

О ПРОЦЕДУРЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАБЛЮДАЕМЫХ 3-СКОРОСТЕЙ В ПОЛНОСТЬЮ АНИЗОТРОПНОМ ФИНСЛЕРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБЫТИЙ*

Г. Ю. Богословский

*НИИ ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, МГУ им. М. В. Ломоносова
bogoslov@theory.sinp.msu.ru*

Мы продолжаем изучение геометрических фазовых переходов, сопровождающих динамическую перестройку вакуума при спонтанном нарушении исходной калибровочной симметрии. В результате такой перестройки могут возникать три типа конденсатов, а именно – скалярный, аксиально симметричный и полностью анизотропный конденсат. Только в случае скалярного конденсата плоское пространство-время остается пространством Минковского. В случае образования анизотропного конденсата, соответствующая анизотропия появляется и у пространства-времени; при этом пространство-время, заполненное аксиально симметричным конденсатом, оказывается плоским релятивистски инвариантным финслеровым пространством с частично нарушенной 3D изотропией, а пространство-время, заполненное полностью анизотропным конденсатом, проявляет себя как плоское релятивистски инвариантное финслерово пространство с полностью нарушенной 3D изотропией. Эти два типа финслеровых пространств кратко описаны в расширенной вводной части работы, а оригинальная её часть посвящена определению наблюдаемых 3-скоростей в полностью анизотропном финслеровом пространстве событий. Основные трудности, которые удалось преодолеть при решении данной задачи, связаны с нестандартным видом уравнения светового конуса и с корректным введением нормы в векторном пространстве быстрот.

1 Введение

В последние годы в литературе широко дебатруется проблема нарушения лоренцевой симметрии. Такой интерес к этой проблеме во многом связан с построением струнно-мотивированной феноменологической теории, известной как the Standard Model Extension (SME) [1–3].

На фоне исследований, проводимых в рамках SME, всё более и более популярным становится другой, так называемый финслеров подход к нарушению лоренцевой симметрии (см., в частности, [4]– [18]). В основе этого подхода лежит не псевдоевклидова, а финслерова геометрическая модель плоского пространства событий. Большим достоинством финслеровой модели, которое предопределяет её роль в развитии теории фундаментальных взаимодействий и релятивистской астрофизики, является то, что она приводит к нарушению лоренцевой симметрии без нарушения релятивистской симметрии.

Как оказалось, помимо пространства Минковского существуют только два типа плоских финслеровых пространств, обладающих релятивистской симметрией, т. е. симметрией, соответствующей лоренцевым бустам. Финслерово пространство первого типа является пространством с частично нарушенной 3D изотропией, а финслерово пространство второго типа является пространством с полностью нарушенной 3D изотропией. Опишем кратко их основные свойства (детали см. в [8, 19]).

* Русская версия статьи, опубликованной в журнале SIGMA 4 (2008), 045.

1.1 Плоское релятивистски симметричное финслерово пространство с частично нарушенной 3D изотропией

Метрика такого пространства событий, полученная в [20], имеет следующий вид

$$ds^2 = \left[\frac{(dx_0 - \boldsymbol{\nu} d\mathbf{x})^2}{dx_0^2 - d\mathbf{x}^2} \right]^r (dx_0^2 - d\mathbf{x}^2). \quad (1)$$

Эта метрика зависит от двух постоянных параметров r и $\boldsymbol{\nu}$ и обобщает метрику Минковского, причем r определяет величину пространственной анизотропии, характеризуя тем самым степень отклонения метрики (1) от метрики Минковского. Вместо 3-параметрической группы вращений пространства Минковского, данное плоское финслерово пространство событий допускает только 1-параметрическую группу вращений вокруг единичного вектора $\boldsymbol{\nu}$, который указывает физически выделенное направление в 3D пространстве. С трансляционной симметрией никаких изменений не происходит: пространственно-временные трансляции оставляют метрику (1) инвариантной. Что касается преобразований, связывающих различные инерциальные системы отсчета, обычные лоренцевы бусты конформно видоизменяют метрику (1). Поэтому они не принадлежат группе изометрий пространства-времени (1). Однако, используя их, можно построить такие преобразования [4], которые входят в группу изометрий пространства-времени (1). Соответствующие обобщённые преобразования Лоренца (обобщенные лоренцевы бусты) можно представить в следующей форме

$$x'^i = D(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}) R_j^i(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}) L_k^j(\mathbf{v}) x^k, \quad (2)$$

где \mathbf{v} обозначает скорости движущихся (штрихованных) систем отсчёта, матрицы $L_k^j(\mathbf{v})$ представляют обычные лоренцевы бусты, матрицы $R_j^i(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu})$ — дополнительные повороты пространственных осей движущихся систем вокруг векторов $[\mathbf{v} \boldsymbol{\nu}]$ на углы

$$\varphi = \arccos \left\{ 1 - \frac{(1 - \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2})[\mathbf{v} \boldsymbol{\nu}]^2}{(1 - \mathbf{v} \boldsymbol{\nu}/c)\mathbf{v}^2} \right\}$$

релятивистской аберрации вектора $\boldsymbol{\nu}$ и, наконец, диагональные матрицы

$$D(\mathbf{v}, \boldsymbol{\nu}) = \left(\frac{1 - \mathbf{v} \boldsymbol{\nu}/c}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right)^r I$$

представляют дополнительные дилатационные преобразования координат событий.

В отличие от обычных лоренцевых бустов, обобщённые бусты (2) составляют 3-параметрическую некомпактную группу с генераторами X_1, X_2, X_3 . Таким образом, с включением 1-параметрической группы вращений вокруг выделенного направления $\boldsymbol{\nu}$ и 4-параметрической группы трансляций, неоднородная группа изометрий пространства событий (1) оказывается 8-параметрической. Чтобы получить простейшее представление для её генераторов, достаточно направить третью пространственную ось вдоль $\boldsymbol{\nu}$ и переписать преобразования (2) в инфинитезимальной форме. В результате мы приходим к следующим восьми генераторам

$$\begin{aligned} X_1 &= -(x^1 p_0 + x^0 p_1) - (x^1 p_3 - x^3 p_1), \\ X_2 &= -(x^2 p_0 + x^0 p_2) + (x^3 p_2 - x^2 p_3), \\ X_3 &= -r x^i p_i - (x^3 p_0 + x^0 p_3), \\ R_3 &= x^2 p_1 - x^1 p_2; \end{aligned} \quad p_i = \partial/\partial x^i. \quad (3)$$

Согласно [4], эти генераторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned}
[X_1 X_2] &= 0, & [R_3 X_3] &= 0, \\
[X_3 X_1] &= X_1, & [R_3 X_1] &= X_2, \\
[X_3 X_2] &= X_2, & [R_3 X_2] &= -X_1; \\
[p_i p_j] &= 0; \\
[X_1 p_0] &= p_1, & [X_2 p_0] &= p_2, & [X_3 p_0] &= r p_0 + p_3, & [R_3 p_0] &= 0, \\
[X_1 p_1] &= p_0 + p_3, & [X_2 p_1] &= 0, & [X_3 p_1] &= r p_1, & [R_3 p_1] &= p_2, \\
[X_1 p_2] &= 0, & [X_2 p_2] &= p_0 + p_3, & [X_3 p_2] &= r p_2, & [R_3 p_2] &= -p_1, \\
[X_1 p_3] &= -p_1, & [X_2 p_3] &= -p_2, & [X_3 p_3] &= r p_3 + p_0, & [R_3 p_3] &= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Отсюда видно, что однородная группа изометрий аксиально симметричного финслерова пространства (1) содержит четыре параметра (генераторы X_1 , X_2 , X_3 и R_3). Являясь подгруппой 11-параметрической группы Вейля [21], она изоморфна соответствующей 4-параметрической подгруппе (с генераторами X_1 , X_2 , $X_3|_{r=0}$ и R_3) однородной группы Лоренца. Так как 6-параметрическая однородная группа Лоренца не имеет ни одной 5-параметрической подгруппы, в то время как её 4-параметрическая подгруппа является с точностью до изоморфизмов единственной [22], переход от пространства Минковского к аксиально симметричному финслерову пространству (1) подразумевает минимально возможное нарушение лоренцевой симметрии. При этом релятивистская симметрия, представленная теперь обобщёнными лоренцевыми бустами (2), остается в силе.

Благодаря тому, что в финслеровом пространстве событий (1) распространение световых сигналов происходит точно так же, как и в пространстве Минковского, применение [23] эйнштейновской процедуры обмена световыми сигналами позволяет сделать вывод, что координаты x_0 и \mathbf{x} , в которых задана метрика (1), имеют смысл наблюдаемых галилеевых координат событий. Соответственно, координатная скорость $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dx_0$ является наблюдаемой величиной и для неё остаётся в силе эйнштейновский закон сложения 3-скоростей. С формальной точки зрения это означает, что переход от пространства Минковского к финслерову пространству (1) не приводит к изменению геометрических свойств пространства 3-скоростей: оно по-прежнему является пространством Лобачевского с метрикой

$$dl^2 = \frac{(d\mathbf{v})^2 - [\mathbf{v}d\mathbf{v}]^2}{(1 - \mathbf{v}^2)^2},$$

причем ортогональные компоненты 3-скорости \mathbf{v} служат в нём координатами Бельтрами.

Важную информацию о физических проявлениях анизотропии пространства можно получить, рассмотрев функцию Лагранжа [4], соответствующую финслеровой метрике (1). Такая функция описывает специфическое несепарабельное взаимодействие частицы с постоянным (r и ν фиксированы) полем, характеризующим пространственную анизотропию. В результате мы приходим к выводу, что, несмотря на анизотропию пространства, свободное инерциальное движение частицы остаётся по-прежнему прямолинейным и равномерным. Однако, в отличие от ситуации в пространстве Минковского, направление импульса частицы не совпадает с направлением её скорости. В частности, помимо энергии покоя $E = mc^2$, частица имеет ещё и импульс покоя $\mathbf{p} = r m c \boldsymbol{\nu}$, а инертная масса нерелятивистской частицы (входящая во второй закон Ньютона)

оказывается [24, 25] не скаляром, а тензором

$$m_{ik} = m(1 - r)(\delta_{ik} + r\nu_i \nu_k). \quad (5)$$

Что касается влияния анизотропии пространства на поведение фундаментальных полей, то корректный учёт такого влияния связан с финслеровым обобщением известных полевых уравнений. При этом, поскольку финслерово пространство (1) является трансляционно инвариантным, соответствующие обобщённые полевые уравнения должны допускать решения в виде плоских волн типа $\exp(ip_k x^k)$, где p_k — канонический 4-импульс (волновой вектор) частицы в анизотропном пространстве (1), удовлетворяющий, как показано в [4], релятивистски инвариантному дисперсионному соотношению

$$\left[\frac{(p_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\nu})^2}{p_0^2 - \mathbf{p}^2} \right]^{-r} (p_0^2 - \mathbf{p}^2) = m^2(1-r)^{(1-r)}(1+r)^{(1+r)}. \quad (6)$$

Здесь и в дальнейшем мы положили $c = \hbar = 1$. Уже из соотношения (6) видно, что анизотропия пространства событий (1) никак не влияет на динамику безмассовых полей и, в частности, электромагнитного поля. Поэтому, в соответствующем обобщении нуждаются только фундаментальные уравнения для массивных полей.

