К ВОПРОСУ ОБ АНИЗОТРОПНОЙ ГЕОМЕТРОДИНАМИКЕ

С. В. Сипаров

Государственный университет гражданской авиации, Санкт-Петербург, Россия
sergey@siparov.ru

Показано, что ряд затруднений классической геометродинамики таких, как плоские кривые вращения в спиральных галактиках, закон Талли-Фишера, а также ряд других, могут быть устранены на основе принципа эквивалентности с помошью модификации выражения для метрики в действии Гильберта-Эйнштейна. Это приводит к обобщенному уравнению геодезической, а затем к уравнениям для гравитационной силы, содержащей не только Ньютоновское слагаемое. Используемый подход содержит все результаты классической геометродинамики. Обсуждается связь полученных результатов со следствиями подхода Лензе-Тирринга и возможные космологические следствия.

1 Введение

Общеизвестные выдающиеся успехи ОТО, достигнутые вскоре после ее формулировки, в настоящее время сменились проблемами, возникшими в результате наблюдений на космологических масштабах, которые не удается решить в рамках классической геометродинамики. Следуя [1], можно перечислить ряд астрофизических наблюдений, которые должна объяснить любая приемлемая модификация теории гравитации (геометродинамики). Это: плоский характер кривых вращения спиральных галактик; эмпирический закон Талли-Фишера о связи орбитальной скорости звезд на периферии галактики и светимости этой галактики; различный характер гравитации для звезд, принадлежащих плоскости галактики, и для глобулярных скоплений вне этой плоскости; существование галактических кластеров, общая масса которых, измеренная астрономическими методами, представляется недостаточной для поддержания устойчивого состояния, а также эффект гравитационного линзирования, качественно соответствующий оценке, сделанной на основании ОТО, но в некоторых случаях количественно превосходящий ее в разы. Кроме того, имеется и проблема другого рода и большего масштаба, которая возникает при интерпретации наблюдений сверхновых типа Ia, указывающих на изменение наклона в законе Хаббла, что трактуется как ускорение расширения Вселенной на современной стадии ее эволюции. Последнее требует существования сил отталкивания.

Попытки изменить теорию, в первую очередь, в отношении возможности описания кривых вращения и обеспечения гравитационной устойчивости, предпринимаются уже несколько десятилетий. При этом наиболее очевидная модификация связана с изменением "простейшего скаляра" в выражении для действия Гильберта-Эйнштейна

$$S_{EH} = -\frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x(-g)^{1/2}R^{\alpha}_{\alpha}\,. \tag{1}$$

Упомянем лишь некоторые из предлагаемых модификаций. В работе [2] были учтены члены более высокого порядка вида

$$S_{W_1} = -\frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x(-g)^{1/2}(R^{\alpha}_{\alpha})^2\ ;\quad S_{W_2} = -\frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x(-g)^{1/2}R^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} \tag{2}$$

что в дальнейшем привело к возникновению так называемых f(R)-теорий. Другой тип поправок представляет собой введение дополнительного скалярного поля. Например в [3] действие имело вид

$$S_{BD} = -\frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x(-g)^{1/2}(SR^\alpha_\alpha - w\frac{S_{;\mu}S^{;\mu}}{S}) \tag{3}$$

где w является константой. Попытка модифицировать саму метрику была предпринята в [4], где были введены антисимметричные части метрического тензора.

В серии работ, начавшейся с [5], был развит феноменологический подход, известный как МОНД, с помощью которого удается получить удовлетворительное соответствие с рядом наблюдений. Однако, он не дает объяснения происхождению и выбору дополнительных функций, искусственно вводимых в закон динамики или в закон гравитации. Кроме того, с его помощью не удается получить наблюдаемый профиль температуры межгалактического газа в галактических кластерах.

Как показано в [1], ни одно из этих и других известных предположений не удовлетворяет всему комплексу ограничений, накладываемых данными наблюдений.

Наиболее известные попытки объяснения этих наблюдаемых эффектов используют такие понятия, как *темная материя* и *темная энергия*. Но это означает, что теория, разработанная и успешно используемая для описания 5 процентов наблюдаемого общего количества всей массы (энергии) Вселенной, гравитационное взаимодействие которой соответствует только притяжению, должна включить в себя все еще не обнаруженную явно часть, составляющую остальные 95 процентов, и взаимодействие отталкивания. Первое отсылает к поиску соответствующих элементарных частиц (например, бозонов Хиггса), второе – к введению в уравнения Эйнштейна космологической постоянной, либо к учету некоторой *квинтэссенции*. Все это делает картину, использующую *темные* объекты довольно искусственной.

Более естественно было бы начать построение теории для тех масштабов, которые характеризуют большую часть Вселенной, и лишь затем убедиться, что и в более локальном частном случае, например, для планетной системы, теория остается работоспособной. Тогда то, что сейчас является ограничением, станет исходной посылкой, а в пределе следует получить гравитацию Ньютона-Эйнштейна-Шварцшильда для точечной массы.

