МЕТРИКА МИНКОВСКОГО И МЕТРИКА БЕРВАЛЬДА-МООРА

О. Титов

Geoscience Australia
olegtitov903@hotmail.com

Пространство Бервальда-Моора H_4 было предложено Гарасько и Павловым [1, 2, 3] в качестве расширения пространства Минковского. В качестве основного аргумента, предусматривающего возможность такого расширения, рассматривалось представление интервалов в обеих геометриях в виде системы изотропных векторов. При этом, согласно утверждениям авторов "координаты (x_0, x_1, x_2, x_3) в "ортонормированном" базисе пространства H_4 в нерелятивистском приближении в геометрическом (метрическом) плане ведут себя также как общепринятые координаты четырехмерного пространства-времени Минковского". В данной работе показано, что данное утверждение неправильно.

Ключевые слова: пространства Минковского, пространство Бервальда-Моора.

1. Бесконечно малые величины интервалы

В изотропных координатах (x_0, x_1, x_2, x_3) бесконечно малый интервал в пространстве Минковского

$$dS^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_4^2, \tag{1}$$

возведенный в квадрат, имеет вид

$$\begin{aligned} dS^4 &= dx_0^4 + dx_1^4 + dx_2^4 + dx_3^4 - 2dx_0^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \\ &+2dx_1^2dx_2^2 + 2dx_1^2dx_3^2 + 2dx_2^2dx_3^2. \end{aligned} \tag{2}$$

В то же время бесконечно малый интервал в пространстве Бервальда-Моора определяется как

$$\begin{aligned} dS^4 &= dx_0^4 + dx_1^4 + dx_2^4 + dx_3^4 - 2dx_0^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)- \\ &-2dx_1^2dx_2^2 - 2dx_1^2dx_3^2 - 2dx_2^2dx_3^2 + 8dx_0dx_1dx_2dx_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Внешнее сходство записи интервалов (2) и (3) действительно наводит на мысль о том, что при определенных условиях (3) можно свести к (2). Если бы это удалось доказать, то тогда метрику Бервальда-Моора можно было рассмотреть как расширение метрики Минковского. Однако аргументация, предложенная Гарасько и Павловым [1, 2, 3] выглядит неубедительно, так как сводится к рассмотрению случая

$$dx_\alpha = \varepsilon dx_0, \qquad \varepsilon \ll 1 \qquad \text{для} \quad \alpha = 1,\, 2,\, 3. \tag{4}$$

При этом утверждается, что в нерелятивистском приближении интервал (3) принимает вид (см [2], формула (116)),

$$dS = \sqrt{dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2}, \tag{5}$$

что совпадает с выражением для интервала в пространстве Минковского (1).

Однако, из общих соображений для построения необходимого доказательства выражение для интервала в пространстве Бервальда-Моора (3) должно сводиться к (2) при произвольных отношениях бесконечно малых интервалов (dx_1, dx_2, dx_3) к интервалу (dx_0). Таким образом вопрос об интерпретации метрики Бервальда-Моора как расширения метрики Минковского остается открытым.

Запишем (1) в матричном виде

$$dS^2 = Dx^T G Dx, \tag{6}$$

где $Dx^T = (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3)$ – вектор-строка, и

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

– матрица, определяющая метрический тензор. Тогда в развернутом виде (6) записывается как

$$dS^2 = \begin{pmatrix} dx_0 & dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_0 \\ dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Очевидно, что в матричном виде (2) может быть записано как

$$dS^4 = (Dx^T G Dx)^2 =$$
$$\begin{pmatrix} dx_0 & dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_0 \\ dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_0 & dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_0 \\ dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Интервал, заданный метрикой Бервальда-Моора (3), не может быть сведен к квадратичной метрике вида (1) из-за отсутствия метрического тензора в виде (7). Однако выражение для интервала (3) представимо в матричном виде, аналогичном (9)

$$dS^4 = (Dx^T H Dx)(Dx^T H' Dx), \tag{10}$$

где матрицы H, H', в отличие от (7), уже не являются диагональными

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad H' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

В развернутом виде (10)

$$dS^4 = \begin{pmatrix} dx_0 & dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_0 \\ dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_0 & dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_0 \\ dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

По сравнению с формулой (9), в которой матрица (7) встречается дважды, в (12) требуются две различные недиагональные матрицы (11).

При сравнении (9) и (12) обращает внимание, что их различие определяется несколькими элементами входящих в формулы матриц. Для обеспечения предельного перехода Павлов и Гарасько рассматривают условие (4). Однако, это условие по отношению к дифференциалам, (dx_0, dx_1, dx_2, dx_3), входящим в выражения для интервалов (2) и (3) некорректно. Почему-то авторы полагают, что условие (4) аналогично нерелятивистскому приближению, когда в формулах присутствуют множители вида $\frac{v}{c}$ (v – скорость объекта, c – скорость света). Такая аналогия была бы уместна, если бы множители вида $\frac{v}{c}$ входили бы в элементы матриц H, H' (11), чего, однако, не происходит. Поэтому авторам следует привести более подробное доказательство корректности условия (4) применительно к интервалам (9) и (12) при условии, что скорость света в обоих выражениях является конечной.

