НАРУШЕНИЕ ГИПЕРКОМПЛЕКСНОГО ПОТЕНЦИАЛА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЕРВАЛЬДА-МООРА

Г. И. Гарасько

ГУП ВЭИ, Россия, Москва
gri9z@mail.ru

В работе показано, что действительная часть гиперкомплексного потенциала в четырёхмерном пространстве Бервальда-Моора вместе с малой аддитивной добавкой, учитываемой в первом приближении, только тогда является конформным потенциалом, когда аддитивная добавка есть решение волнового уравнения, инвариантного относительно группы Пуанкаре.

Введение

Элемент длины в произвольном невырожденном поличисловом пространстве $P_n \equiv P_{k+2\cdot m}$ над полем действительных чисел [1] имеет вид

$$ds = \sqrt[n]{g_{i_1 i_2 \ldots i_n} dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_n}}\,. \tag{1}$$

Элемент длины в пространстве, конформно связанном с пространством P_n, по определению записывается следующим образом:

$$d\tilde{s} = \kappa(x^{i_1}, x^{i_2}, \ldots, x^{i_n})\, \sqrt[n]{g_{i_1 i_2 \ldots i_n} dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_n}}\,, \tag{2}$$

то есть при $\kappa(x) \equiv 1$, мы получим элемент длины в исходном поличисловом пространстве:

$$ds \equiv d\tilde{s}\big|_{\kappa(x)\equiv 1}\,.$$

Компоненты обобщённого импульса в невырожденном поличисловом пространстве определяются по формуле

$$p_i = \frac{g_{i i_1 \ldots i_{n-1}} dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_{n-1}}}{\sqrt[n]{g_{j_1 j_2 \ldots j_n} dx^{j_1} dx^{j_2} \ldots dx^{j_n}}}\,, \tag{3}$$

а в конформно связанном с P_n пространстве, компоненты обобщённого импульса $\tilde{p}_i$ вычисляются через компоненты p_i:

$$\tilde{p}_i = \kappa(x)\, p_i\,. \tag{4}$$

Соответствующие тангенциальные уравнения индикатрисы выражаются через одну и ту же однородную функцию $\Phi_n(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ n-го порядка по всем своим n аргументам:

$$\Phi_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) - 1 = 0\,, \qquad \Phi_n(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots, \tilde{p}_n) - \kappa^n(x) = 0\,. \tag{5}$$

Для всех пространств невырожденных поличисел функция $\Phi_n(q)$ в ковариантной форме записи имеет вид:

$$\Phi_n(q_1, q_2, \ldots, q_n) = g^{i_1 i_2 \ldots i_n} q_{i_1} q_{i_2} \ldots q_{i_n}\,. \tag{6}$$

Всегда существует, так называемый, изотропный базис [1], в котором матрица метрического тензора $g_{i_1 i_2 \dots i_n}$, фигурирующего в формуле (1), матрица тензора $g^{i_1 i_2 \dots i_n}$, фигурирующего в тангенциальных уравнениях индикатрисы (5), (6), совпадают с точность до постоянного коэффициента

$$\left(g_{i_1 i_2 \dots i_n}\right) = const \cdot \left(g^{i_1 i_2 \dots i_n}\right) \, . \tag{7}$$

Будем обозначать финслерово пространство, конформно связанное с пространством невырожденных поличисел $P_n \equiv P_{k+2\cdot m}$, следующим образом: $\tilde{P}_n \equiv \tilde{P}_{k+2\cdot m}$.

В пространстве $\tilde{P}_n$, коэффициент растяжения-сжатия связан с Мировой функцией $S_W(x)$, или *конформным потенциалом* соотношением

$$g^{i_1 i_2 \dots i_n} \, \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_n}} = \kappa^n(x) \, , \tag{8}$$

что приводит к полевому лагранжиану

$$\mathfrak{L} = g^{i_1 i_2 \dots i_n} \, \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_n}} \, , \tag{9}$$

и уравнению поля, которому должен удовлетворять конформный потенциал,

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{i i_1 i_2 \dots i_{n-1}} \, \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial S_W}{\partial x^{i_{n-1}}} \right) = 0 \, . \tag{10}$$

Любая компонента произвольной аналитической функции переменной P_n удовлетворяет [1] уравнению (10).

При $n > 2$ уравнение (10) содержит решения, отличающиеся от компонент аналитических функций поличисловой переменной, поэтому гиперкомплексный потенциал [2] при $n > 2$ является частным случаем конформного потенциала.