Принцип относительности утверждает, что не существует возможности различить инерциальные системы отсчета. Но принцип эквивалентности идет дальше. Поскольку мы не можем различить эффекты, связанные с ускорением системы отсчета и с таким физическим полем, как гравитационное, нет оснований полагать, что измеряемое гравитационное взаимодействие не зависит от скорости движения тел. Если ускорение системы отсчета не является прямолинейным, инерциальные силы, действующие на тело, зависят от скорости его движения (например, сила Кориолиса). Поэтому, измеряя действие гравитационных сил, мы никогда не знаем, в какой мере в наблюдениях учитывается кинематика. С математической точки зрения это означает, что пространство является анизотропным. Локально это может представлять существование выделенного направления (например, ось вращающейся системы отсчета), но в общем случае это соответствует зависимость метрики от направлений в каждой точке. Формально это повлечет за собой и естественное изменение "простейшего скаляра" в выражении для действия (1), а, значит, и изменение соответствующих уравнений динамики. Учет зависимости метрики не только от координаты, но и от направления в каждой точке приводит к тому, что касательное пространство к основному многообразию становится восьмимерным *фазовым* пространством, имеющим в физике наглядный смысл. В результате все это приводит к построению анизотропной геометродинамики, с помощью которой удается объяснить указанные выше наблюдаемые эффекты, а также получить новые космологические следствия.

2 Анизотропное возмущение

Углубим взаимосвязь между геометрией и физикой и рассмотрим анизотропное пространство с деформированной метрикой простейшего вида

$$g_{ij}(x,y) = \gamma_{ij} + \varepsilon_{ij}(x,y) \tag{4}$$

где γ_{ij} – x-независимая метрика типа Минковского, а $\varepsilon_{ij}(x,y)$ – малое анизотропное возмущение. Такая метрика является так называемой обобщенной Лагранжевой метрикой, а касательное расслоение эквивалентно фазовому пространству. На этом расслоении y-переменные, $y^i = \dfrac{dx^i}{ds}$, должны играть точно такую же роль, как и x-переменные x^i (см. Приложение).

2.1 Предположения

Будем считать $\varepsilon(x,y)$ достаточно малым для того, чтобы использовать линейное приближение и сделаем следующие упрощающие предположения:

1. Скорости рассматриваемых объектов значительно меньше, чем фундаментальная скорость. Это означает, что компонентами $y^2 = \dfrac{dx^2}{ds}, y^3 = \dfrac{dx^3}{ds}$ и $y^4 = \dfrac{dx^4}{ds}$ можно пренебречь по сравнению с компонентой $y^1 = \dfrac{dx^1}{ds}$, которая равна единице с точностью до второго порядка;
2. Поскольку скорости малы, производной метрики по времени $\dfrac{\partial\varepsilon_{hj}}{\partial x^1}$ можно пренебречь по сравнению с производными по пространственным координатам $\dfrac{\partial\varepsilon_{hj}}{\partial x^\alpha}$; $\alpha = 2,3,4$;
3. Последнее считается верным и для соответствующих ускорений, т. е. на y-подпространстве фазового пространства производной по y^1 можно пренебречь по сравнению с производными по y^2, y^3 и y^4.

Заметим, что два первых предположения в точности совпадают с предположениями, традиционно используемыми в ОТО со времен классической работы Эйнштейна [6]

2.2 Геодезическая

Поскольку метрика теперь зависит от y, следует использовать формализм Финслеровой геометрии [7]. Это означает, что уравнения Эйлера-Лагранжа могут быть получены при варьировании Финслеровского квадрата расстояния $\bar{F}^2 = (\gamma_{hl} + \varepsilon_{hl}(x,y))y^h y^l$. В этом случае выражение для обобщенной геодезической принимает вид [8]:

$$\frac{dy^i}{ds} + (\Gamma^i_{lk} + \frac{1}{2}\gamma^{it}\frac{\partial^2\varepsilon_{kl}}{\partial x^j \partial y^t}y^j)y^k y^l = 0\,. \tag{5}$$

Здесь $\Gamma^i{}_{jk} = \dfrac{1}{2}\gamma^{ih}\Big(\dfrac{\partial\varepsilon_{hj}}{\partial x^k} + \dfrac{\partial\varepsilon_{hk}}{\partial x^j} - \dfrac{\partial\varepsilon_{jk}}{\partial x^h}\Big)$ представляет собой символ Кристоффеля, зависящий от y.

