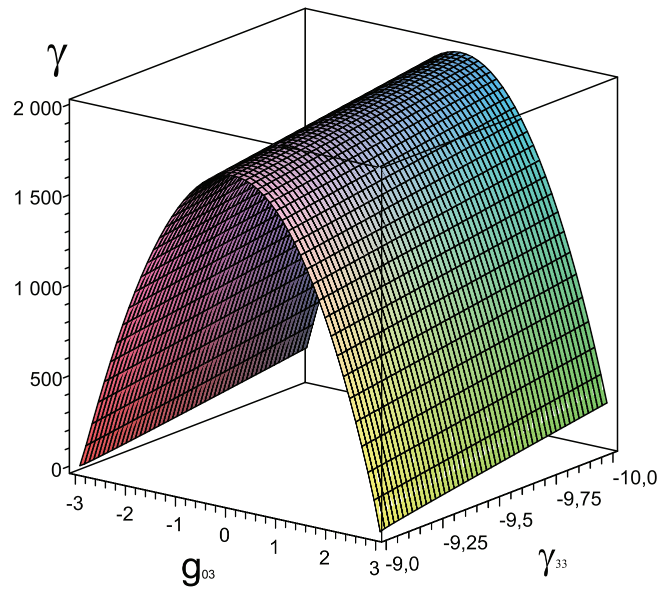

Рис. 1: Зависимость пространственного детерминанта от метрических коэффициентов.

Рассмотрим несколько примеров.

$$1)\quad g_{01}=\sqrt{-\frac{\gamma_{11}}{2}},\qquad g_{02}=\sqrt{-\frac{\gamma_{22}}{2}},\qquad g_{03}=\sqrt{-\frac{\gamma_{33}}{2}},\tag{22}$$

$$\gamma=\gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33}<0.\tag{23}$$

$$2)\quad g_{01}=\sqrt{-\frac{\gamma_{11}}{2}},\qquad g_{02}=-\sqrt{-\frac{\gamma_{22}}{2}},\qquad g_{03}=\sqrt{-\frac{\gamma_{33}}{2}},\tag{24}$$

$$\gamma_{12}=\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}},\qquad \gamma_{13}=0,\qquad \gamma_{23}=\sqrt{\gamma_{22}\gamma_{33}},\qquad \gamma=-\gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33}>0.\tag{25}$$

Если знаки в формулах (20) разные, то детерминант γ меняет знак, т. е. становится положительным.

$$3)\quad g_{01}=0,\qquad g_{02}=\sqrt{-\frac{\gamma_{22}}{2}},\qquad g_{03}=-\sqrt{-\frac{\gamma_{33}}{2}},\tag{26}$$

$$\gamma_{12}=\sqrt{\frac{\gamma_{11}\gamma_{22}}{2}},\qquad \gamma_{13}=\sqrt{\frac{\gamma_{11}\gamma_{33}}{2}},\qquad \gamma_{23}=\sqrt{\gamma_{22}\gamma_{33}},$$

$$\gamma=-\gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33}>0.\tag{27}$$

$$4)\quad g_{01}=g_{02}=0,\qquad g_{03}=\sqrt{-\frac{\gamma_{33}}{2}},\tag{28}$$

$$\gamma_{12}=\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}},\qquad \gamma_{13}=\sqrt{\frac{\gamma_{11}\gamma_{33}}{2}},\qquad \gamma_{23}=\sqrt{\frac{\gamma_{22}\gamma_{33}}{2}},$$

$$\gamma=-\gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33}>0.\tag{29}$$

Если одна формула $g_{0\alpha}=0$, а две $g_{0\alpha}\neq 0$ или две формулы $g_{0\alpha}=0$, то детерминант также оказывается положительным.

При условии, что

$$-\sqrt{-\frac{\gamma_{\alpha\alpha}}{2}} \le g_{0\alpha} \le \sqrt{-\frac{\gamma_{\alpha\alpha}}{2}},$$

пространственный детерминант $\gamma \neq 0$. Легко видеть, что $\gamma = 0$ вне этого интервала значений $g_{o\alpha}$ (см. рис. 1). Коэффициенты билинейных форм при $\gamma \neq 0$, даваемые формулами (4) и (5), на которые теперь не наложены условия (9), оказываются комплексными. Например, в случае 2 получаем:

$$\begin{aligned} A &= \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}}\sqrt{-\gamma_{11}}, \quad B = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}\sqrt{-\gamma_{22}}, \quad C = -\frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}}\sqrt{-\gamma_{33}}, \\ D &= -\frac{-1 \mp i}{\sqrt{2}}\sqrt{-\gamma_{11}}, \quad E = \frac{1 \mp i}{\sqrt{2}}\sqrt{-\gamma_{22}}, \quad F = -\frac{-1 \mp i}{\sqrt{2}}\sqrt{-\gamma_{33}}, \end{aligned} \tag{30}$$

Анизотропная риманова метрика в случае 2 принимает вид

$$\begin{aligned} ds^2 = c^2dt^2 - \sqrt{-2\gamma_{11}}cdtdx + \sqrt{-2\gamma_{22}}cdtdy - \sqrt{-2\gamma_{33}}cdtdz \\ -2\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}}dxdy - 2\sqrt{\gamma_{22}\gamma_{33}}dydz - \gamma_{11}dx^2 - \gamma_{22}dy^2 - \gamma_{33}dz^2. \end{aligned} \tag{31}$$