Если начать с уравнения Клейна-Гордона и попытаться его обобщить, используя обобщённое дисперсионное соотношение (6) и подстановку $p_k \rightarrow i\partial/\partial x^k$, то мы получим обобщённое уравнение Клейна-Гордона либо в форме линейного интегрального уравнения [25, 26], либо — интегродифференциального уравнения [16]. Вместе с тем, с точки зрения локальной квантовой теории поля, более адекватным представляется другой, а именно, лагранжев подход к проблеме финслерова обобщения полевых уравнений. Исходные руководящие принципы для построения соответствующих обобщённых лагранжианов были сформулированы в работе [27]. С их помощью удалось, в частности, показать, что действительное массивное поле не существует как свободное поле в финслеровом пространстве-времени (1), но зато оно существует как нейтральная компонента φ_2 изотопического триплета $\boldsymbol{\varphi}(x) = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), -\varphi_1^*(x)\}$, обобщённый лагранжиан для которого имеет следующий вид

$$\mathcal{L} = \varphi_{1;n}^* \varphi_1^{;n} + \frac{1}{2} \varphi_{2;n} \varphi_2^{;n} - \frac{m^2}{2} (1 - r^2) \left[\frac{\nu^k j_k}{(1-r)m(2\varphi_1^* \varphi_1 + \varphi_2^2)} \right]^{\left(\frac{2r}{1+r}\right)} (2\varphi_1^* \varphi_1 + \varphi_2^2),$$

где $j_k = i(\varphi_1^* \varphi_{1;k} - \varphi_1 \varphi_{1;k}^*)$.

Что касается влияния пространственной анизотропии на динамику массивного фермионного поля, то оно описывается следующим обобщённым дираковским лагранжианом [9]

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - m \left[\left(\frac{\nu_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi}{\bar{\psi} \psi} \right)^2 \right]^{r/2} \bar{\psi} \psi, \quad (7)$$

где $\nu_\mu = (1, -\boldsymbol{\nu})$.

В отличие от стандартного лагранжиана Дирака, обобщённый лагранжиан (7) приводит к нелинейным спинорным уравнениям, которые допускают решение в виде аксиально симметричного фермион-антифермионного конденсата. Появление такого конденсата в качестве физического источника анизотропии плоского пространства-времени (1) реализует один из возможных механизмов перестройки вакуума при спонтанном нарушении исходной калибровочной симметрии.

Заканчивая краткое описание релятивистски инвариантной модели плоского финслерова пространства событий (1), нельзя не отметить один из последних и наиболее впечатляющих результатов в этой области, который получили G.W. Gibbons,

Joаquim Gomis и С.N. Pore. Мы имеем в виду предложенный в [16] оператор СРТ преобразования. Интересно также отметить, что, по большей части, представленные выше результаты были воспроизведены в [16] с помощью методов непрерывных деформаций алгебр Ли и нелинейных реализаций. При этом, однако, в [16] были использованы другие обозначения. В частности, для обозначения параметра, характеризующего величину пространственной анизотропии, была использована буква b вместо r , а 8-параметрическая группа финслеровых изометрий получила название $\text{DISIM}_b(2)$, т. е. Deformed Inhomogeneous SIMilitude группа, включающая 2-параметрическую абелеву однородную некомпактную подгруппу. В нашем базисе её генераторы и алгебра Ли имеют соответственно вид (3) и (4). Что касается конечных преобразований, составляющих однородные некомпактные подгруппы группы $\text{DISIM}_b(2)$, то их можно найти в [10].

1.2 Плоское релятивистски симметричное финслерово пространство с полностью нарушенной 3D изотропией

В наиболее общей форме, а именно, в виде

$$ds = (dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)^{(1+r_1+r_2+r_3)/4} (dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3)^{(1+r_1-r_2-r_3)/4} \times (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)^{(1-r_1+r_2-r_3)/4} (dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)^{(1-r_1-r_2+r_3)/4} \quad (8)$$

метрика плоского полностью анизотропного финслерова пространства событий была найдена в [19]. Три параметра (r_1 , r_2 и r_3) характеризуют анизотропию пространства (8) и ограничены условиями

$$\begin{aligned} 1 + r_1 + r_2 + r_3 &\geq 0, & 1 + r_1 - r_2 - r_3 &\geq 0, \\ 1 - r_1 + r_2 - r_3 &\geq 0, & 1 - r_1 - r_2 + r_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Стоит отметить, что, при $r_1 = r_2 = r_3 = 0$, метрика (8) сводится к корню четвёртой степени из произведения четырёх 1-форм

$$ds_{B-M} = [(dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3)(dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3) \times (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3)(dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3)]^{1/4}.$$

Таким образом, в данном частом случае мы получаем хорошо известную метрику Бервальда-Моора [28, 29], но записанную в базисе, который был введён в [19]. Что касается ненулевых значений параметров r_i , с физической точки зрения особый интерес представляют следующие их значения

$$\begin{aligned} (r_1 = 1, r_2 = -1, r_3 = -1); & \quad (r_1 = -1, r_2 = -1, r_3 = 1); \\ (r_1 = -1, r_2 = 1, r_3 = -1); & \quad (r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 1). \end{aligned}$$

Дело в том, что, когда параметры r_i достигают данных значений, метрика (8), которая описывает плоское пространство-время с полностью нарушенной 3D изотропией, вырождается в соответствующие 1-формы, т. е. — в полный дифференциал абсолютного времени :

$$\begin{aligned} ds|_{(r_1=1, r_2=-1, r_3=-1)} &= dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3; & ds|_{(r_1=-1, r_2=-1, r_3=1)} &= dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3; \\ ds|_{(r_1=-1, r_2=1, r_3=-1)} &= dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3; & ds|_{(r_1=1, r_2=1, r_3=1)} &= dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3. \end{aligned}$$

Поскольку аналогичная ситуация имеет место и для метрики (1) (она тоже вырождается, при $r = 1$, в полный дифференциал абсолютного времени), то отсюда мы

закключаем [19], что абсолютное время не является стабильным вырожденным состоянием пространства-времени. Под этим подразумевается, что абсолютное время может перейти как в частично анизотропное пространство-время (1), так и в полностью анизотропное пространство-время (8). В любом случае соответствующий геометрический фазовый переход от абсолютного времени к 4D пространству-времени может рассматриваться как Акт Творения 3D пространства. Это явление сопровождается перестройкой вакуумного состояния системы первоначально безмассовых взаимодействующих фундаментальных полей, в результате чего элементарные частицы приобретают массы. В случае пространства-времени (1) приобретённая масса определяется тензором (5). Что касается пространства-времени (8), приобретённая масса определяется тензором

$$m_{ik} = m \begin{pmatrix} (1 - r_1^2) & (r_3 - r_1 r_2) & (r_2 - r_1 r_3) \\ (r_3 - r_1 r_2) & (1 - r_2^2) & (r_1 - r_2 r_3) \\ (r_2 - r_1 r_3) & (r_1 - r_2 r_3) & (1 - r_3^2) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Только после завершения описанного выше процесса такие понятия, как пространственная протяжённость и система отсчёта, становятся физически осмысленными (в безмассовом мире бессмысленно говорить о пространственной протяжённости чего-либо, равно как и о какой-либо системе отсчёта). В связи с этим стоит отметить, что уже в одной из первых единых калибровочных теорий (а именно, в конформной теории Вейля [30]) само понятие пространственно-временного интервала приобретает физический смысл лишь после нарушения локальной конформной симметрии, в результате чего первоначально безмассовое абелево векторное калибровочное поле приобретает массу [31]. В дополнение к сказанному, нужно иметь в виду и тот факт, что с формальной точки зрения абсолютное время служит связующим звеном, посредством которого реализуется принцип соответствия для финслеровых пространств с частично и полностью нарушенной 3D изотропией.

Рассмотрим теперь группу изометрий полностью анизотропного финслерова пространства (8). Как оказалось [19], однородная 3-параметрическая некомпактная группа изометрий пространства-времени (8) является абелевой, а составляющие её преобразования, которые имеют тот же смысл, что и обычные лоренцевы бусты, можно записать в следующем виде

$$x'_i = D L_{ik} x_k, \quad (10)$$

где

$$D = e^{-(r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + r_3 \alpha_3)},$$

матрицы L_{ik} — унимодулярны, причем

$$L_{ik} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & -\mathcal{B} & -\mathcal{C} & -\mathcal{D} \\ -\mathcal{B} & \mathcal{A} & \mathcal{D} & \mathcal{C} \\ -\mathcal{C} & \mathcal{D} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ -\mathcal{D} & \mathcal{C} & \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\mathcal{A} = \cosh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \cosh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \sinh \alpha_3,$$

$$\mathcal{B} = \cosh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \sinh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \cosh \alpha_3,$$

$$\mathcal{C} = \cosh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \cosh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \sinh \alpha_3,$$

$$\mathcal{D} = \cosh \alpha_1 \cosh \alpha_2 \sinh \alpha_3 + \sinh \alpha_1 \sinh \alpha_2 \cosh \alpha_3,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — групповые параметры. Ниже, наряду с α_i , мы будем использовать в качестве групповых параметров компоненты $v_i = dx_i/dx_0$ координатной скорости штрихованной системы отсчета. Параметры v_i и α_i связаны соотношениями

$$\begin{aligned} v_1 &= (\tanh \alpha_1 - \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3) / (1 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3), \\ v_2 &= (\tanh \alpha_2 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_3) / (1 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3), \\ v_3 &= (\tanh \alpha_3 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2) / (1 - \tanh \alpha_1 \tanh \alpha_2 \tanh \alpha_3). \end{aligned} \quad (12)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{4} \ln \frac{(1 + v_1 - v_2 + v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3)}{(1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 - v_1 + v_2 + v_3)}, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{4} \ln \frac{(1 - v_1 + v_2 + v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3)}{(1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 + v_1 - v_2 + v_3)}, \\ \alpha_3 &= \frac{1}{4} \ln \frac{(1 - v_1 + v_2 + v_3)(1 + v_1 - v_2 + v_3)}{(1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Что касается генераторов X_i абелевой однородной 3-параметрической группы изометрий (10), они могут быть представлены следующим образом

$$\begin{aligned} X_1 &= -r_1 x_\alpha p_\alpha - (x_1 p_0 + x_0 p_1) + (x_2 p_3 + x_3 p_2), \\ X_2 &= -r_2 x_\alpha p_\alpha - (x_2 p_0 + x_0 p_2) + (x_1 p_3 + x_3 p_1), \\ X_3 &= -r_3 x_\alpha p_\alpha - (x_3 p_0 + x_0 p_3) + (x_1 p_2 + x_2 p_1), \end{aligned}$$

где $p_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$ — генераторы 4-параметрической группы трансляций. Таким образом, с включением последней, неоднородная группа изометрий полностью анизотропного финслерова пространства событий (8) оказывается 7-параметрической, а её генераторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [X_i X_j] &= 0; & [p_\alpha p_\beta] &= 0; \\ [X_1 p_0] &= r_1 p_0 + p_1, & [X_2 p_0] &= r_2 p_0 + p_2, & [X_3 p_0] &= r_3 p_0 + p_3, \\ [X_1 p_1] &= r_1 p_1 + p_0, & [X_2 p_1] &= r_2 p_1 - p_3, & [X_3 p_1] &= r_3 p_1 - p_2, \\ [X_1 p_2] &= r_1 p_2 - p_3, & [X_2 p_2] &= r_2 p_2 + p_0, & [X_3 p_2] &= r_3 p_2 - p_1, \\ [X_1 p_3] &= r_1 p_3 - p_2, & [X_2 p_3] &= r_2 p_3 - p_1, & [X_3 p_3] &= r_3 p_3 + p_0. \end{aligned}$$

Заканчивая на этом вводную часть данной работы, отметим, что её следующая, оригинальная часть посвящена дальнейшему изучению плоского релятивистски инвариантного финслерова пространства с полностью нарушенной 3D изотропией (выражение (8)). Дело в том, что, в противоположность метрике (1), координаты x_0, x_i , в которых задана метрика (8), не являются ортогональными галилеевыми координатами событий. Соответственно, 3-скорость $v_i = dx_i/dx_0$ не является наблюдаемой величиной, а имеет смысл только как координатная 3-скорость в пространстве событий (8). Заметим кстати, что в рамках обычной СТО координатная 3-скорость, которая соответствует неортогональным координатам, тоже не является наблюдаемой 3-скоростью и для определения последней существует хорошо известный алгоритм. Из сказанного ясно, что физическая идентификация различных величин и соотношений, возникающих в рамках модели плоского финслерова пространства событий (8), требует особого внимания и порой превращается в самостоятельную задачу. Ниже будет решена одна из таких задач, позволяющая по-новому подойти к интерпретации ряда

астрофизических наблюдений и, в частности, данных, относящихся к температурной анизотропии реликтового излучения. Мы имеем в виду проблему определения наблюдаемых 3-скоростей в рамках модели плоского анизотропного пространства событий (8). Построение соответствующего алгоритма, с помощью которого величина наблюдаемой 3-скорости может быть выражена через её компоненты, мы начнем с рассмотрения пространства координатных 3-скоростей.

