РАВЕНСТВА, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ПСЕВДОНОРМАМ МАТРИЦ N-ГО ПОРЯДКА И НЕРАВЕНСТВАМ ШВАРЦА-КОШИ-БУНЯКОВСКОГО

Л. Г. Соловей

Показано, что матрице n-го порядка можно сопоставить положительное число, играющее роль ее псевдонормы [1], и получена соответствующая формула. Для псевдонорм $|A|$ и $|B|$ матриц A и B, как и должно быть, выполняется неравенство $|A||B| \geq |AB|$. Показано, что каждому такому неравенству соответствует определенное равенство. Показано также, что подобные равенства соответствуют неравенствам Шварца-Коши-Буняковского для скалярных произведений, причем каждому такому неравенству соответствуют некоторые гиперкомплексные числа. Для каждого из указанных равенств справедливо утверждение: "произведение суммы квадратов на сумму квадратов есть снова сумма квадратов" – обобщенная проблема Гурвица.

Введение

1. Как известно, среди комплексных матриц n-го порядка можно выделить унитарные, удовлетворяющие условию:

$$SS^+ = 1, \tag{1}$$

($+$ – символ эрмитова сопряжения). Если умножить матрицу S на комплексное число α, получим матрицу

$$A = \alpha S, \tag{2}$$

удовлетворяющую соотношению

$$AA^+ = a = |A|^2, \tag{3}$$

где a положительно. Назовем $|A|$ модулем матрицы A.

Матрицы $A, B, ...$, удовлетворяющие условию (3), назовем нормированными на единицу унитарными, или *квазиунитарными.* Как и унитарные матрицы, матрицы $A, B, ...$ образуют мультипликативную группу. Выполняются, как легко показать, соотношения

$$|AB| = |A||B|, \tag{4}$$

$$|A| = 0 \text{ только при } A = 0, \tag{5}$$

$$|-A| = |A|. \tag{6}$$

Если эта группа или ее подгруппа вместе с нулевой матрицей является мультипликативным группоидом кольца, то выполняется и "неравенство треугольника"

$$|A + B| \leq |A| + |B|. \tag{7}$$

Соотношения $(4)-(7)$ выполняются не только для квазиунитарного кольца, но и для случая, когда квазиунитарный мультипликативный группоид разбивается на несколько аддитивных групп, пересекающихся только в нуле, при выполнении для каждой из них правого и левого дистрибутивных законов (Вывод соотношений $(3)-(7)$ см. в приложении). Модуль A при выполнении совместно с условием (3) и условий $(4)-(7)$, называется для элементов кольца их нормой. Все указанные соотношения верны, в частности, и для квазиунитарных действительных матриц, которые назовем *квазиортогональными.* В статье будет показано, что не только для квазиунитарных или квазиортогональных матриц, но и для всех матриц n-го порядка (комплексных или действительных) можно определить величину $|A|$, для которой выполняются соотношения (5)–(7), но равенство (4) заменяется неравенством

$$|AB| \leq |A||B|. \tag{4'}$$

Кольцо, для которого выполняются условия $(4') - (7)$, называется псевдонормированным, а величина $|A|$-псевдонормой [1]. В статье далее будет для этого случая вычислена величина $|A|^2|B|^2 - |AB|^2$.

2. В n-мерном евклидовом векторном пространстве для скалярных произведений векторов x, y выполняется неравенство Шварца-Коши-Буняковского

$$|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|, \tag{8}$$

$$|x|^2 = (x, x), \quad |y|^2 = (y, y). \tag{9}$$

Будет вычислена величина

$$|x|^2|y|^2 - |(x, y)|^2.$$

Вычисление величин $|A|^2|B|^2 - |AB|^2$ и $|x|^2|y|^2 - |(x, y)|^2$ приводит к обобщенным соотношениям типа "сумма квадратов, умноженная на сумму квадратов, есть сумма квадратов" [2] (проблема Гурвица).

3. Будут указаны гиперкомплексные системы, соответствующие величинам

$$|x|^2|y|^2 - |(x, y)|^2.$$

§1. Псевдонорма комплексных матриц n-ого порядка

Рассмотрим кольцо матриц n-го порядка с комплексными матричными элементами. Как известно, такое кольцо представляет собой n-мерное афинное векторное пространство: матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{10}$$

представляет собой вектор n^2-го порядка [3]

$$A' = (a_{11}, a_{12}, ...a_{1n}, a_{21}, a_{22}, ...a_{2n}, ...a_{n1}, a_{n2}, ...a_{nn}). \tag{11}$$

Точно так же матрице

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \tag{12}$$

соответствует вектор

$$B' = (b_{11}, b_{12}, ...b_{1n}, b_{21}, b_{22}, ...b_{2n}, ...b_{n1}, b_{n2}, ...b_{nn}). \tag{13}$$

Рассматриваемое пространство становится евклидовым, если ввести скалярное произведение любых векторов A' и B' [4]:

$$(A', B') = a_{11}b_{11}^*+a_{12}b_{12}^*+...+a_{1n}b_{1n}^*+a_{21}b_{21}^*+a_{22}b_{22}^*+...+a_{2n}b_{2n}^*+...+a_{n1}b_{n1}^*+...+a_{nn}b_{nn}^*. \tag{14}$$