Делая замену переменных

$$dX = \sqrt{-\gamma_{11}}dx - \sqrt{-\gamma_{22}}dy, \tag{32}$$

$$dY = \sqrt{-\gamma_{22}}dy, \tag{33}$$

$$dZ = \sqrt{-\gamma_2}dy - \sqrt{-\gamma_{33}}dz, \tag{34}$$

приведем метрику (31) к виду

$$ds^2 = c^2dt^2 - \sqrt{2}cdtdX - 3\sqrt{2}cdtdY + \sqrt{2}cdtdZ - dX^2 - dY^2 - dZ^2. \tag{35}$$

В отличие от случая с $\gamma = 0$, здесь не происходит уменьшения размерности пространства. Пример финслеровой метрики в том случае:

$$\begin{aligned} ds^4 = &\left[cdt + \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{-\gamma_{11}}\right)dx + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{-\gamma_{22}}\right)dy + \left(-\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{-\gamma_{33}}\right)dz\right] \\ &\left[cdt + \left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{-\gamma_{11}}\right)dx + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{-\gamma_{22}}\right)dy + \left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{-\gamma_{33}}\right)dz\right] \\ &\left[cdt + \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{-\gamma'_{11}}\right)dx + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{-\gamma'_{22}}\right)dy + \left(-\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{-\gamma'_{33}}\right)dz\right] \\ &\left[cdt + \left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{-\gamma'_{11}}\right)dx + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{-\gamma'_{22}}\right)dy + \left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{-\gamma'_{33}}\right)dz\right]. \end{aligned} \tag{36}$$

Заключение

Для метрик типа Бервальда-Моора отличный от нуля пространственный детерминант γ соответствующих римановых метрик реализуется только в ограниченном интервале значений величины $g_{0\alpha}$. Она связана с параметром анизотропии $1 - g^{00}$, характеризующим отклонение от однородной и изотропной модели [1]. Метрика типа Бервальда-Моора может быть представлена в виде произведения двух римановых метрик. Если пространственные детерминанты римановых метрик равны нулю, то их пространства-времена двумерны, т.е. имеют одну временную и одну пространственную координату. В случае ненулевого пространственного детерминанта соответствующие финслеровы метрики имеют комплексные коэффициенты. Это означает, что финслеровы и римановы метрики с действительными коэффициентами не могут описывать одни и те же анизотропные пространства. Таким образом, описание анизотропии с помощью финслеровых метрик дополняет, а не заменяет описание анизотропии с помощью римановых метрик.

Благодарности

Выражаем благодарность В. Балану, С. В. Лебедеву и С. В. Сипарову за полезное обсуждение.

Литература

[1] М. Л. Фильченков, Ю. П. Лаптев. *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, № 2 (8), том 4, 2007, с. 71.
[2] М. Л. Фильченков, Ю. П. Лаптев, Р. Х. Сайбаталов, В. В. Плотников. *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике*, № 2(10), том 5, 2008, с. 108.
[3] E. Kasner. *Am. J. Math.*, v. 43, 1921, p. 217.
[4] S. W. Hawking, R. Penrose. *Proc. Roy. Soc. (London)*, v. A314, 1970, p. 529.
[5] K. Gödel. *Rev. Mod. Phys.*, v. 158, 1949, p.447.
[6] A. Raychaudhuri. *Phys. Rev.* v. 978, 1955, p. 1123.
[7] P. Birch. *Nature*, v. 298, 1982, p. 451.
[8] D. Hutsemkérs, H. Lamy. *Ast.& Ap.*, v. 367, 2001, p. 381.
[9] М. В. Сажин. *УФН*, том 174, 2004, с. 197.
[10] Li-Xin Li. *Gen. Rel. Grav.*, v. 30, 1998, p. 497.
[11] W. Godłowski, M. Szydłowski et al. *Gen. Rel. Grav.*, v. 35, 2003, p. 907.
[12] M. L. McClure, C. C. Dyer. *New Astron.*, v. 12, 2007, p. 533.

On the Relationship Between Anisotropic Riemannian Metrics and Finsler Ones

M. L. Fil'chenkov[1,2], Yu. P. Laptev[1,3]

[1] *Institute of Gravitation & Cosmology, Moscow, Russia,*
[2] *Friedmann Laboratory for Theoretical Physics, St. Petersburg, Russia,*
[3] *Bauman Moscow State Technical University, Russia*
fmichael@mail.ru

A possibility of representing Berwald-Moor type Finsler metrics as a product of two anisotropic Riemannian metrics has been considered. If spatial determinants of the Riemannian metrics vanish, then the factorization reduces space dimension. Nonzero determinants exist only in a limited interval of the Riemannian metric anisotropy parameters corresponding to complex coefficients of the Finsler metrics.

Key words: anisotropic cosmological models, Finsler geometry, Berwald-Moor metric.

PACS: 02.40 Ky, 88.80-k.