2 Компоненты относительной координатной 3-скорости двух частиц

Очевидно, что группа обобщённых лоренцевых бустов (10), действующая в полностью анизотропном пространстве событий (8), индуцирует группу соответствующих преобразований в пространстве координатных 3-скоростей $v_i = dx_i/dx_0$. Для того, чтобы получить такие преобразования, давайте перепишем (10) в терминах дифференциалов координат:

$$\begin{aligned} dx'_0 &= D(A dx_0 - B dx_1 - C dx_2 - D dx_3), \\ dx'_1 &= D(-B dx_0 + A dx_1 + D dx_2 + C dx_3), \\ dx'_2 &= D(-C dx_0 + D dx_1 + A dx_2 + B dx_3), \\ dx'_3 &= D(-D dx_0 + C dx_1 + B dx_2 + A dx_3). \end{aligned}$$

Деля теперь второе, третье и четвёртое на первое из этих соотношений и используя тот факт, что $v_i = dx_i/dx_0$ является компонентами координатной 3-скорости, мы получаем

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{-B + A v_1 + D v_2 + C v_3}{A - B v_1 - C v_2 - D v_3}, \\ v'_2 &= \frac{-C + D v_1 + A v_2 + B v_3}{A - B v_1 - C v_2 - D v_3}, \\ v'_3 &= \frac{-D + C v_1 + B v_2 + A v_3}{A - B v_1 - C v_2 - D v_3}. \end{aligned} \quad (14)$$

Данные формулы связывают компоненты v_i и v'_i координатной 3-скорости частицы в исходной и штрихованной инерциальных системах соответственно, причём зависимость фигурирующих здесь матричных элементов A, B, C, D от координатной 3-скорости штрихованной системы определяется соотношениями (11) и (13). С формальной точки зрения преобразования (14) являют собой нелинейное представление линейной группы (10). Кроме того следует отметить, что это представление оказалось независимым от параметров r_i . Поэтому оно в равной мере справедливо для метрики Бервальда-Моора, чем мы в дальнейшем и воспользуемся.

Рассмотрим теперь две частицы. Пусть $v_i^{(2)}$ — координатная 3-скорость второй частицы в исходной системе отсчёта, а $v_i^{(1)}$ — координатная 3-скорость первой частицы в той же системе. Вдобавок, идентифицируем $v_i^{(1)}$ с координатной 3-скоростью штрихованной системы. В результате штрихованная система приобретает смысл системы покоя первой частицы. Наконец, обозначим посредством $v_i^{(1 \rightarrow 2)}$ компоненты координатной 3-скорости второй частицы в системе покоя первой частицы или, другими словами, — относительную скорость второй частицы по отношению к первой. Используя данные обозначения и формулы (11), (13), мы с помощью (14) получаем

$$v_1^{(1 \rightarrow 2)} = \frac{-B^{(1)} + A^{(1)} v_1^{(2)} + D^{(1)} v_2^{(2)} + C^{(1)} v_3^{(2)}}{A^{(1)} - B^{(1)} v_1^{(2)} - C^{(1)} v_2^{(2)} - D^{(1)} v_3^{(2)}},$$

$$\begin{aligned}
v_2^{(1 \rightarrow 2)} &= \frac{\overset{(1)}{\mathcal{C}} + \overset{(1)}{\mathcal{D}} v_1 + \overset{(1)}{\mathcal{A}} v_2 + \overset{(1)}{\mathcal{B}} v_3}{\overset{(1)}{\mathcal{A}} - \overset{(1)}{\mathcal{B}} v_1 - \overset{(1)}{\mathcal{C}} v_2 - \overset{(1)}{\mathcal{D}} v_3}, \\
v_3^{(1 \rightarrow 2)} &= \frac{-\overset{(1)}{\mathcal{D}} + \overset{(1)}{\mathcal{C}} v_1 + \overset{(1)}{\mathcal{B}} v_2 + \overset{(1)}{\mathcal{A}} v_3}{\overset{(1)}{\mathcal{A}} - \overset{(1)}{\mathcal{B}} v_1 - \overset{(1)}{\mathcal{C}} v_2 - \overset{(1)}{\mathcal{D}} v_3},
\end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
\overset{(1)}{\mathcal{A}} &= \frac{1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1 v_2 v_3}{\left[\left(1 - v_1 - v_2 - v_3\right) \left(1 - v_1 + v_2 + v_3\right) \left(1 + v_1 - v_2 + v_3\right) \left(1 + v_1 + v_2 - v_3\right) \right]^{3/4}}, \\
\overset{(1)}{\mathcal{B}} &= \frac{v_1 + 2v_2 v_3 - v_1 \left(v_1^2 - v_2^2 - v_3^2\right)}{\left[\left(1 - v_1 - v_2 - v_3\right) \left(1 - v_1 + v_2 + v_3\right) \left(1 + v_1 - v_2 + v_3\right) \left(1 + v_1 + v_2 - v_3\right) \right]^{3/4}}, \\
\overset{(1)}{\mathcal{C}} &= \frac{v_2 + 2v_1 v_3 - v_2 \left(v_2^2 - v_1^2 - v_3^2\right)}{\left[\left(1 - v_1 - v_2 - v_3\right) \left(1 - v_1 + v_2 + v_3\right) \left(1 + v_1 - v_2 + v_3\right) \left(1 + v_1 + v_2 - v_3\right) \right]^{3/4}}, \\
\overset{(1)}{\mathcal{D}} &= \frac{v_3 + 2v_1 v_2 - v_3 \left(v_3^2 - v_1^2 - v_2^2\right)}{\left[\left(1 - v_1 - v_2 - v_3\right) \left(1 - v_1 + v_2 + v_3\right) \left(1 + v_1 - v_2 + v_3\right) \left(1 + v_1 + v_2 - v_3\right) \right]^{3/4}}.
\end{aligned}$$

Эти громоздкие формулы выражают компоненты относительной координатной 3-скорости двух частиц через компоненты координатных 3-скоростей каждой из частиц. Если теперь обратить внимание на то, что данные формулы являются прямым следствием преобразований (10), составляющих абелеву группу с параметрами α_i , а сами α_i можно рассматривать как компоненты быстроты, связанные с v_i соотношениями (12) и (13), то напрашивается вывод, что в терминах α_i формулы (15) должны значительно упрощаться и принимать вид

$$\alpha_i^{(1 \rightarrow 2)} = \alpha_i^{(2)} - \alpha_i^{(1)}. \tag{16}$$

То, что такой вывод является действительно правильным, доказывается следующим образом. Сначала, исходя из (15), путём непосредственных вычислений мы приходим к трём уравнениям:

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(1 + \frac{v_1^{(1 \rightarrow 2)}}{v_1} - \frac{v_2^{(1 \rightarrow 2)}}{v_2} + \frac{v_3^{(1 \rightarrow 2)}}{v_3}\right) \left(1 + \frac{v_1^{(1 \rightarrow 2)}}{v_1} + \frac{v_2^{(1 \rightarrow 2)}}{v_2} - \frac{v_3^{(1 \rightarrow 2)}}{v_3}\right)}{\left(1 - \frac{v_1^{(1 \rightarrow 2)}}{v_1} - \frac{v_2^{(1 \rightarrow 2)}}{v_2} - \frac{v_3^{(1 \rightarrow 2)}}{v_3}\right) \left(1 - \frac{v_1^{(1 \rightarrow 2)}}{v_1} + \frac{v_2^{(1 \rightarrow 2)}}{v_2} + \frac{v_3^{(1 \rightarrow 2)}}{v_3}\right)} = \\
&= \frac{\left(1 - v_1 - v_2 - v_3\right) \left(1 - v_1 + v_2 + v_3\right) \left(1 + v_1 - v_2 + v_3\right) \left(1 + v_1 + v_2 - v_3\right)}{\left(1 + v_1 - v_2 + v_3\right) \left(1 + v_1 + v_2 - v_3\right) \left(1 - v_1 - v_2 - v_3\right) \left(1 - v_1 + v_2 + v_3\right)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\left(1 - \binom{(1\rightarrow 2)}{v_1} + \binom{(1\rightarrow 2)}{v_2} + \binom{(1\rightarrow 2)}{v_3}\right) \left(1 + \binom{(1\rightarrow 2)}{v_1} + \binom{(1\rightarrow 2)}{v_2} - \binom{(1\rightarrow 2)}{v_3}\right)}{\left(1 - \binom{(1\rightarrow 2)}{v_1} - \binom{(1\rightarrow 2)}{v_2} - \binom{(1\rightarrow 2)}{v_3}\right) \left(1 + \binom{(1\rightarrow 2)}{v_1} - \binom{(1\rightarrow 2)}{v_2} + \binom{(1\rightarrow 2)}{v_3}\right)} = \\
 & = \frac{\left(1 - \binom{(1)}{v_1} - \binom{(1)}{v_2} - \binom{(1)}{v_3}\right) \left(1 + \binom{(1)}{v_1} - \binom{(1)}{v_2} + \binom{(1)}{v_3}\right) \left(1 - \binom{(2)}{v_1} + \binom{(2)}{v_2} + \binom{(2)}{v_3}\right) \left(1 + \binom{(2)}{v_1} + \binom{(2)}{v_2} - \binom{(2)}{v_3}\right)}{\left(1 - \binom{(1)}{v_1} + \binom{(1)}{v_2} + \binom{(1)}{v_3}\right) \left(1 + \binom{(1)}{v_1} + \binom{(1)}{v_2} - \binom{(1)}{v_3}\right) \left(1 - \binom{(2)}{v_1} - \binom{(2)}{v_2} - \binom{(2)}{v_3}\right) \left(1 + \binom{(2)}{v_1} - \binom{(2)}{v_2} + \binom{(2)}{v_3}\right)}, \\
 & \frac{\left(1 - \binom{(1\rightarrow 2)}{v_1} + \binom{(1\rightarrow 2)}{v_2} + \binom{(1\rightarrow 2)}{v_3}\right) \left(1 + \binom{(1\rightarrow 2)}{v_1} - \binom{(1\rightarrow 2)}{v_2} + \binom{(1\rightarrow 2)}{v_3}\right)}{\left(1 - \binom{(1\rightarrow 2)}{v_1} - \binom{(1\rightarrow 2)}{v_2} - \binom{(1\rightarrow 2)}{v_3}\right) \left(1 + \binom{(1\rightarrow 2)}{v_1} + \binom{(1\rightarrow 2)}{v_2} - \binom{(1\rightarrow 2)}{v_3}\right)} = \\
 & = \frac{\left(1 - \binom{(1)}{v_1} - \binom{(1)}{v_2} - \binom{(1)}{v_3}\right) \left(1 + \binom{(1)}{v_1} + \binom{(1)}{v_2} - \binom{(1)}{v_3}\right) \left(1 - \binom{(2)}{v_1} + \binom{(2)}{v_2} + \binom{(2)}{v_3}\right) \left(1 + \binom{(2)}{v_1} - \binom{(2)}{v_2} + \binom{(2)}{v_3}\right)}{\left(1 - \binom{(1)}{v_1} + \binom{(1)}{v_2} + \binom{(1)}{v_3}\right) \left(1 + \binom{(1)}{v_1} - \binom{(1)}{v_2} + \binom{(1)}{v_3}\right) \left(1 - \binom{(2)}{v_1} - \binom{(2)}{v_2} - \binom{(2)}{v_3}\right) \left(1 + \binom{(2)}{v_1} + \binom{(2)}{v_2} - \binom{(2)}{v_3}\right)}.
 \end{aligned}$$

Теперь остаётся только прологарифмировать каждое из этих уравнений и воспользоваться формулами (13). Результатом такой операции как раз и являются соотношения (16).