Замечание. *Третий член в выражении (5) не появится в том специальном случае, когда анизотропная метрика выбирается в виде* $g^*_{ij} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}$ *где* F^2 *– однородная* *функция второй степени по y. Геодезическая, полученная для анизотропной метрики эквивалентна траектории частицы, движущейся под действием силы, зависящей от скорости в пространстве с обобщенной метрикой.*

Геодезическая (5) представляет собой геометрические уравнения, которые следует использовать для описания динамики частицы в гравитационном поле, соответствующем анизотропной метрике. Как и в [6], используем сделанные предположения для того, чтобы сохранить только члены с $k = l = 1$, т. е. из всех ε_{kl}, имеющихся в уравнении (5), останется только ε_{11}, при этом $y^k = y^l = 1$. Введем новые обозначения

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial y^t} \equiv A_t\,, \tag{6}$$

соответствующие компонентам тензора Картана. Заметим, что на y-подпространстве касательного расслоения A_t представляют собой компоненты дифференциала ε_{11} по y, т. е. $A_\alpha = \frac{1}{2}(\nabla_{(y)}\varepsilon_{11})_\alpha$ для $\alpha = 2, 3, 4$ (для обоих переменных x- и y- используется одна и та же нумерация $1 \div 4$). Тогда получим

$$\frac{dy^i}{ds} + \Gamma^i_{11} + \gamma^{it}\frac{\partial A_t}{\partial x^j}y^j = 0\,. \tag{7}$$

Третий член в уравнении (7) не исчезает, поскольку, хотя мы и предположили $\dfrac{\partial A^i}{\partial x^1} \ll \dfrac{\partial A^i}{\partial x^\alpha}$, но $y^1 \gg y^\alpha$, $\alpha = 2, 3, 4$. Теперь добавим и вычтем одну и ту же величину $\gamma^{it}\dfrac{\partial A_j}{\partial x^t}y^j$ и получим

$$\frac{dy^i}{ds} + \Gamma^i_{11} + \gamma^{it}[\left(\frac{\partial A_t}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^t}\right) + \frac{\partial A_j}{\partial x^t}]y^j = 0 \tag{8}$$

где $\left(\dfrac{\partial A_t}{\partial x^j} - \dfrac{\partial A_j}{\partial x^t}\right)$ могут рассматриваться как компоненты антисимметричного тензора, F_{jt}, точно такого же, как и в электродинамике. Выражения $\left(\dfrac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \dfrac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha}\right)$ представляют собой компоненты ротора вектора $\mathbf{A}$ для $\alpha, \beta = 2, 3, 4$ на x-подпространстве касательного расслоения. Тогда для геодезической получим

$$\frac{dy^i}{ds} + \Gamma^i_{11} - \gamma^{it}F_{tj}y^j + \gamma^{it}\frac{\partial A_j}{\partial x^t}y^j = 0\,. \tag{9}$$

2.3 "Тождества Максвелла"

Формально введенный тензор F_{ij} обладает полезными чисто геометрическими свойствами. А именно, он удовлетворяет тождеству

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = 0\,. \tag{10}$$

Вводя формальное обозначение

$$F_{12} = E^{(g)}_x;\quad F_{13} = E^{(g)}_y;\quad F_{14} = E^{(g)}_z;\quad F_{23} = -B^{(g)}_z;\quad F_{24} = B^{(g)}_y;\quad F_{34} = -B^{(g)}_x \tag{11}$$

можно немедленно получить пару "тождеств Максвелла", которые в электродинамике известны как уравнения Максвелла

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{B}^{(g)}}{\partial t} + rot\,\mathbf{E}^{(g)} &= 0 \\ div\,\mathbf{B}^{(g)} &= 0\end{aligned} \tag{12}$$

Следуя геометрическому рецепту, как и в [6], перейдем к контравариантному тензору $F^{ij} = \gamma^{ik}\gamma^{jm}F_{mk}$ (для поднятия значков можно использовать γ^{it}, поскольку A_t уже содержит ε), и введем новый 4-вектор I^i следующим образом

$$I^i = \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} \tag{13}$$

Тогда аналогично может быть получена и вторая пара "тождеств Максвелла"

$$\begin{aligned} rot\,\mathbf{B}^{(g)} - \frac{\partial \mathbf{E}^{(g)}}{\partial t} &= \mathbf{j}^{(m)} \\ div\,\mathbf{E}^{(g)} &= \rho^{(m)} \end{aligned} \tag{14}$$

где мы формально обозначили $I^1 = \rho^{(m)}$, $I^2 = j_x^{(m)}$; $I^3 = j_y^{(m)}$; $I^4 = j_z^{(m)}$. Вектор $\mathbf{E}^{(g)}$ равен $\mathbf{E}^{(g)} = (F_{12}, F_{13}, F_{14})$ и, согласно предположению $\dfrac{\partial A^i}{\partial x^1} \ll \dfrac{\partial A^i}{\partial x^\alpha}$ и определению (6), равен и $\mathbf{E}^{(g)} = -\nabla_{(x)}A_1$ где A_1 – значение первой компоненты y-градиента ε_{11}, т.е. $A_1 = \dfrac{1}{2}(\nabla_{(y)}\varepsilon_{11})_1$.