1 Гиперкомплексный потенциал

Для каждой системы гиперкомплексных чисел существует базис с координатами, наиболее близкими к тем, к которым мы привыкли в повседневной жизни, которые фигурируют в классической нерелятивистской механике и СТО. Сформулируем требования, которые предъявляются такому физическому базису $1, j_1, j_2, \dots, j_{n-1}$,

$$P_n \ni X = x^0 \, 1 + x^1 \, j_1 + x^2 \, j_2 + \dots + x^{n-1} j_{n-1} \, . \tag{11}$$

1. Такой базис должен содержать единицу алгебры поличисел, именно коэффициент при этом базисном элементе отождествляется с реальным физическим временем, а компонента аналитической функции при этом базисном элементе – с гиперкомплексным потенциалом.
2. В этом базисе при выполнении некоторых дополнительных условий для поличисел, принадлежащих области D, имеет место экспоненциальное представление поличисел

$$P_n \supset D \ni X = |X| e^{\alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2 + \dots + \alpha_{n-1} j_{n-1}} \, , \tag{12}$$

где $|X|$ – норма поличисла, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ – угловые переменные, а D – область определения ненулевой нормы поличисла.

3. При
$$|dx^\mu| \ll dx^0 , \qquad dx^0 > 0 \tag{13}$$
элемент длины в пространстве P_n приобретает вид элемента длины пространства Галилея, в котором координата x^0 может считаться абсолютным ньютоновским временем, а пространство $x^1, x^2, ..., x^{n-1}$ – евклидовым или псевдоевклидовым пространством.

Итак, пусть $U(x) \equiv S_W(x)$ – гиперкомплексный потенциал. Это означает, что $U(x)$ – компонента аналитической функции поличисловой переменной при единице в физическом базисе, то есть функция $U(x)$ является решением уравнения поля (10), поле обобщённых импульсов определяется формулой
$$\tilde{p}_i(x) = \frac{\partial U}{\partial x^i} , \tag{14}$$
а поле скоростей – формулой
$$\dot{x}^i = g^{ii_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \tilde{p}_{i_1}(x) \tilde{p}_{i_2}(x) ... \tilde{p}_{i_{n-1}}(x) , \tag{15}$$
причём поле скоростей определяет нормальную конгруэнцию мировых линий.

Проанализируем последнюю формулу. Только при $n = 2$ компоненты скорости есть линейные комбинации компонент обобщённого импульса. Двумерные невырожденные поличисла исчерпываются двумя алгебрами: комплексные числа и двойные числа, или H_2. Для всех остальных невырожденных поличисел $P_{n>2}$ компоненты скорости являются однородными полиномами $(n-1)$-ой степени компонент обобщённого импульса, или более сложными функциями последних (компонент). Формулу (15) можно рассматривать как формулу поднятия индекса, но не с помощью тензора с двумя верхними индексами, а с помощью тензора с n верхними индексами.

2 Интерпретация

Поле обобщённых импульсов $\tilde{p}(x)$ (14) и поле скоростей $\dot{x}$ (15) определяют некий физический Мир, который можно попытаться интерпретировать непосредственно, но существуют и другие возможности, одну из которых [3], [4] мы рассмотрим в данном разделе.

Используя поле обобщённых импульсов $\tilde{p}(x)$ (14), построим тензор
$$g^{ij}(x) = \frac{1}{\kappa^n(x)}\, g^{iji_1 i_2 \ldots i_{n-2}}\, \tilde{p}_{i_1}(x) \tilde{p}_{i_2}(x) ... \tilde{p}_{i_{n-2}}(x) . \tag{16}$$
Предположим, что $det(g^{ij}(x)) \neq 0$, это является условием только на функцию $U(x)$ [1]. Тогда можно построить тензор с двумя нижними индексами $g_{ij}(x)$:
$$(g_{ij}(x)) = (g^{ij}(x))^{-1} . \tag{17}$$
С помощью этого тензора в том же самом координатном пространстве определим ещё одну геометрию с элементом длины вида:
$$ds = \sqrt{g_{ij}(x) dx^i dx^j} , \tag{18}$$
то есть квадратичную геометрию.

Докажем, что такая геометрия имеет нормальную конгруэнцию экстремалей и поле обобщённых импульсов, которые совпадают с нормальной конгруэнцией экстремалей и полем обобщённых импульсов, определяемых гиперкомплексным потенциалом $U(x)$.