Согласно (16), быстроты α_i образуют линейное векторное пространство. Отсюда возникает проблема введения нормы $|\alpha_i|$ в таком векторном пространстве.

3 Введение нормы в векторном пространстве быстрот

Чтобы найти $|\alpha_i|$ в виде явной функции от α_i , обратим внимание на соотношение

$$\alpha_i^{(1\rightarrow 2)} = -\alpha_i^{(2\rightarrow 1)}, \quad (17)$$

которое означает, что компоненты быстроты второй частицы по отношению к первой отличаются знаком от компонент быстроты первой частицы по отношению ко второй. Отмеченный факт является тривиальным следствием абелевой структуры группы релятивистской симметрии (10) и подталкивает к тому, чтобы написать $|\alpha_i| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$. Однако такое введение нормы в пространстве быстрот α_i было бы некорректным с физической точки зрения, поскольку оно не приводит к сколько-нибудь разумному соотношению между компонентами наблюдаемой 3-скорости и её величиной. Поэтому мы поступим следующим образом.

Сначала, исходя из физических соображений, выразим квадрат величины наблюдаемой 3-скорости V^2 в виде явной функции от компонент координатной 3-скорости v_i . После чего, с помощью соотношений (12) представим V^2 как явную функцию от компонент быстроты α_i . Тем самым мы фактически завершим процедуру введения нормы, поскольку величина V наблюдаемой 3-скорости и величина $|\alpha_i|$ быстроты по определению связаны друг с другом соотношением

$$V^2 = \tanh^2 |\alpha_i|. \quad (18)$$

Итак, прежде всего найдем явный вид функции $V^2 = V^2(v_i)$. В соответствии с ее физическим смыслом эта функция, равно как и $V(v_i)$, должна удовлетворять условию

$$V^2\left(\binom{(1\rightarrow 2)}{v_i}\right) = V^2\left(\binom{(2\rightarrow 1)}{v_i}\right), \quad (19)$$

где $\overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_i$ — компоненты координатной 3-скорости второй частицы по отношению к первой, а $\overset{(2 \rightarrow 1)}{v}_i$ — компоненты координатной 3-скорости первой частицы по отношению ко второй. Рассматривая v_i в качестве групповых параметров, альтернативных параметрам α_i , мы видим, что $\overset{(1 \rightarrow 2)}{v}_i$ и $\overset{(2 \rightarrow 1)}{v}_i$ представляют взаимно обратные элементы g и g^{-1} группы (10). При этом, в терминах α_i , переход $g \rightarrow g^{-1}$ соответствует (см. (17)) преобразованию $\alpha_i \rightarrow \tilde{\alpha}_i = -\alpha_i$, тогда как, в терминах v_i , тот же переход соответствует (в силу (12) и (13)) преобразованию

$$\begin{aligned} v_1 \rightarrow \tilde{v}_1 &= -\frac{v_1(1 - v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + 2v_2v_3}{1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3}, \\ v_2 \rightarrow \tilde{v}_2 &= -\frac{v_2(1 + v_1^2 - v_2^2 + v_3^2) + 2v_1v_3}{1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3}, \\ v_3 \rightarrow \tilde{v}_3 &= -\frac{v_3(1 + v_1^2 + v_2^2 - v_3^2) + 2v_1v_2}{1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3}. \end{aligned} \quad (20)$$

Что касается обратных преобразований, то $-\alpha_i = \tilde{\alpha}_i \rightarrow \alpha_i$ и

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 \rightarrow v_1 &= -\frac{\tilde{v}_1(1 - \tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2 + \tilde{v}_3^2) + 2\tilde{v}_2\tilde{v}_3}{1 - \tilde{v}_1^2 - \tilde{v}_2^2 - \tilde{v}_3^2 - 2\tilde{v}_1\tilde{v}_2\tilde{v}_3}, \\ \tilde{v}_2 \rightarrow v_2 &= -\frac{\tilde{v}_2(1 + \tilde{v}_1^2 - \tilde{v}_2^2 + \tilde{v}_3^2) + 2\tilde{v}_1\tilde{v}_3}{1 - \tilde{v}_1^2 - \tilde{v}_2^2 - \tilde{v}_3^2 - 2\tilde{v}_1\tilde{v}_2\tilde{v}_3}, \\ \tilde{v}_3 \rightarrow v_3 &= -\frac{\tilde{v}_3(1 + \tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2 - \tilde{v}_3^2) + 2\tilde{v}_1\tilde{v}_2}{1 - \tilde{v}_1^2 - \tilde{v}_2^2 - \tilde{v}_3^2 - 2\tilde{v}_1\tilde{v}_2\tilde{v}_3}. \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь уравнение (19), т. е. первое и наиболее важное условие на искомую функцию V^2 , мы можем переписать в виде

$$V^2(v_i) = V^2(\tilde{v}_i). \quad (22)$$

Таким образом, функция $V^2(v_i)$ должна являться инвариантом преобразований (20) и (21).

Поскольку при рассмотрении движения частицы мы имеем дело с причинно связанными событиями, физически допустимая область значений квадрата наблюдаемой 3-скорости ограничена условием $0 \leq V^2(v_i) \leq 1$, где, в соответствии с определением координатной 3-скорости v_i ,

$$V^2(0, 0, 0) = 0. \quad (23)$$

Что касается физически допустимой области значений координатных 3-скоростей v_i , то эта область, как мы выясним в следующем разделе, ограничена поверхностью правильного тетраэдра, показанного на Рис. 6. На самой поверхности тетраэдра координатные 3-скорости, представляющие собой все возможные координатные 3-скорости фотона, удовлетворяют соотношению

$$(ds_{B-M}/dx_0)^4 = (1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 - v_1 + v_2 + v_3)(1 + v_1 - v_2 + v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3) = 0. \quad (24)$$

Поскольку, с другой стороны, $V^2 = 1$ при любом направлении наблюдаемой 3-скорости фотона, то, исходя из (24), мы заключаем, что искомая функция $V^2(v_i)$ должна удовлетворять условию

$$V^2|_{(ds_{B-M}/dx_0=0)} = 1. \quad (25)$$

Помимо сформулированных условий (22), (23) и (25), обратим внимание ещё на тот факт, что в двумерном случае, когда (например) $dx_0 \neq 0$, $dx_1 \neq 0$, $dx_2 = dx_3 = 0$, пространство Бервальда-Моора совпадает с пространством Минковского, т. е. $ds_{B-M}^2 = dx_0^2 - dx_1^2$. Соответственно, в этом случае координатная скорость v_1 совпадает с наблюдаемой скоростью V . В результате мы приходим к выводу, что для искомой функции $V^2(v_i)$ должны также выполняться соотношения

$$V^2(v_1, 0, 0) = v_1^2, \quad V^2(0, v_2, 0) = v_2^2, \quad V^2(0, 0, v_3) = v_3^2. \quad (26)$$

Чтобы найти функцию $V^2(v_i)$, удовлетворяющую условиям (22), (23), (25) и (26), мы сначала попытаемся построить некую вспомогательную функцию $f(v_i)$, которую преобразования (20) и (21) оставляли бы инвариантной. Для этого рассмотрим две характерные функции, уже встречавшиеся ранее в соотношениях (20), (24), а именно

$$f_1(v_i) = 1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3, \quad (27)$$

$$f_2(v_i) = (1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 - v_1 + v_2 + v_3)(1 + v_1 - v_2 + v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3). \quad (28)$$

Используя подстановку (20), можно убедиться, что $f_1(\tilde{v}_i) = f_2^2(v_i)/f_1^3(v_i)$. Аналогично можно проверить, что $f_2(\tilde{v}_i) = f_2^3(v_i)/f_1^4(v_i)$. Поэтому, определив функцию $f(v_i)$ посредством соотношения $f(v_i) = f_2(v_i)/f_1(v_i)$, мы приходим к равенству $f(\tilde{v}_i) = f(v_i)$, которое означает, что введенная данным образом функция $f(v_i)$ действительно является инвариантом преобразований (20) и (21). Отсюда ясно, что искомая функция $V^2(v_i)$, удовлетворяющая условиям (22), (23), (25) и (26), задается соотношением $V^2(v_i) = 1 - f(v_i) = 1 - f_2(v_i)/f_1(v_i)$ и, с учетом (27) и (28), оказывается следующей

$$V^2(v_i) = 1 - \frac{(1 - v_1 - v_2 - v_3)(1 - v_1 + v_2 + v_3)(1 + v_1 - v_2 + v_3)(1 + v_1 + v_2 - v_3)}{1 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - 2v_1v_2v_3}. \quad (29)$$

Представляя теперь (с помощью (29) и (12)) V^2 в виде явной функции от α_i и принимая во внимание соотношение (18), мы получаем окончательно

$$\tanh^2|\alpha_i| = \frac{\tanh^2\alpha_1(1 - \tanh^2\alpha_2) + \tanh^2\alpha_2(1 - \tanh^2\alpha_3) + \tanh^2\alpha_3(1 - \tanh^2\alpha_1)}{1 - \tanh^2\alpha_1 \tanh^2\alpha_2 \tanh^2\alpha_3}. \quad (30)$$

Согласно данной формуле, $|\alpha_i|$ является выпуклой функцией своих аргументов α_i , инвариантной относительно их отражения $\alpha_i \leftrightarrow -\alpha_i$. Вместе с тем, указанная функция не обладает свойством однородности первой степени по α_i . Строго говоря, это означает, что посредством (30) в векторном пространстве быстрот α_i введена не норма, а квазинорма $|\alpha_i|$.

Легко проверить, что, при малых значениях $|\alpha_i|$,

$$|\alpha_i| \approx \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}. \quad (31)$$

С увеличением $|\alpha_i|$, сферы (31) деформируются и, при $|\alpha_i| \rightarrow \infty$, трансформируются в правильный ромбический додекаэдр, изображённый на Рис. 1.

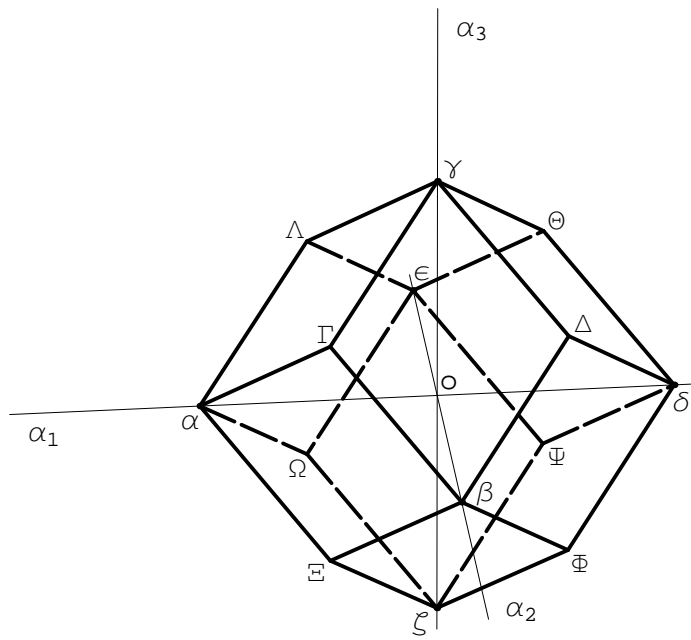


Рис. 1: Правильный ромбический додекаэдр в пространстве быстрот α_i как образ, при $\tanh|\alpha_i| = 1$, поверхности светового фронта.