Физическая интерпретация полученных геометрических результатов не может включать ничего, кроме гравитации. Смысл функций в уравнениях (12–14) не такой, как в уравнениях Максвелла в электромагнетизме. Вектора $\mathbf{E}^{(g)}$ и $\mathbf{B}^{(g)} \equiv rot_{(x)}\mathbf{A}$ характеризуют пространство-время с анизотропной метрикой и, таким образом, характеризуют гравитацию, зависящую от скорости. Если интерпретировать $\mathbf{A}$ как вектор-потенциал гравитационного поля, $\rho^{(m)}$ – как плотность массы источника гравитации, и $\mathbf{j}^{(m)}{=}\rho^{(m)}\mathbf{v}$ – как плотность потока массы, или массовый ток, соответствующий собственному движению источника и его частей, мы получим впечатляющую аналогию с электромагнетизмом, и весь соответствующий ему формализм может быть использован при расчетах. Близкие по смыслу уравнения рассматривались в теории, начиная с работ Лензе-Тирринга [9]. Их взаимосвязь с предложенными выше, будет подробнее обсуждена далее.

3 Гравитационная сила

Возвращаясь к уравнению (9) с учетом (12–14), получим

$$\frac{dy^i}{ds} = -\Gamma^i_{11} + \gamma^{it}F_{tj}y^j - \gamma^{it}\frac{\partial A_j}{\partial x^t}y^j \tag{15}$$

и увидим, что гравитационное ускорение теперь представляет собой сумму трех членов. Первый из них связан с Γ^i_{11} и приводит к появлению классического выражения $-\frac{1}{2}\nabla_{(x)}\varepsilon_{11}$, приводящего к гравитации Ньютона $\mathbf{F}_N^{(g)}$, появление двух остальных связано с анизотропией метрики. Второй член представляет собой гравитационный аналог силы Лоренца $\mathbf{F}_L^{(g)}$, пропорциональный

$$\mathbf{F}_L^{(g)} \sim \left(\mathbf{E}^{(g)} + [\mathbf{y}, \mathbf{B}^{(g)}]\right) \tag{16}$$

где $\mathbf{E}^{(g)} = -\frac{1}{2}\nabla_{(x)}\dfrac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial y^1}$ и $\mathbf{B}^{(g)} \equiv rot_{(x)}\mathbf{A}$, $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\big(\dfrac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial y^2}, \dfrac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial y^3}, \dfrac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial y^4}\big)$. С учетом третьего предположения слагаемым $\mathbf{E}^{(g)}$ в уравнении(16) можно пренебречь. Третье слагаемое в (15) можно сначала преобразовать с учетом второго предположения

$$-\gamma^{\alpha t}\frac{\partial A_j}{\partial x^t}y^j = -(-\delta^{\alpha t})[\frac{\partial}{\partial x^t}(A_j y^j) - \frac{\partial y^j}{\partial x^t}] = \left(\nabla_{(x)}(A_j y^j)\right)^\alpha = (\nabla_{(x)}(\mathbf{A}, \mathbf{y}))^\alpha \tag{17}$$

где $\dfrac{\partial y^j}{\partial x^t}$ исчезает, поскольку x и y – независимые переменные. Вспоминая, что правая часть уравнения (15) вначале была умножена на $y^1 y^1$, и $y^1 = 1$ *единиц длины,* учтем все размерные множители непосредственно

$$H\frac{d\mathbf{y}}{c^2 dt} = \frac{1}{2}\left\{-\nabla_{(x)}\varepsilon_{11} + [\mathbf{y}, rot_{(x)}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\mathbf{y}}] + \nabla_{(x)}(\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\mathbf{y}}, \mathbf{y})\right\} \cdot \left(\frac{H}{c}y^1\right)^2. \tag{18}$$

Поскольку $\mathbf{y} = \frac{1}{H}\mathbf{v}$ и $v^1 = c$, выражение для гравитационной силы, действующей на частицу массы m, имеет вид

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}^{(g)} = \frac{mc^2}{2}\left\{-\nabla_{(x)}\varepsilon_{11} + [\mathbf{v}, rot_{(x)}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\mathbf{v}}] + \nabla_{(x)}(\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\mathbf{v}}, \mathbf{v})\right\}. \tag{19}$$

Первый член в скобках соответствует выражению для обычной гравитационной силы. Второй член можно соотнести с "силой Кориолиса", пропорциональной скорости $\mathbf{v}$ частицы, динамика которой может быть описана выражением (19), и обусловлена также собственным движением источника гравитации $rot_{(x)}\dfrac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\mathbf{v}}$. И если система отсчета связана с последним, и его ускорение не прямолинейно, а, например, соответствует движению по окружности, принцип эквивалентности неизбежно требует появления компоненты гравитации типа силы Кориолиса. Третий член в скобках является новым. Полное ускорение частицы теперь зависит не только от распределения масс, но и от их собственного движения и от скорости частицы. Отметим, что в анизотропной геометродинамике гравитационное взаимодействие уже не является только притяжением, как раньше.