Для метрической функции, которая стоит в правой части формулы (18), вычислим компоненты обобщённого импульса

$$\check{p}_i = \frac{g_{ij}dx^j}{\sqrt{g_{km}(x)dx^k dx^m}}\,. \tag{19}$$

Тангенциальное уравнение индикатрисы тогда запишется следующим образом:

$$g^{ij}\check{p}_i\check{p}_j - 1 = 0\,, \tag{20}$$

или

$$g^{iji_1i_2...i_{n-2}}\,\check{p}_i\check{p}_j\tilde{p}_{i_1}(x)\tilde{p}_{i_2}(x)...\tilde{p}_{i_{n-2}}(x) - \kappa^n(x) = 0\,. \tag{21}$$

Пусть функция $S(x)$ определяет некоторую нормальную конгруэнцию "геодезических" (экстремалей) в квадратичной геометрии (18), тогда она должна удовлетворять уравнению Гамильтона-Якоби

$$g^{iji_1i_2...i_{n-2}}\,\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j}\,\tilde{p}_{i_1}(x)\tilde{p}_{i_2}(x)...\tilde{p}_{i_{n-2}}(x) - \kappa^n(x) = 0\,. \tag{22}$$

Очевидно, что $S(x) = U(x)$ является решением этого уравнения, так как превращает его в тождество.

Таким образом, нормальная конгруэнция "геодезических" (15) в финслеровом пространстве $\tilde{P}_n$ вместе с полем импульсов (14) совпадают с нормальной конгруэнцией "геодезических" в квадратичном (римановом или псевдоримановом) пространстве с элементом длины (18) и тем же самым полем импульсов, так как $S(x) = U(x)$.

Итак, вместо того, чтобы интерпретировать результаты полученные в пространстве $\tilde{P}_n$, можно это делать в n-мерном квадратичном пространстве V_n. Пространство V_n будет представлять собой евклидовое или псевдоевклидовое пространство, в котором введены криволинейные координаты, возможно, с особыми точками, линиями, кривыми и даже "вырезанными" областями. Конечно, вне особых объектов пространство (18) является плоским, то есть тензор кривизны вне особенностей тождественно равен нулю

$$R_{ijkl} \equiv 0\,. \tag{23}$$

3 Нарушение гиперкомплексного потенциала в пространстве H_4

Предположим, что конформный S_W потенциал отличается от действительной части U гиперкомплексного потенциала на малую аддитивную добавку:

$$S_W(x) = U(x) + \varepsilon\Psi(x)\,, \qquad \varepsilon \to 0\,, \tag{24}$$

где $\Psi(x)$ – некоторая функция координат. Функция $U(x)$ есть решение уравнения поля (10). Потребуем, чтобы функция $S_W(x)$ удовлетворяла тому же уравнению поля с точностью до ε^1 включительно. Тем самым вместо нелинейного дифференциального уравнения в частных производных для функции $S_W(x)$, получим линейное дифференциальное уравнение в частных производных для функции $\Psi(x)$, которую будем называть *нарушением гиперкомплексного потенциала.*

Конкретизируем предложенный алгоритм на примере исходного пространства H_4. Уравнение поля для конформного потенциала $S_W(\xi)$ в пространстве, конформно связанным с пространством H_4, в изотропных координатах $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ имеет вид [5], [6]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\xi^1}\left(\frac{\partial S_W}{\partial\xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^4}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial S_W}{\partial\xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^3}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^4}\right)+\\+\frac{\partial}{\partial\xi^3}\left(\frac{\partial S_W}{\partial\xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^4}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi^4}\left(\frac{\partial S_W}{\partial\xi^1}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^2}\frac{\partial S_W}{\partial\xi^3}\right)=0\,.\end{gathered}\tag{25}$$

Любая функция S_W, зависящая не от всех координат $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ удовлетворяет этому уравнению. Любая компонента аналитической функции переменной H_4 также является решением уравнения (25), поэтому в самом общем случае действительная часть гиперкомплексного потенциала в данной ситуации [1] запишется следующим образом:

$$U(\xi)=f_1(\xi^1)+f_2(\xi^2)+f_3(\xi^3)+f_4(\xi^4)\,.\tag{26}$$

Будем считать, что функции f_i гладкие и

$$\frac{\partial f_1}{\partial\xi^1}\frac{\partial f_2}{\partial\xi^2}\frac{\partial f_3}{\partial\xi^3}\frac{\partial f_4}{\partial\xi^4}\neq 0\,.\tag{27}$$