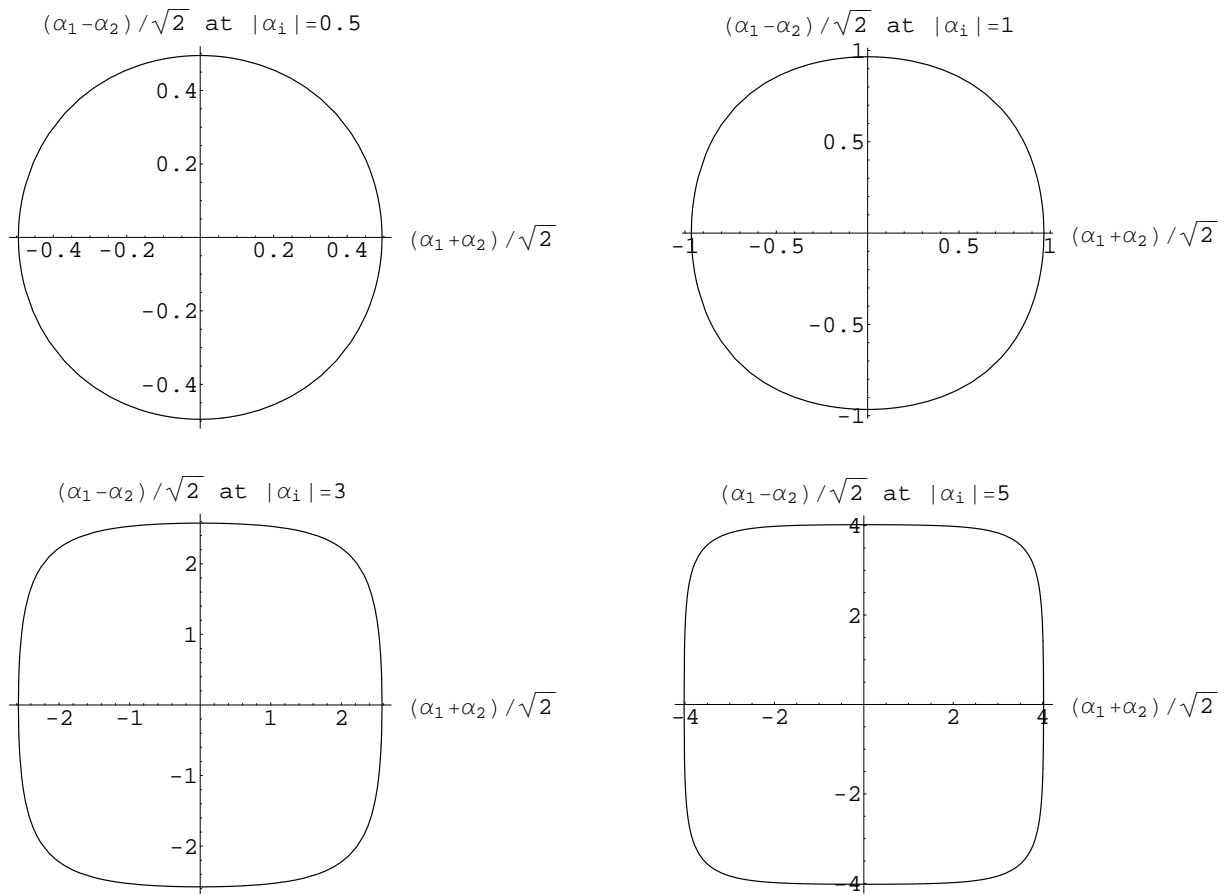


Рис. 2: Сечения поверхностей $|\alpha_i| = 0.5$, $|\alpha_i| = 1$, $|\alpha_i| = 3$ и $|\alpha_i| = 5$ плоскостью $\alpha_3 = 0$, демонстрирующие тот факт, что, при $|\alpha_i| \rightarrow \infty$, сечение поверхности $|\alpha_i| = const$ той же плоскостью стремится к сечению поверхности светового фронта, показанному на Рис. 3.

Чтобы проиллюстрировать процесс трансформации сфер в правильный ромбический додекаэдр, рассмотрим сначала поведение сечения поверхности $|\alpha_i| = const$ плоскостью $\alpha_3 = 0$. Уравнение, описывающее такое сечение имеет вид

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left\{ 2 \cosh |\alpha_i| - \cosh \sqrt{2} \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{2}} \right) + \left[\left(2 \cosh |\alpha_i| - \cosh \sqrt{2} \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{2}} \right) \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right\}, \quad (32)$$

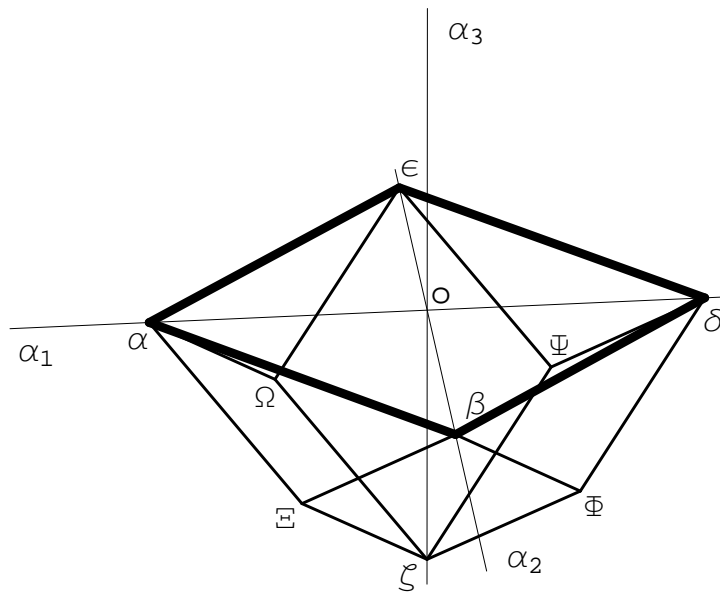


Рис. 3: Квадрат $\beta\alpha\epsilon\delta$ как сечение поверхности светового фронта (правильного ромбического додекаэдра) плоскостью $\alpha_3 = 0$.

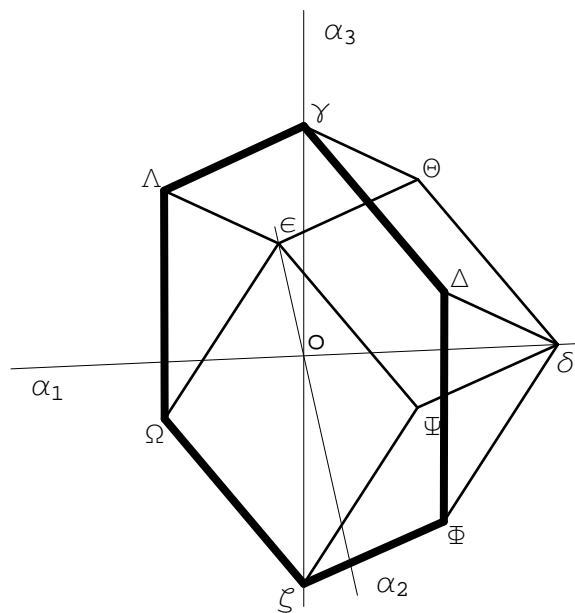


Рис. 4: Шестиугольник $\Lambda\gamma\Delta\Phi\zeta\Omega$ как сечение поверхности светового фронта (правильного ромбического додекаэдра) плоскостью $(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$.

причём пределы изменения аргумента функции (32) оказываются следующими

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{2}} \Big|_{\alpha_1 + \alpha_2 = 0} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left\{ 2 \cosh |\alpha_i| - 1 + \left[(2 \cosh |\alpha_i| - 1)^2 - 1 \right]^{1/2} \right\}.$$

Отметим кстати, что при выводе формулы (32) мы в исходном уравнении (30) положили $\alpha_3 = 0$ и, кроме того, ввели новые переменные $(\alpha_1 + \alpha_2)/\sqrt{2}$ и $(\alpha_1 - \alpha_2)/\sqrt{2}$ вместо α_1 и α_2 .

Графики функции (32) при $|\alpha_i| = 0.5$, $|\alpha_i| = 1$, $|\alpha_i| = 3$ и $|\alpha_i| = 5$ изображены на Рис. 2. Таким образом, мы видим, как с ростом $|\alpha_i|$, окружность постепенно переходит в квадрат $\beta\alpha\epsilon\delta$, показанный на Рис. 3.

Рассмотрим, наконец, поведение сечения поверхности $|\alpha_i| = \text{const}$ плоскостью $(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$. Уравнение, описывающее такое сечение имеет вид

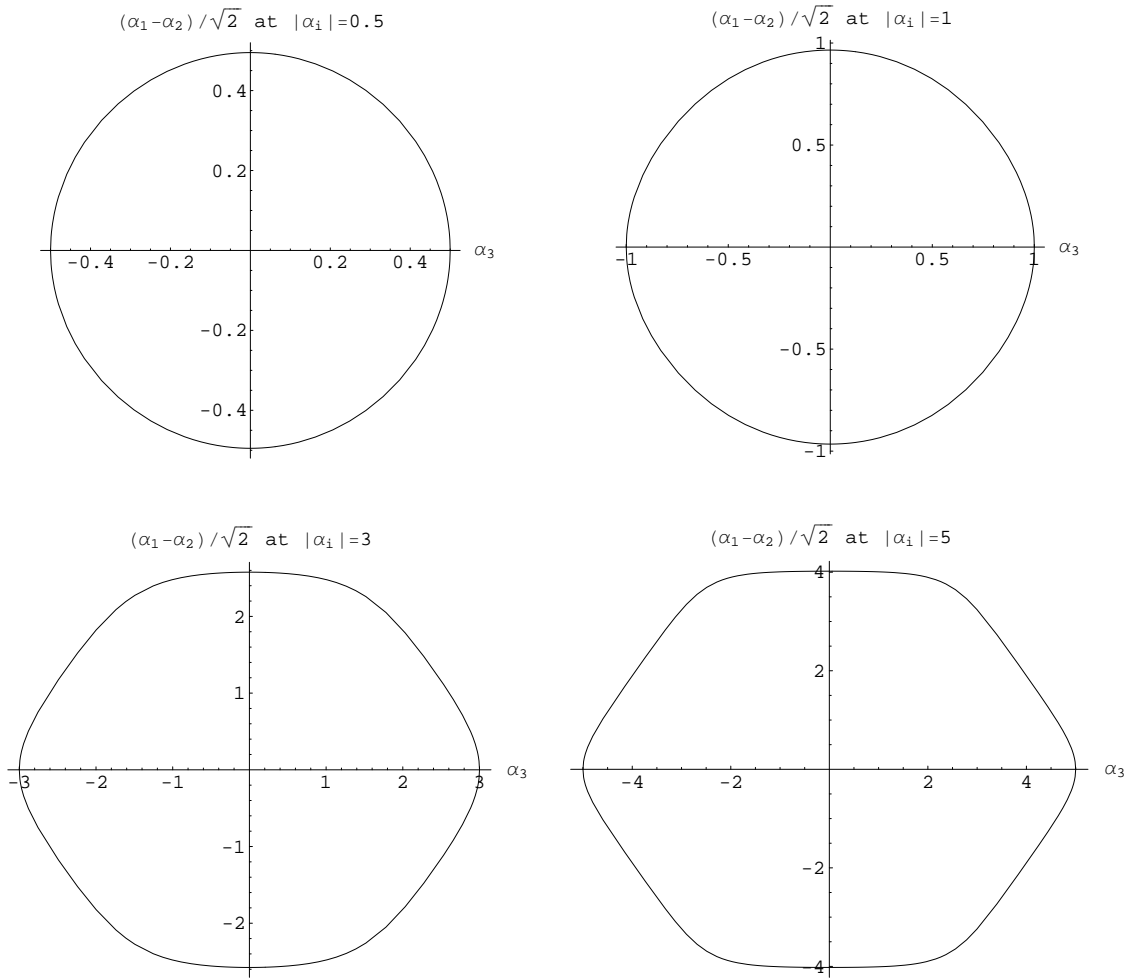


Рис. 5: Сечения поверхностей $|\alpha_i| = 0.5$, $|\alpha_i| = 1$, $|\alpha_i| = 3$ и $|\alpha_i| = 5$ плоскостью $(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$, демонстрирующие тот факт, что при $|\alpha_i| \rightarrow \infty$ сечение поверхности $|\alpha_i| = \text{const}$ той же плоскостью стремится к сечению поверхности светового фронта, показанному на Рис. 4.