3.1 Компоненты гравитационной силы

Упомянем некоторые подробности, касающиеся всех трех членов $F^{(g)1} = F_N^{(g)}$, $F^{(g)2} = F_L^{(g)}$, $F^{(g)3} = \frac{mc^2}{2}\nabla_{(x)}\left(\dfrac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\mathbf{v}}, \mathbf{v}\right)$ в фигурных скобках выражения (19).

Первая компонента гравитационной силы $F_N^{(g)}$, действующая на частицу с массой m, представляет собой действие источника с массой M и направлена по радиусу к центру распределения масс источника. Решение уравнения Пуассона для стационарного гравитационного поля дает $\varepsilon_{11} \sim \frac{1}{r}$, где r – расстояние от частицы до центра, и выбор $\varepsilon_{11} = \frac{2GM}{c^2}\frac{1}{r}$ в ур.(19) для точечного источника на достаточных расстояниях приводит к закону Ньютона $F_N^{(g)} = G\frac{Mm}{r^2}$. Величина $r_S = \frac{2GM}{c^2}$ соответствует радиусу Шварцшильда [10].

Третья компонента гравитационной силы $F^{(g)3}$ соответствует воздействию, оказываемому на движущуюся частицу расширением или сжатием (распределенного) источника. Расширение гравитирующего источника приводит к дополнительной силе притяжения частицы, двигающейся по радиусу к центру.

Выражение для второй компоненты гравитационной силы, $F_L^{(g)}$, требует рассмотреть взаимодействие между движущейся частицей и движущимся распределением масс. В простейшем случае источник представляет собой точечную массу M, вращающуюся с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{c^2}{4H}rot_{(x)}\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\mathbf{y}}. \tag{20}$$

Тогда $F_L^{(g)} = 2m[v, \Omega] \equiv F_C^{(g)}$ принимает вид "грави-Кориолисовой силы" (см. также [11]) и непосредственно демонстрирует отмеченный выше общий характер связи между инерцией и гравитацией. На плоскости, проходящей через M перпендикулярно Ω, можно получить траектории частиц, двигающихся в различных направлениях с различными скоростями. Таким образом, можно проследить различные действия силы $F_L^{(g)}$: притяжение, отталкивание и тангенциальное воздействие, зависящие от угла между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{V} = [\mathbf{R}_{eff}, \mathbf{\Omega}]$, где $\mathbf{R}_{eff}$ – радиус вектор в направлении частицы, R_{eff} – эффективный радиус вращающегося источника. Компоненты скорости, перпендикулярные плоскости, не испытывают действия силы $F_L^{(g)}$, что снимает проблему глобулярных скоплений, упомянутую во Введении. Очевидно, что аналогия с электромагнетизмом (ур. (12, 14) и ниже) может быть весьма полезна при расчетах.

Вклад той или иной компоненты в наблюдаемые явления зависит от параметров системы.

Пример

Рассмотрим упрощенный пример. Пусть источник гравитации представляет собой двойную звезду с характерным расстоянием r_0, массой M и периодом T. Пусть планета m движется вокруг звезд по орбите с характерным радиусом r, $r > r_0$, которая принадлежит плоскости движения звезд. Можно сказать, что движение массивных звезд представляет собой круговой массовый ток $J^{(m)}(r_0)$ такой, что соответствующая величина $B^{(g)}(r)$ может быть рассчитана по закону Био-Савара. Компонента $B^{(g)}(r)$, перпендикулярная плоскости, пропорциональна $B_z^{(g)}(r) \sim J^{(m)}(r_0)/r$. (Заметим, что она направлена "вверх" и "вниз" снаружи и внутри контура, достигая максимума в его центре). Центробежная сила, действующая на обращающуюся планету, $m\frac{v_{orb}^2}{r}$, равна сумме обычного Ньютоновского притяжения $F^{(g)} = mC_1/r^2$, и "грави-Лоренцевой силы" $F_L^{(g)} = mv_{orb}C_2(r_0)/r$, где $C_1, C_2(r_0)$ – константы. Таким образом, квадрат орбитальной скорости планеты v_{orb}^2, будет равен

$$v_{orb}^2 = \frac{C_1}{r} + v_{orb}C_2(r_0)\,. \tag{21}$$

При $r \to \infty$ мы видим, что имеется два корня. Первый из них дает Ньютоновский вклад $v_{orb}|_{r\to\infty} = 0$, а второй соответствует

$$v_{orb}|_{r\to\infty} \to C_2(r_0)\,, \tag{22}$$

что приводит к плоской кривой вращения. Для схожей, но более сложной системы (например, для спиральной галактики) следует обобщить понятие r_0 и найти эффективный радиус R_e. Это можно сделать, например, так

$$I_{eff} = \sum I_n = MR_e^2 \Rightarrow R_e^2 = \sqrt{\frac{I_{eff}}{M}}\,, \tag{23}$$