Вообще говоря, если скорость света полагать равной бесконечности, то оба интервала (9) и (12) сводятся к виду

$$dS = dx_0 \tag{13}$$

Это известный переход к так называемый метрике Галилея [4], которую можно вывести из метрики Минковского, устремив скорость света к бесконечности. В таком виде условие (4) приобретает определенный смысл. Однако в результате данного предельного перехода оба выражения (9) и (12) сводятся к интервалу в пространстве Галилея (13). Но в нерелятивистском случае этот переход по-прежнему остается недоказанным.

2. Конечные интервалы S

Интересно, что в работе [1] Павлов и Гарасько используют схожую схему доказательства, но уже для конечной величины S. В их представлении четвертая степень интервала пространства Минковского записывается как

$$S^4 = x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_0^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_3^2 + 2x_2^2x_3^2, \tag{14}$$

а четвертая степень интервала пространства Бервальда-Моора как

$$S^4 = x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_0^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2 + 8x_0x_1x_2x_3. \tag{15}$$

В работе [1] на стр. 6 авторы вводят понятие скорости как

$$v_\alpha = \frac{x_\alpha}{x_0}, \qquad \alpha = 1,\ 2,\ 3\,. \tag{16}$$

После чего утверждается, что в случае малых скоростей $|v_\alpha| \ll 1$, выражения (14) и (15) равны с точностью до бесконечно малых $|v_\alpha|$ второго порядка.

В векторно-матричной форме выражения (14) и (15) примут вид

$$S^4 = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$S^4 = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Здесь следует отметить, что в отличие от выражения для бесконечно малых интервалов, в случае конечных значений x_α ($\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3$) выражение (16) представляет просто отношение двух конечных величин, то есть не является выражением для скорости (поэтому оно само по себе уже неправильно). В данном случае отсутствие бесконечно малых величин, хотя бы в виде дифференциалов, делает невозможным обоснование предельного перехода по малым скоростям, которое было возможно ранее, если бы авторам удалось доказать обоснованность применения условия (4). Это еще раз показывает, что для обоснования предельного перехода "в нерелятивистском приближении" от (17) к (18) эти малые скорости должны появиться среди элементов матриц H, H'.

Подытоживая сказанное, все возражения вкратце формулируются следующим образом:

1. Предельный переход от интервала в пространстве Бервальда-Моора (3) к интервалу в пространстве Минковского (2) не определен математически корректным способом.

2. Вероятно, оба выражения (2) и (3) можно свести к интервалу в пространстве Галилея, при скорости света, стремящейся к бесконечности, но этот переход также не определен авторами.

3. При переходе к конечным интервалам выражение (16) не является корректным определением скорости.

4. Отсутствие бесконечно малых величин в формулах (14) и (15) не позволяет в принципе осуществить предельный переход "в нерелятивистском приближении" от (15) к (14).

5. Формула (44) в работе [3] неправильна, равно как и формула (116) в работе [2].

Поэтому заключение авторов в статьях [2,3], что координаты (x_0, x_1, x_2, x_3) в "ортонормированном" базисе пространства H_4 в нерелятивистском приближении в геометрическом (метрическом) плане ведут себя также как общепринятые координаты четырехмерного пространства-времени Минковского, к сожалению, оказывается ошибочным.

Литература

[1] Павлов Д. Г., Гарасько Г. И., Понятия расстояния и модуля скорости в линейных Финслеровых пространствах. Гиперкомплексные числа в физике и геометрии, т. **1 (3)**, 2005. http://hypercomplex.xpsweb.com/articles/208/ru/pdf/03-01.pdf

[2] Гарасько Г. И, Павлов Д. Г. Геометрия невырожденных поличисел Гиперкомплексные числа в физике и геометрии, т. **7 (1)**, 2007. http://hypercomplex.xpsweb.com/articles/357/ru/pdf/07-01.pdf

[3] Павлов Д. Г., Гарасько Г. И., Об аналоге решения Фридмана в Финслеровом пространстве-времени с анизотропной метрикой Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в физике и геометрии, т. **7 (4)**, 2007. http://hypercomplex.xpsweb.com/articles/360/ru/pdf/07-04.pdf

[4] И. М. Яглом, Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия - Москва: Наука, 1969.

Minkowski metrics and Berwald-Moor metrics

O. Titov

Geoscience, Australia
olegtitov903@hotmail.com

Berwald-Moor space H_4 was proposed by Garas'ko and Pavlov as expansion of Minkowski space. As basic argument allowing such expansion in both geometries was considered presentation of interval like system of isotropic vectors. At the same time, according to statement of authors 'coordinates (x_0, x_1, x_2, x_3) in orthonormal basis of H_4 space in non-relativistic approach in geometrical (metrical) sense behave oneself as conventional coordinates of four-dimensional Minkowski space-time'. Present work shows that such statement is incorrect.

Key words: Berwald-Moor space, Minkowski space.