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left\{ (\cosh^2 2\alpha_3 + 2 \cosh 2|\alpha_i| + 1)^{1/2} - \cosh 2\alpha_3 + \left[\left((\cosh^2 2\alpha_3 + 2 \cosh 2|\alpha_i| + 1)^{1/2} - \cosh 2\alpha_3 \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right\}, \quad (33)$$

причём аргумент функции (33) изменяется в пределах $\alpha_3|_{\alpha_1 - \alpha_2 = 0} = \mp |\alpha_i|$. Что касается вывода формулы (33), то сначала мы в исходном уравнении (30) сделали замену переменных α_1 и α_2 на $(\alpha_1 + \alpha_2)/\sqrt{2}$ и $(\alpha_1 - \alpha_2)/\sqrt{2}$. После чего, положили $(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$.

Графики функции (33) при $|\alpha_i| = 0.5$, $|\alpha_i| = 1$, $|\alpha_i| = 3$ и $|\alpha_i| = 5$ изображены на Рис. 5. Из этих графиков мы видим, как с ростом $|\alpha_i|$ окружность постепенно переходит в шестиугольник $\Lambda\gamma\Delta\Phi\zeta\Omega$, показанный на Рис. 4.

4 Соотношение между компонентами наблюдаемой 3-скорости и её величиной в финслеровом пространстве событий с полностью нарушенной 3D изотропией

Хорошо известно, что в пространстве Минковского область причинно связанных событий, соответствующих движению классической частицы, ограничена поверхностью светового конуса. При этом, поскольку уравнение светового конуса в ортогональных галилеевых координатах имеет простейший, канонический вид, применение эйнштейновской процедуры обмена световыми сигналами приводит к тривиальному результату, согласно которому величина наблюдаемой 3-скорости выражается через её компоненты посредством формулы $V^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$. Кроме того, поскольку в данном случае компоненты v_i наблюдаемой 3-скорости совпадают с соответствующими компонентами координатной 3-скорости, область физически допустимых значений координатной 3-скорости классической частицы ограничена условием $0 \leq V^2 \leq 1$, т. е. – сферой единичного радиуса. Отметим, что такая же ситуация имеет место и в случае частично анизотропного финслерова пространства (1). Однако, при переходе к полностью анизотропному финслерову пространству (8), область физически допустимых значений координатной 3-скорости v_i существенно изменяется.

Чтобы получить ограничения на допустимые значения v_i , мы в работах [19] исходили из того, что движению частицы соответствуют такие события в пространстве (8), для которых, помимо условия $dx_0 > 0$, выполняется также система неравенств

$$\begin{aligned} dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3 &\geq 0, \\ dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3 &\geq 0, \\ dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3 &\geq 0, \\ dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3 &\geq 0. \end{aligned} \tag{34}$$

Отсюда были получены следующие ограничения на v_i :

$$1 - v_1 - v_2 - v_3 \geq 0, \tag{35}$$

$$1 - v_1 + v_2 + v_3 \geq 0, \tag{36}$$

$$1 + v_1 - v_2 + v_3 \geq 0, \tag{37}$$

$$1 + v_1 + v_2 - v_3 \geq 0. \tag{38}$$

Согласно (35)–(38), область допустимых значений v_i ограничена поверхностью правильного тетраэдра, воспроизведенного на Рис. 6. Ниже мы убедимся, что для любой координатной 3-скорости v_i , принадлежащей этой области, квадрат величины соответствующей наблюдаемой 3-скорости (29) не превосходит значения равного единице, причём $V^2 = 1$ только на поверхности тетраэдра. Именно данный факт позволяет утверждать, что область, ограниченная поверхностью тетраэдра, служит областью физически допустимых значений координатной 3-скорости классической частицы. В дополнение к сказанному следует отметить, что условия (35)–(38), определяющие эту область, являются (при $dx_0 > 0$) необходимыми и достаточными условиями выполнения соотношений (34). Поэтому мы приходим к выводу, что, с физической точки зрения, соотношения (34) выделяют в пространстве событий (8) область причинно связанных событий, в пределах которой лежит мировая линия любой классической

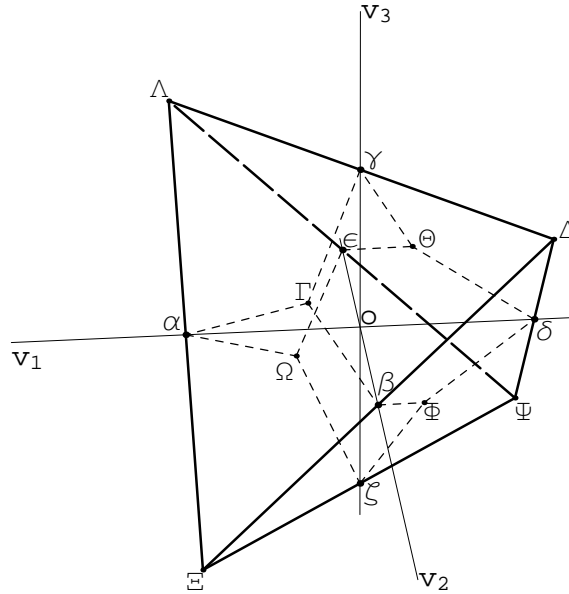


Рис. 6: Поверхность правильного тетраэдра в пространстве координатных скоростей v_i как образ поверхности светового фронта.

частицы. Что касается границы этой области, то она определяется уравнениями, уже включенными в систему соотношений (34) и для нее (по аналогии с пространством Минковского) естественно использовать название световой конус.

Легко показать, что, пересекая световой конус, мы попадаем в область причинно несвязанных событий. Для этого, как ясно из предыдущего анализа, достаточно убедиться, что, пересекая в пространстве координатных 3-скоростей v_i поверхность правильного тетраэдра, мы попадаем область сверхсветовых скоростей, т. е. получаем для квадрата величины наблюдаемой 3-скорости $V^2(v_i)$ значения, превышающие единицу.

Интересующее нас поведение функции $V^2(v_i)$ можно выяснить, рассмотрев ее поведение на множестве всех прямых линий, проходящих через начало o декартовой системы координат v_i и, следовательно, пересекающих поверхность правильного тетраэдра.

В качестве типичного примера рассмотрим поведение функции $V^2(v_i)$ на прямой линии, пересекающей поверхность тетраэдра точках Ψ и Γ (см. Рис. 6). Согласно (36)–(38), точка Ψ (вершина тетраэдра) принадлежит граням $\Psi\Xi\Lambda$, $\Psi\Delta\Xi$ и $\Psi\Lambda\Delta$ и имеет координаты $v_1 = -1$, $v_2 = -1$, $v_3 = -1$, тогда как, согласно (35), точка Γ имеет координаты $v_1 = 1/3$, $v_2 = 1/3$, $v_3 = 1/3$ и расположена в центре грани $\Delta\Xi\Lambda$. Следовательно, уравнения, описывающие выбранную прямую, имеют вид

$$v_1 = t, \quad v_2 = t, \quad v_3 = t, \quad (39)$$

где t — параметр, характеризующий положение точек на данной линии. В частности, точке Ψ соответствует значение $t = -1$, точке o — значение $t = 0$, а точке Γ — значение $t = 1/3$. Подставляя (39) в (29), мы получаем V^2 в виде следующей явной функции от текущего значения параметра t

$$V^2(t) = 3t^2/(1 - 2t).$$

Теперь становится очевидным, что:

- i) при $t=0$, т. е. в центре o тетраэдра, $V^2(0) = 0$;
- ii) с ростом t , т. е. по мере нашего приближения к поверхности тетраэдра, $V^2(t)$ монотонно растёт и при $t = 1/3$, т. е. в точке Γ на поверхности тетраэдра, $V^2(t)$ достигает значения $V^2(1/3) = 1$;
- iii) при дальнейшем росте t , т. е. по мере нашего удаления от тетраэдра, $V^2(t)$ продолжает монотонно расти, причем $\lim_{t \rightarrow 1/2} V^2(t) = \infty$;
- iv) при $t > 1/2$ мы попадаем в область, где квадрат величины наблюдаемой 3-скорости принимает отрицательные значения, т. е. $V^2(t) < 0$;
- v) с уменьшением t (от значения $t=0$), т. е. по мере нашего удаления от точки o (в которой $V^2 = 0$) и, соответственно, приближения к поверхности тетраэдра, $V^2(t)$ снова монотонно растёт и при $t = -1$, т. е. в точке Ψ на поверхности тетраэдра, $V^2(t)$ достигает прежнего значения $V^2(-1) = V^2(1/3) = 1$;
- vi) при дальнейшем уменьшении t , т. е. по мере нашего удаления от тетраэдра, $V^2(t)$ продолжает монотонно расти, причем $V^2(t) \approx -3t/2$ при $t \ll -1$.

Предложенным способом можно исследовать поведение функции $V^2(v_i)$ во всем пространстве координатных скоростей v_i и, что особенно важно для квантовой теории, точно определить те области в пространстве v_i , в которых $V^2 > 1$ или $V^2 < 0$. Обе эти области соответствуют распространению только виртуальных частиц, причем первая из них соответствует причинно несвязанным (таххионным) событиям в пространстве (8). В рамках настоящей работы мы, однако, ограничимся анализом, проведенным выше. Дело в том, что поведение функции $V^2(v_i)$ на прямой линии (39) хорошо иллюстрирует как специфические особенности её поведения во всей внешней (по отношению к тетраэдру) области, так и тот факт, что $0 \leq V^2 \leq 1$ во внутренней области тетраэдра, т. е. как раз в той области значений v_i , которая интересует нас в данной работе.