где I_{eff} – момент инерции системы с общей массой M. Таким образом, R_e характеризует конкретную систему (например, галактику), а эффективная угловая скорость Ω_e можен быть найдена из условия $I_{eff}\,\Omega_e = L_{eff} = \sum L_n$, где L_n моменты импульсов тел составляющих систему. Таким образом, получаем

$$\Omega_e = \frac{L_{eff}}{I_{eff}}\,. \tag{24}$$

Внутри окружности радиуса R_e, компонента $B_z^{(g)}(r)$ меняет знак и $F_L^{(g)}$ становится отталкивающей силой, действующей от центра распределения вращающихся масс.

Оценим величину $C_2(R_e) \sim J^{(m)}(R_e)$. Массовый ток $J^{(m)}(R_e) \sim \frac{M}{T}$, где M пропорциональна площади спиральной галактики R_e^2, а период $T \sim R_e^{3/2}$ в соответствии с законом Кеплера. Это дает $J^{(m)}(R_e) \sim \sqrt{R_e}$. Поскольку светимость L_{lum}, также пропорциональна площади галактики, получим $R_e \sim \sqrt{L_{lum}}$. Поэтому

$$v_{orb}|_{r\to\infty} \sim L_{lum}^{1/4}\,, \tag{25}$$

что соответствует закону Талли-Фишера.

Для того, чтобы найти дополнительное ускорение $\mathbf{a}_L = 2[\mathbf{v}, \mathbf{\Omega}]$, где Ω определяется выражением (20), удобно воспользоваться электромагнитной аналогией, следующей из (12, 14) и выбрать $rot_{(x)} \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial \mathbf{y}} = B^{(g)}$, $B_z^{(g)}(R_e) \sim J^{(m)}(R_e)/r$ для данного распределения движущихся масс. Если выбрать приближение в виде кругового массового тока $J^{(m)}$, с радиусом R_e, и скоростью движения масс $\mathbf{V}$, то

$$\Omega \sim \frac{G}{c^2 r}\frac{MV}{R_e} \tag{26}$$

и дополнительное ускорение тела пропорционально

$$a_L \sim v\frac{GMV}{c^2 r R_e}\,. \tag{27}$$

Отношение этого ускорения к Ньютоновскому $a_N = \frac{GM}{r^2}$ равно

$$\frac{a_L}{a_N} \sim \frac{vV}{c^2}\frac{r}{R_e} = \frac{vr}{c^2}\Omega_e \tag{28}$$

и можно определить области где специфика анизотропии пространства становится существенной. Для заданной частицы, двигающейся со скоростью v на расстоянии r от центра, это отношение дает

$$\frac{a_L}{a_N} \sim \frac{vr}{c^2}\frac{L_{eff}}{I_{eff}}\,, \tag{29}$$

где L_{eff} и I_{eff} характеризуют распределенный источник гравитации.

3.2 Соотношение с "гравитомагнетизмом"

Влияние вращения (точечного) источника на гравитационные эффекты исследовалось уже давно (см. обзор [12]). Вероятно, наиболее известным является эффект Лензе-Тирринга, предложенный в [9], в котором рассчитывается прецессия гироскопа (например, планеты) в поле вращающейся массы (например, звезды). Стоит обратить внимание на то, что исходной целью авторов было исследование принципа Маха о происхождении инерции. Известны и многие другие гравитомагнитные эффекты, рассчитанные в рамках релятивистского подхода: разница показаний часов, переместившихся по и против вращения центрального тела вокруг этого тела в его экваториальной плоскости (используется метрика Керра); эффект Саньяка; вращающаяся черная дыра и другие, включая расщепление спектральных линий, аналогичное эффекту Штерна-Герлаха. Во времена своего расчета все эти эффекты были слишком малыми для экспериментальной проверки, но с тех пор техника эксперимента существенно продвинулась. В работе [13] обсуждается гравитомагнитное воздействие, следующее из полевых уравнений для вращающейся массы в терминах углового момента. Единственный член, входящий там в уравнения динамики, следующие из уравнения геодезической, совпадает с нашим выражением (16).

Существование гравитомагнитных явлений подтверждается измерениями так называемой прецессии Де Ситтера для системы Земля-Луна, совпадающими с расчетом с точностью до 1%, и для гироскопа, установленного на космическом аппарате Gravity Probe B, где достигнутая точность была еще выше. Упомянем также дополнительное ускорение, равное $2.1{\cdot}10^{-11}\ m/s^2$, вызываемое вращением Солнца на расстоянии, равном радиусу орбиты Земли.