Подставим в уравнение (25) $S_W(\xi) = U(\xi) + \varepsilon\Psi(\xi)$ и сохраним лишь члены, содержащие ε в нулевой и первой степени. Так как функция $U(\xi)$ является решением уравнения (25), получим в результате уравнение для функции $\Psi(\xi)$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_3}{\partial\xi^3}\frac{\partial f_4}{\partial\xi^4}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^1\partial\xi^2}+\frac{\partial f_2}{\partial\xi^2}\frac{\partial f_4}{\partial\xi^4}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^1\partial\xi^3}+\frac{\partial f_2}{\partial\xi^2}\frac{\partial f_3}{\partial\xi^3}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^1\partial\xi^4}+\\+\frac{\partial f_1}{\partial\xi^1}\frac{\partial f_4}{\partial\xi^4}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2\partial\xi^3}+\frac{\partial f_1}{\partial\xi^1}\frac{\partial f_3}{\partial\xi^3}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2\partial\xi^4}+\frac{\partial f_1}{\partial\xi^1}\frac{\partial f_2}{\partial\xi^2}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^3\partial\xi^4}=0\,.\end{gathered}\tag{28}$$

Условие (27) позволяет перейти в последнем уравнении к новым переменным:

$$\zeta^i=f_{i\_}(\xi^i)\,.\tag{29}$$

В результате получим уравнение

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^1\partial\zeta^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^1\partial\zeta^3}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^1\partial\zeta^4}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^2\partial\zeta^3}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^2\partial\zeta^4}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^3\partial\zeta^4}=0.\tag{30}$$

Наконец перейдём к координатам x^0, x^1, x^2, x^3, которые можно назвать физическими и которые связаны с координатами $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$ следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\zeta^1&=x^0+\frac{1}{\sqrt{3}}\,(\,x^1+x^2+x^3)\,,\\ \zeta^2&=x^0+\frac{1}{\sqrt{3}}\,(\,x^1-x^2-x^3)\,,\\ \zeta^3&=x^0+\frac{1}{\sqrt{3}}(-x^1+x^2-x^3)\,,\\ \zeta^4&=x^0+\frac{1}{\sqrt{3}}(-x^1-x^2+x^3)\,.\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

Тогда уравнение (30) приобретёт вид:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^3)^2}\right]\Psi = 0\,. \tag{32}$$

Это ничто иное, как волновое уравнение, которое инвариантно относительно группы Пуанкаре.

Таким образом, нарушение гиперкомплексного потенциала H_4, то есть малая добавка $\varepsilon\Psi$ к действительной части U аналитической функции поличисловой переменной H_4, должна быть решением волнового уравнения, если потребовать, чтобы функция $S = U + \varepsilon\Psi$ являлась конформным потенциалам, то есть удовлетворяла уравнению поля (25). Волновое уравнение (32) инвариантно относительно группы Пуанкаре, а уравнение (25) является фундаментальным уравнением поля для пространства поличисел H_4, которые суть финслерово пространство с метрикой Бервальда-Моора.

Заключение

Можно утверждать, что найдено ещё одно подтверждение тому, что пространство Бервальда-Моора, поличисловое пространство H_4, кроме изометрической трёхпараметрической группы симметрии $G_1(H_4)$ [1], обладает и другими, "скрытыми" группами симметрии, например группой Пуанкаре. Эту группу можно рассматривать как группу переходов на множестве решений фундаментального уравнения поля в пространстве H_4, которые бесконечно мало отличаются от действительной части аналитической функции поличисловой переменной.

Литература

[1] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г.: Геометрия невырожденных поличисел. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (7)**, т. 4 (2007), стр. 3–25.

[2] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г.: Об аналоге решения Фридмана в финслеровом пространстве-времени с анизотропной метрикой Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (7)**, т. 4 (2007), стр. 52–62.

[3] Гарасько Г. И.: О Мировой функции и связи между геометриями, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (5)** (2006), 3–18.

[4] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г.: Конструирование псевдоримановой геометрии на основе геометрии Бервальда-Моора, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (5)**, т. 3 (2006), 19–27.

[5] Гарасько Г. И., Теория поля и финслеровы пространства. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **2 (6)**, т. 3 (2006), стр. 6–20.

[6] Гарасько Г. И., Пространство, конформно связанное с пространством Бервальда-Моора. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1 (7)**, т. 4 (2007), стр. 38–51.