Обратимся теперь снова к Рис. 6. Поскольку поверхность правильного тетраэдра является образом поверхности светового фронта в пространстве v_i , исходные и соответствующие им отражённые световые лучи разделяют тетраэдр на шесть пар взаимно сопряжённых секторов:

$$\begin{aligned}
 \Gamma\gamma\Delta\beta o &\longleftrightarrow \Psi\zeta\Omega\epsilon o \\
 \Gamma\beta\Xi\alpha o &\longleftrightarrow \Psi\epsilon\Theta\delta o \\
 \Gamma\alpha\Lambda\gamma o &\longleftrightarrow \Psi\delta\Phi\zeta o \\
 \Omega\epsilon\Lambda\alpha o &\longleftrightarrow \Delta\beta\Phi\delta o \\
 \Omega\alpha\Xi\zeta o &\longleftrightarrow \Delta\delta\Theta\gamma o \\
 \Theta\gamma\Lambda\epsilon o &\longleftrightarrow \Xi\zeta\Phi\beta o.
 \end{aligned}$$

Поэтому эйнштейновская процедура обмена световыми сигналами позволяет получить (см. [19]) лишь соответствующие секториальные компоненты наблюдаемой 3-скорости

$$\begin{aligned}
 v_{\Gamma\gamma\Delta\beta o} &= (v_3 + v_2)/(1 - v_1), & v_{\Psi\zeta\Omega\epsilon o} &= -(v_3 + v_2)/(1 - v_1); \\
 v_{\Gamma\beta\Xi\alpha o} &= (v_1 + v_2)/(1 - v_3), & v_{\Psi\epsilon\Theta\delta o} &= -(v_1 + v_2)/(1 - v_3); \\
 v_{\Gamma\alpha\Lambda\gamma o} &= (v_1 + v_3)/(1 - v_2), & v_{\Psi\delta\Phi\zeta o} &= -(v_1 + v_3)/(1 - v_2); \\
 v_{\Omega\epsilon\Lambda\alpha o} &= (v_1 - v_2)/(1 + v_3), & v_{\Delta\beta\Phi\delta o} &= -(v_1 - v_2)/(1 + v_3); \\
 v_{\Omega\alpha\Xi\zeta o} &= (v_1 - v_3)/(1 + v_2), & v_{\Delta\delta\Theta\gamma o} &= -(v_1 - v_3)/(1 + v_2); \\
 v_{\Theta\gamma\Lambda\epsilon o} &= (v_3 - v_2)/(1 + v_1), & v_{\Xi\zeta\Phi\beta o} &= -(v_3 - v_2)/(1 + v_1),
 \end{aligned}$$

где v_i — компоненты координатной 3-скорости. Что касается соотношения между величиной наблюдаемой 3-скорости и её секториальными компонентами, то чтобы его вывести, мы поступим следующим образом.

Сначала, используя (12) и очевидным образом упрощая обозначения, представим двенадцать (фактически — шесть) секториальных компонент наблюдаемой 3-скорости в виде явных функций от α_i :

$$\begin{aligned} v_{\Gamma\gamma\Delta\beta o} &\equiv v_{3+2} = \tanh(\alpha_3 + \alpha_2), \\ v_{\Gamma\beta\Xi\alpha o} &\equiv v_{1+2} = \tanh(\alpha_1 + \alpha_2), \\ v_{\Gamma\alpha\Lambda\gamma o} &\equiv v_{1+3} = \tanh(\alpha_1 + \alpha_3), \\ v_{\Omega\epsilon\Lambda\alpha o} &\equiv v_{1-2} = \tanh(\alpha_1 - \alpha_2), \\ v_{\Omega\alpha\Xi\zeta o} &\equiv v_{1-3} = \tanh(\alpha_1 - \alpha_3), \\ v_{\Theta\gamma\Lambda\epsilon o} &\equiv v_{3-2} = \tanh(\alpha_3 - \alpha_2). \end{aligned} \quad (40)$$

Кроме того, целесообразно представить (30) в виде

$$\tanh^2|\alpha_i| = 1 - 8 [2 + \cosh 2(\alpha_1 + \alpha_2) + \cosh 2(\alpha_1 - \alpha_2) + \cosh 2(\alpha_3 + \alpha_2) + \cosh 2(\alpha_3 - \alpha_2) + \cosh 2(\alpha_1 + \alpha_3) + \cosh 2(\alpha_1 - \alpha_3)]^{-1}. \quad (41)$$

Принимая во внимание (18) и используя (41) и (40), мы в результате получаем

$$V^2 = 1 - 8 \left[2 + \frac{1+v_{1+2}^2}{1-v_{1+2}^2} + \frac{1+v_{1+3}^2}{1-v_{1+3}^2} + \frac{1+v_{3+2}^2}{1-v_{3+2}^2} + \frac{1+v_{1-2}^2}{1-v_{1-2}^2} + \frac{1+v_{1-3}^2}{1-v_{1-3}^2} + \frac{1+v_{3-2}^2}{1-v_{3-2}^2} \right]^{-1}. \quad (42)$$

Согласно (42), квадрат наблюдаемой 3-скорости V^2 зависит от квадратов её шести наблюдаемых секториальных компонент (40) симметричным образом. Заметим теперь, что эти шесть компонент не являются независимыми, а связаны тремя соотношениями. Легко проверить, что, например,

$$v_{1-2} = \frac{v_{1+3} - v_{3+2}}{1 - v_{1+3}v_{3+2}}, \quad v_{1-3} = \frac{v_{1+2} - v_{3+2}}{1 - v_{1+2}v_{3+2}}, \quad v_{3-2} = \frac{v_{1+3} - v_{1+2}}{1 - v_{1+3}v_{1+2}}. \quad (43)$$

Поэтому любые три секториальные компоненты наблюдаемой 3-скорости, взятые из набора (40), играют роль одного из возможных неортогональных базисов. Например, выбрав в качестве конкретного базиса наблюдаемые секториальные компоненты v_{1+2} , v_{1+3} и v_{3+2} , мы с помощью (42) и (43) получаем для квадрата наблюдаемой 3-скорости следующее выражение

$$V^2 = 1 - \frac{(1+v_{1+2}v_{1+3}+v_{1+2}v_{3+2}+v_{1+3}v_{3+2})^2 - (v_{1+2}+v_{1+3}+v_{3+2}+v_{1+2}v_{1+3}v_{3+2})^2}{1 - (v_{1+2}+v_{1+3}+v_{3+2} - v_{1+2}v_{1+3}v_{3+2})^2/4}. \quad (44)$$

Если, в частности, $v_{1+3} \neq 0$, а $v_{1+2} = v_{3+2} = 0$, то отсюда следует, что

$$V^2 = \frac{3v_{1+3}^2}{4 - v_{1+3}^2}. \quad (45)$$

То, что квадрат наблюдаемой 3-скорости V^2 не совпадает (в силу (45)) с квадратом её единственной отличной от нуля компоненты v_{1+3} , ещё раз свидетельствует, что данный базис является неортогональным. Перейдя, например, к другому неортогональному базису v_{1-2} , v_{1+3} , v_{3-2} с помощью (43), мы получаем $v_{1-2} = v_{1+3}$, $v_{1+3} = v_{1+3}$, $v_{3-2} = v_{1+3}$. В этом случае $v_{1+2} = v_{1-3} = v_{3+2} = 0$, и, благодаря (42), мы снова приходим к (45). Наконец отметим, что, так как v_{1+3} есть наблюдаемая секториальная скорость, то максимальным значением её квадрата является $v_{1+3}^2 = 1$. При этом, как и должно быть, формула (45) даёт $V^2 = 1$.

Чтобы окончательно прояснить ситуацию с наблюдаемыми 3-скоростями в финслеровом пространстве (8), целесообразно рассмотреть 3-скорости в нерелятивистском пределе, когда

$$|v_{1+2}| \ll 1, \quad |v_{1+3}| \ll 1, \quad |v_{3+2}| \ll 1. \quad (46)$$

В этом случае (44) принимает вид

$$V^2 = [3(v_{1+2}^2 + v_{1+3}^2 + v_{3+2}^2)/2 - v_{1+2}v_{1+3} - v_{1+2}v_{3+2} - v_{1+3}v_{3+2}]/2. \quad (47)$$

Квадратичная форма (47), по самому её смыслу, является положительно определённой и, следовательно, может быть приведена к сумме квадратов. Для этого, в силу (46), достаточно использовать первые три соотношения (40) и соотношения (12). В результате мы получаем

$$v_{1+2} = v_1 + v_2, \quad v_{1+3} = v_1 + v_3, \quad v_{3+2} = v_3 + v_2. \quad (48)$$

Соответственно, обратные формулы, посредством которых в нерелятивистском пределе компоненты v_i координатной 3-скорости выражаются через секториальные компоненты v_{1+2} , v_{1+3} , v_{3+2} наблюдаемой 3-скорости, оказываются следующими

$$v_1 = (v_{1+3} + v_{1+2} - v_{3+2})/2, \quad v_2 = (v_{1+2} + v_{3+2} - v_{1+3})/2, \quad v_3 = (v_{1+3} + v_{3+2} - v_{1+2})/2.$$

Подставляя (48) в (47), мы видим, что в нерелятивистском пределе квадрат наблюдаемой 3-скорости равен сумме квадратов компонент координатной 3-скорости, т.е. $V^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$.

5 Заключение

Уже в первых работах [19], посвященных исследованию полностью анизотропного финслерова пространства событий (8), мы столкнулись с необычной ситуацией, когда эйнштейновская процедура обмена световыми сигналами не позволила определить величину наблюдаемой 3-скорости, а лишь позволила определить ее компоненты. В результате возникла необходимость построения алгоритма, с помощью которого можно было бы определить величину наблюдаемой 3-скорости и тем самым формализовать условие, выделяющее в пространстве (8) область причинно связанных событий. Такие события характеризует то, что соответствующая им величина наблюдаемой 3-скорости не превосходит скорости света.

Хотя построение вышеупомянутого алгоритма, реализованное в настоящей работе, явилось отчасти эвристическим (имеется в виду идентификация функций (27) и (28) как функций, обладающих специальными трансформационными свойствами), тем не менее, всесторонний анализ окончательной формулы (29) показал, что она правильно определяет величину наблюдаемой 3-скорости. К тому же, согласно (42), формула (29) привела к вполне разумному соотношению между величиной наблюдаемой 3-скорости и ее компонентами. Итак, в дополнение к группе изометрий (10), мы теперь располагаем еще одним важным инструментом для исследования поведения фундаментальных полей в полностью анизотропном финслеровом пространстве (8). Детали такого исследования, равно как и явный вид фундаментальных полевых уравнений, обобщенных в соответствии с требованием инвариантности по отношению к группе (10), будут опубликованы в другой работе. Что касается настоящей работы, то, во избежание возможных недоразумений, целесообразно отметить следующее.

Общеизвестно, что в обычной релятивистской квантовой теории поля 4-импульс (p_0, \mathbf{p}) , канонически сопряженный к ортогональным галилеевым координатам (x_0, \mathbf{x}) ,

является более фундаментальной величиной чем 3-скорость \mathbf{v} . Вместе с тем, для свободного одночастичного состояния с определенным 4-импульсом $|p_0, \mathbf{p}\rangle$, 3-скорость, как квантовая наблюдаемая, имеет определенное значение $\mathbf{v} = \mathbf{p}/p_0$, которое совпадает с классической наблюдаемой 3-скоростью. Однако, в случае нарушения лоренцевой симметрии, связь импульса со скоростью может оказаться в высшей степени нетривиальной, что впервые отметили Don Colladay и Alan Kostelecký в их оригинальной статье [2], посвящённой расширению Стандартной Модели. Обратим внимание на то, что похожий эффект имеет место и в рамках релятивистски инвариантного финслерова подхода к проблеме нарушения лоренцевой симметрии. Например, в случае плоского частично анизотропного финслерова пространства (1), для свободного одночастичного состояния с определенным 4-импульсом $|p_0, \mathbf{p}\rangle$, 3-скорость, как квантовая наблюдаемая, имеет определенное значение

$$\mathbf{v} = \frac{(1+r)(p_0 - \mathbf{p}\nu)\mathbf{p} - r(p_0^2 - \mathbf{p}^2)\nu}{(1+r)(p_0 - \mathbf{p}\nu)p_0 - r(p_0^2 - \mathbf{p}^2)},$$

которое совпадает с классической наблюдаемой 3-скоростью (см. оригинальную статью [4]).