В отличие от подхода, развиваемого в данной работе, в рамках гравитомагнитного подхода никогда не рассматривалась метрика в общем виде, а масштаб гравитомагнитных явлений, известных из литературы, никогда не превышал масштаб планетной системы, оставаясь малой поправкой к решениям Ньютона-Шварцшильда для сферически симметричного точечного источника.

Пример

Рассмотрим известную [15] аномалию "Пионеров", состоящую в том, что у космических аппаратов "Пионер-10,11" было обнаружено дополнительное ускорение, направленное к Солнцу и равное $(8.74 \pm 1.33) \cdot 10^{-10}\ m/s^2$, что для расстояния порядка $r \sim 68$ а. е. от Солнца составляет 0.065% соответствующего Ньютоновского ускорения. Получим качественную оценку оценку этой величины на основе существенного упрощения предлагаемого подхода и применим формулу (29). Выбирая скорость аппарата равной $v \sim 1.6 \cdot 10^4\ m/s$, получим $3.4 \cdot 10^{-11}\ m/s^2$, что заметно меньше, чем измеренная величина, но зато соотносится с гравитомагнитным эффектом вращения Солнца, упомянутым выше. Это указывает на то, что при более детальном расчете следует принять во внимание пролетный (flyby) эффект, который в рамках предлагаемого подхода будет обусловлен влиянием *орбитального движения* массивных планет, что приведет к росту полученной оценки.

4 Астрофизические наблюдения и их интерпретация

Как следует из выражений (22) и (25), предложенная анизотропная модификация теории естественным образом обеспечивает плоский характер кривых вращения и выполнение закона Талли-Фишера. Проблема, связанная с различием гравитационного взаимодействия в плоскости галактики и вне ее (для глобулярных скоплений) также теряет остроту, поскольку движение, перпендикулярное галактической плоскости, не испытывает воздействия дополнительных сил, зависящих от скоростей, и таким образом, соответствующие "законы гравитации" действительно различаются.

Необходимость учета некоторой темной материи (или модификации теории гравитации) была впервые заявлена в [14]: видимая масса галактик оказалась слишком мала для того, чтобы они могли объединяться в кластеры. К настоящему времени понятие темной материи нашло много сторонников в связи с накоплением соответствующих данных наблюдений. Одним из наиболее весомых свидетельств в пользу существования темной материи считаются наблюдения сталкивающихся галактических кластеров, выполненных обсерваторией "Чандра" [16].

На данном этапе развития модели анизотропной геометродинамики количественные расчеты этих эффектов еще не получены. Но нетрудно видеть, что предложенная модификация теории гравитации приводит к дополнительному взаимодействию, обусловленному собственными движениями как галактик в кластере, так и в самих галактиках. Это может позволить обойтись и без введения темной материи для объяснения астрофизических эффектов, хотя и не будет противоречить самой возможности существования таких объектов, как бозоны Хиггса.

Идея расширяющейся Вселенной утвердилась в связи с измеренным Хабблом красным смещением спектральных линий удаленных галактик, которое принято объяснять с помощью эффекта Допплера, и в настоящее время общепринятыми являются космологические модели типа Фридмана-Робертсона-Уолкера, соответствующие классической геометродинамике. С этих позиций трактуется и обнаруженное "ускорение расширения", потребовавшее учета в теории Λ-члена, соответствующего взаимодействию отталкивания. Но теперь мы можем предположить, что красное смещение является *гравитационным* красным смещением, обусловленным тангенциальными движениями далеко удаленных объектов. Эта идея находит подтверждение в наблюдениях тангенциального движения квазаров, которое происходит при удивительно высоких скоростях [17]. Таким образом, наблюдаемые эффекты могут быть объяснены и без предположения о радиальном расширении Вселенной, требующем введения темной энергии, но при учете тангенциального движения объектов, вызывающего анизотропию метрики. Таким образом, в астрофизике и космологии повышается роль гидродинамики, поскольку любые скопления масс, такие, как галактики, кластеры галактик и сама Вселенная, можно интерпретировать как турбулентные вихри с присущими им свойствами взаимодействия, проявляющимися на соответствующих масштабах.

В каких случаях и в какой степени можно пренебречь эффектами крупномасштабных движений, следует каждый раз решать отдельно, ориентируясь на соотношение (29), которое устанавливает критерий учета анизотропии. Заметим также, что при измерениях на больших масштабах необходимо учитывать соответствующие модификации уравнений Эйнштейна и электромагнитного волнового уравнения для анизотропной метрики, рассмотренные в [8].

5 Заключение

С проблемами, возникшими у классической геометродинамики, оказалось возможным справиться, обратив внимание на смысл принципа эквивалентности, состоящий в неразличимости инерции и гравитации, а, значит, и на возможность зависимости гравитации от скоростей. С геометрической точки зрения это повлекло введение анизотропной метрики, а это, в свою очередь, потребовало модифицировать выражение Гильберта-Эйнштейна для действия. Таким образом, ни дополнительных поправочных членов в выражении для кривизны (f(R)-теории), ни дополнительных скалярных полей (темная материя), ни произвольно задаваемых функций (МОНД) не потребовалось, и модификация получилась естественной. В результате учета анизотропии изменились уравнения геодезической, и выражение для гравитационного ускорения стало уже в линейном приближении включать не только Ньютоновский член, но также и слагаемые, зависящие от движения самой частицы и от собственного движения (распределенного) источника гравитации. Это позволило разрешить такие проблемы, как плоский характер кривых вращения спиральных галактик, закон Талли-Фишера и различие гравитационного потенциала в плоскости и вне плоскости галактики, не выходя за рамки метрической теории. Сопоставление результатов предлагаемого подхода с результатами теории гравитомагнетизма показало их соответствие в масштабах планетной системы (заметим, что теория гравитомагнетизма применима только к таким масштабам).

Следствием анизотропии в геометродинамике является также возможность интерпретации красного смещения, измеренного Хабблом, как гравитационного, а не Доплеровского, что приводит к новому взгляду на космологические модели Вселенной и не требует привлечения такого понятия, как темная энергия, для объяснения наблюдаемых явлений.

Благодарности

Выражаю глубокую признательность Н. Бринзей за полезные обсуждения.

Работа была поддержана грантом РФФИ № 07-01-91681-RA_a и "Финслеровским фондом".

6 Приложение

Мы рассматриваем x^i как координатную переменную, тогда y^i является переменной, характеризующей направление, и она пропорциональна

$$y^i \sim \frac{dx^i}{ds}, \tag{30}$$

где s – параметр, в качестве которого обычно выбирается длина дуги. Поскольку теперь следует обращаться с x и y одинаковым образом, в определение y^i необходимо ввести такой размерный множитель, что единицы измерения y^i будут теми же, что и единицы измерения x^i

$$y^i = L\frac{dx^i}{ds}; \qquad [L] = length\,. \tag{31}$$

Такое определение позволяет использовать один и тот же метрический тензор для поднятия и опускания значков и в x, и в y подпространствах касательного расслоения. Рассматривая физические задачи, удобно вместо длины дуги использовать время t, т.е. выбрать $ds = cdt$, где c – константа, имеющая размерность скорости $[c] =$ *метр/сек*. Тогда

$$y^i = L\frac{dx^i}{cdt} = \frac{1}{H}\frac{dx^i}{dt} = \frac{1}{H}v^i; \qquad [H] = (time)^{-1}\,. \tag{32}$$

Выполняя математические преобразования, удобно использовать систему единиц, в которой $c = H = 1$.

Литература

[1] A. Aguirre, C. P. Burgess, A. Friedland and D. Nolte. arXiv: hep-ph/0105083 v2 25 May 2001

[2] B. S. DeWitt, Relativity, Groups and Topology, C. DeWitt and B. S. DeWitt, Eds. (Gordon and Breach New York 1964)

[3] C. Brans and R. H. Dicke, Phys. Rev. 124, p. 925, (1961)

[4] J.W. Moffat. Phys.Lett.B 355, p. 447, (1995)

[5] M. Milgrom, Astrophys.J. 270, p. 384, (1983)

[6] A. Einstein. Ann. d. Phys. 49, p. 769, (1916) (Rus.trans. in "Albert Einstein and the Theory of Gravitation", Mir, Moscow, 1979)

[7] H. Rund. *Differential Geometry of Finsler Spaces*, Nauka, Moscow, 1981 (rus)

[8] S. Siparov, N. Brinzei. arXiv: [gr-qc] 0806.3066 v1 18 Jun 2008

[9] J. Lense, H. Thirring. Phys. Z. 19, s. 156, (1918)

[10] K. Schwarzschild. Sitzungsber. d. Berl. Akad., s. 189, (1916)

[11] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Теория поля*, Наука, Москва, 1967

[12] M. L. Ruggiero, A. Tartaglia. arXiv:gr-qc/0207065v2

[13] B. Mashhoon et.al. Lect. Notes Phys., 562, p. 83, (2001)

[14] F. Zwicky. Helvetic Physica Acta 6, p. 110, (1933)

[15] J. D. Anderson et al. Phys. Rev. Lett. 81, p. 2858, (1998)

[16] D. Clowe, et al. arXiv: astro-ph/0608407 v1 19 Aug 2006

[17] D. S. MacMillan. arXiv: astro-ph/0309826; O. Titov. Proc. Conf. FERT-07, Moscow, 2007