В случае плоского полностью анизотропного финслерова пространства (8), само понятие скорости включает дополнительные тонкости, связанные с тем фактом, что 4-импульс (p_0, p_i) является канонически сопряженным к неортогональным галилеевым координатам (x_0, x_i) , использованным при определении метрики (8). В результате, для свободного одночастичного состояния с определенным 4-импульсом $|p_0, p_i\rangle$, 3-скорость v_i , как квантовая наблюдаемая, имеет определенное значение, которое является решением системы алгебраических уравнений

$$a_{qi}v_i = b_q,$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{12} = (p_0 + p_3)(1 + r_3) - (p_1 + p_2)(r_1 + r_2), \\ a_{13} &= b_1 = (p_1 + p_2)(1 + r_3) - (p_0 + p_3)(r_2 + r_3), \\ a_{21} &= -b_2 = (p_0 - p_1)(r_2 - r_3) - (p_2 - p_3)(1 - r_1), \\ a_{22} &= -a_{23} = (p_0 - p_1)(1 - r_1) - (p_2 - p_3)(r_2 - r_3), \\ a_{31} &= b_3 = (p_2 + p_3)(1 + r_1) - (p_0 + p_1)(r_2 + r_3), \\ a_{32} &= a_{33} = (p_0 + p_1)(1 + r_1) - (p_2 + p_3)(r_2 + r_3). \end{aligned}$$

Таким образом, в данном случае, определенное значение v_i , как квантовой наблюдаемой, совпадает с классической *координатной* 3-скоростью (см. [32]). Это подразумевает, что для определения величины и компонент *наблюдаемой* 3-скорости, которая соответствовала бы свободному одночастичному состоянию с определенным 4-импульсом $|p_0, p_i\rangle$, необходимо ещё воспользоваться соотношениями (29) и (40).

Тот факт, что в любом из двух типов плоских анизотропных финслеровых пространств существуют одночастичные состояния с определенным 4-импульсом, причем из этого импульса принципиально нельзя выделить его кинетическую часть, говорит о том, что взаимодействие, вызванное анизотропией однородной среды, заполняющей пространство (1) или (8), является несепарабельным, а вышеупомянутые одночастичные состояния являются коллективными возбуждениями (квазичастицами), существующими в такой среде.

В качестве наиболее вероятного кандидата на роль полностью анизотропной среды, порождающей анизотропию пространства (8), служит трёхглюонный конденсат. Воз-

возможность образования такого конденсата следует из работы [33], в которой рассмотрена спонтанная генерация эффективного трёхглюонного калибровочно инвариантного взаимодействия. Кстати отметим, что для нерелятивистских квазичастиц в полностью анизотропной кристаллической среде тензор инертной массы определяется формулой (9).

Что касается аксиально симметричной анизотропной среды, порождающей анизотропию пространства (1), то моделью такой кристаллической среды является аксиально симметричный фермион-антифермионный конденсат. Он возникает в качестве вакуумного решения в финслеровой фермионной теории, Лагранжиан которой (7) построен, исходя из требования инвариантности по отношению к группе $DISIM_b(2)$. После соответствующего сдвига и разложения, теория (7) становится вполне определенной и в её рамках может быть рассмотрена проблема устойчивости конденсата. Решение этой проблемы важно уже потому, что существующие в настоящее время жёсткие ограничения на величину пространственной анизотропии могут служить указанием на возможность испарения аксиально симметричного фермион-антифермионного конденсата как источника пространственной анизотропии. Если предположение об испарении конденсата окажется верным, то тогда это могло бы служить ответом на вопрос, поставленный в работе [16], а именно, почему в настоящее время анизотропия пространства столь мала.

Строго говоря, проблема устойчивости конденсата должна решаться на основе такого расширения теории (7), которое включало бы взаимодействие поля анизотропии с другими полями и, в частности, с гравитационным полем. Хотя в рамках финслерова подхода к проблеме нарушения лоренцевой симметрии возможность соответствующего расширения теории (7) в принципе существует, реализация подобной программы является предметом дальнейших исследований. Тем не менее отметим в заключение, что одна из первых попыток описать взаимодействие анизотропии и гравитации в рамках финслеровой модели искривленного пространства-времени была предпринята в работе [8]. Нельзя не отметить также работу [11], в которой Alan Kostelecký показал, что явное нарушение лоренцевой симметрии в теории гравитации не может быть описано геометрией Римана (или даже Римана-Картана) и предложил использовать для этой цели финслерову геометрию.

* * *

Автор признателен Борису Арбузову за идеи, связанные с возможностью образования трёхглюонного конденсата. Очень полезной для автора была также дискуссия с Гари Гиббонсом, посвящённая статусу существующих экспериментальных ограничений на величину анизотропии пространства и возможностям новых экспериментов в этой области. Автор считает своим долгом выразить благодарность Дмитрию Павлову и Григорию Гарасько за вдохновляющие дискуссии по проблемам финслеровой геометрии.

Отдельно автор хотел бы поблагодарить Хуберта Гённера за многолетнее плодотворное сотрудничество, а также рецензентов, особенно Алана Костелеского, за конструктивные замечания, позволившие заметно улучшить представленную работу.

Данная работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант RFBR-07-01-91681-RA_a) и Некоммерческим фондом развития исследований по финслеровой геометрии.

Литература

- [1] Kostelecký A., Samuel S., Spontaneous breaking of Lorentz symmetry in string theory, *Phys. Rev. D*, 1989, V. 39, N 2, 683–685.
- [2] Colladay D., Kostelecký A., CPT violation and the standard model, *Phys. Rev. D*, 1997, V. 55, N 11, 6760–6774, arXiv:hep-ph/9703464; Lorentz-violating extension of the standard model, *Phys. Rev. D*, 1998, V. 58, N 116002, arXiv:hep-ph/9809521.
- [3] CPT and Lorentz symmetry III, Editor A. Kostelecký, Singapore, World Scientific, 2005; CPT and Lorentz symmetry IV, Editor A. Kostelecký, Singapore, World Scientific, 2008.
- [4] Bogoslovsky G. Yu., A special relativistic theory of the locally anisotropic space-time, *Nuovo Cim. B*, 1977, V. 40, N 1, 99–134; *Nuovo Cim. B*, 1978, V. 43, N 2, 377–378.
- [5] Tavakol R., van den Bergh N., Finsler spaces and the underlying geometry of space-time, *Phys. Lett. A*, 1985, V. 112, 23–25.
- [6] Tavakol R., van den Bergh N., Viability criteria for the theories of gravity and Finsler spaces, *Gen. Relativ. Gravit.*, 1986, V. 18, 849–859.
- [7] Богословский Г. Ю., Теория локально анизотропного пространства-времени, Москва, Изд-во МГУ, 1992.
- [8] Bogoslovsky G. Yu., Finsler model of space-time, *Phys. Part. Nucl.*, 1993, V. 24, 354–379; A viable model of locally anisotropic space-time and the Finslerian generalization of the relativity theory, *Fortschr. Phys.*, 1994, V. 42, N 2, 143–193.
- [9] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F., Concerning the generalized Lorentz symmetry and the generalization of the Dirac equation, *Phys. Lett. A*, 2004, V. 323, 40–47, arXiv:hep-th/0402172.
- [10] Bogoslovsky G. Yu., Subgroups of the group of generalized Lorentz transformations and their geometric invariants, *SIGMA*, 2005, V. 1, 017, arXiv:math-ph/0511077; Lorentz symmetry violation without violation of relativistic symmetry, *Phys. Lett. A*, 2006, V. 350, 5–10, arXiv:hep-th/0511151.
- [11] Kostelecký A., Gravity, Lorentz violation, and the Standard Model, *Phys. Rev. D*, 2004, V. 69, N 105009, arXiv:hep-th/0312310.
- [12] Bailey Q. G., Kostelecký A., Signals for Lorentz violation in post-Newtonian gravity, *Phys. Rev. D*, 2006, V. 74, N 045001, arXiv:gr-qc/0603030.
- [13] Girelly F., Liberati S., Sindoni L., Planck-scale modified dispersion relations and Finsler geometry, *Phys. Rev. D*, 2007, V. 75, N 064015, arXiv:gr-qc/0611024.
- [14] Ghosh S., Pal P., Deformed special relativity and deformed symmetries in a canonical framework, *Phys. Rev. D*, 2007, V. 75, N 105021, arXiv:hep-th/0702159.
- [15] Bogoslovsky G. Yu., Some physical displays of the space anisotropy relevant to the feasibility of its being detected at a laboratory, arXiv:0706.2621 [gr-qc].
- [16] Gibbons G. W., Gomis Joaquim, Pope C. N., General very special relativity is Finsler geometry, *Phys. Rev. D*, 2007, V. 76, N 081701(R), arXiv:0707.2174 [hep-th]; see also Cohen A. G., Glashow S. L., Very special relativity, *Phys. Rev. Lett.*, 2006, V. 97, N 021601, arXiv:hep-ph/0601236.
- [17] Mavromatos N. E., Lorentz invariance violation from string theory, arXiv:0708.2250 [hep-th].
- [18] Sindoni L., The Higgs mechanism in Finsler spacetimes, arXiv:0712.3518 [gr-qc].
- [19] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F., On the possibility of phase transitions in the geometric structure of space-time, *Phys. Lett. A*, 1998, V. 244, 222–228, arXiv:gr-qc/9804082; Finslerian spaces possessing local relativistic symmetry, *Gen. Relativ. Gravit.*, 1999, V. 31, N 10, 1565–1603, arXiv:gr-qc/9904081.
- [20] Богословский Г. Ю., О специальной релятивистской теории анизотропного пространства-времени, *ДАН СССР*, 1973, V. 213, 1055–1058.
- [21] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H., Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group, *J. Math. Phys.*, 1975, V. 16, N 8, 1615–1624.

- [22] Winternitz P., Friš I., Invariant expansions of relativistic amplitudes and subgroups of the proper Lorentz group, *Yadern. Fiz.*, 1965, V. 1, N 5, 889–901.
- [23] Bogoslovsky G. Yu., The proper time, spatial distances and clock synchronization in the locally anisotropic space-time, *JINR Communication E2-82-779*, Dubna, JINR, 1982.
- [24] Богословский Г. Ю., Релятивистский тензор инертной массы, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон.*, 1983, V. 24, N 1, 70–71.
- [25] Bogoslovsky G. Yu., On the local anisotropy of space-time, inertia and force fields, *Nuovo Cimento B*, 1983, V. 77, 181–190.
- [26] Богословский Г. Ю., Обобщённое уравнение Клейна-Гордона и принцип Маха, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физ. Астрон.*, 1983, V. 24, N 3, 59–61.
- [27] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F., On the generalization of the fundamental field equations for locally anisotropic space-time, in Proceedings of XXIV International Workshop “Fundamental Problems of High Energy Physics and Field Theory”(27–29 June, 2001, Protvino, Russia), Editor V.A. Petrov, Protvino, Institute for High Energy Physics, 2001, 113–125, <http://dbserv.ihep.su/~pubs/tconf01/c2-5.htm>
- [28] Berwald L., Projective Krümmung allgemeiner affiner Räume und Finslersche Räume skalarer Krümmung, *Ann. Math.*, 1947, V. 48, 755–781; und die Literaturhinweise darin.
- [29] Moór A., Ergänzung, *Acta. math.*, 1954, V. 91, 187–188.
- [30] Weyl H., Gravitation und Elektrizität, *Sitzber. preuss Akad. Wiss., Physik-math. Kl.*, 1918, 465–480; Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie, *Ann. d. Phys.*, 1919, V. 59, 101–133.
- [31] Bogoslovsky G. Yu., From the Weyl theory to a theory of locally anisotropic space-time, *Class. Quantum Grav.*, 1992, V. 9, 569–575.
- [32] Bogoslovsky G. Yu., 4-momentum of a particle and the mass shell equation in the entirely anisotropic space-time, in: *Space-Time Structure/Algebra and Geometry/*, Editors D. G. Pavlov, Gh. Atanasiu, V. Balan, Moscow, Lilia Print, 2007, 156–173.
- [33] Arbuzov B. A., Infrared non-perturbative QCD running coupling from Bogolubov approach, *Phys. Lett. B*, 2007, V. 656, 67–73, arXiv:hep-ph/0703237.