Получим теперь соотношение, связывающее скалярное произведение (A', B') с произведением матриц A и B^+, где B^+ – матрица, эрмитово сопряженная матрице B. Имеем:

$$B^+ = \begin{pmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* & ... & b_{n1}^* \\ b_{12}^* & b_{22}^* & ... & b_{n2}^* \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{1n}^* & b_{2n}^* & ... & b_{nn}^* \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} (AB)_{11}^+ &= a_{11}b_{11}^* + a_{12}b_{12}^* + ... + a_{1n}b_{1n}^*, \\ (AB)_{22}^+ &= a_{21}b_{21}^* + a_{22}b_{22}^* + ... + a_{2n}b_{2n}^*, \\ \ldots &= \ldots\ \ldots\ \ldots \\ (AB)_{nn}^+ &= a_{n1}b_{n1}^* + a_{n2}b_{n2}^* + ... + a_{nn}b_{nn}^*. \end{aligned} \tag{16}$$

След матрицы AB^+ равен:

$$\begin{gathered} Sp(AB^+) = (AB)_{11}^+ + (AB)_{22}^+ + ... + (AB)_{nn}^+ = a_{11}b_{11}^* + a_{12}b_{12}^* + ... + a_{1n}b_{1n}^* + \\ +a_{21}b_{21}^* + a_{22}b_{22}^* + ... + a_{2n}b_{2n}^* + ... + a_{n1}b_{n1}^* + a_{n2}b_{n2}^* + ... + a_{nn}b_{nn}^*. \end{gathered} \tag{17}$$

Сравнивая формулы (14) и (17) получим:

$$(A', B') = Sp(A \cdot B^+). \tag{18}$$

В частности,

$$(A', A') = Sp(A \cdot A^+), \tag{19}$$

$$(B', B') = Sp(B \cdot B^+). \tag{19'}$$

Покажем, что в качестве квадрата псевдонормы $|A|^2$ матрицы A может быть выбрано скалярное произведение (A', A'):

$$|A|^2 = (A', A') = Sp(A \cdot A^+). \tag{20}$$

Прежде всего докажем выполнение неравенства:

$$|A||B| \geq |AB|, \tag{21}$$

или, точнее, эквивалентного ему неравенства

$$|A|^2|B|^2 \geq |AB|^2. \tag{22}$$

Для доказательства вычислим $P_n(A, B) = |A|^2|B|^2 - |AB|^2$, и покажем, что $P_n(A, B)$ неотрицательно. Для большей наглядности рассмотрим сначала относительно простые примеры алгебр матриц второго и третьего порядков.

1. Для алгебры матриц второго порядка имеем:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Имеем также:

$$Sp\, D = AA^{+}, \tag{24}$$

$$\begin{gathered} Sp\, D = |A|^2 = Sp \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} = \\ = Sp \left(\begin{array}{c|c} |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 & (AA^{+})_{12} \\ (AA^{+})_{21} & |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2 \end{array} \right) = |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2. \end{gathered} \tag{25}$$

Точно так же

$$|B|^2 = |b_{11}|^2 + |b_{12}|^2 + |b_{21}|^2 + |b_{22}|^2. \tag{26}$$

Далее,

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Аналогично (25), (26),

$$|AB|^2 = |a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}|^2 + |a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}|^2 + |a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}|^2 + |a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}|^2. \tag{28}$$

Согласно формулам (25), (26), (28) имеем:

$$\begin{gathered} |A|^2|B|^2 - |AB|^2 = |a_{11}|^2|b_{11}|^2 + |a_{12}|^2|b_{11}|^2 + |a_{21}|^2|b_{11}|^2 + |a_{22}|^2|b_{11}|^2 + |a_{11}|^2|b_{12}|^2 + \\ +|a_{12}|^2|b_{12}|^2 + |a_{21}|^2|b_{12}|^2 + |a_{22}|^2|b_{12}|^2 + |a_{11}|^2|b_{21}|^2 + |a_{12}|^2|b_{21}|^2 + |a_{21}|^2|b_{21}|^2 + \\ +|a_{22}|^2|b_{21}|^2 + |a_{11}|^2|b_{22}|^2 + |a_{12}|^2|b_{22}|^2 + |a_{21}|^2|b_{22}|^2 + |a_{22}|^2|b_{22}|^2 - |a_{11}|^2|b_{11}|^2 - \\ -|a_{12}|^2|b_{21}|^2 - 2Re\, a_{12}b_{21}a_{11}^*b_{11}^* - |a_{11}|^{|}b_{12}|^2 - |a_{12}|^{|}b_{22}|^2 - 2Re\, a_{11}b_{12}a_{12}^*b_{22}^* - |a_{21}|^{|}b_{11}|^2 - \\ -|a_{22}|^{|}b_{21}|^2 - 2Re\, a_{21}b_{11}a_{22}^*b_{21}^* - |a_{21}|^{|}b_{12}|^2 - |a_{22}|^{|}b_{22}|^2 - 2Re\, a_{21}b_{12}a_{22}^*b_{22}^* = |a_{12}|^{|}b_{11}|^2 + \\ +|a_{11}|^{|}b_{21}|^2 - 2Re\, a_{11}b_{11}a_{12}^*b_{21}^* + |a_{22}|^{|}b_{11}|^2 + |a_{21}|^{|}b_{21}|^2 - 2Re\, a_{21}b_{11}a_{22}^*b_{21}^* + |a_{12}|^{|}b_{12}|^2 + \\ +|a_{11}|^{|}b_{22}|^2 - 2Re\, a_{11}b_{12}a_{12}^*b_{22}^* + |a_{22}|^{|}b_{12}|^2 + |a_{21}|^{|}b_{22}|^2 - 2Re\, a_{21}b_{12}a_{22}^*b_{22}^* = \\ = |a_{11}b_{21}^* - a_{12}b_{11}^*|^2 + |a_{21}b_{21}^* - a_{22}b_{11}^*|^2 + |a_{12}b_{12}^* - a_{11}b_{22}^*|^2 + |a_{22}b_{12}^* - a_{21}b_{22}^*|^2, \end{gathered} \tag{29'}$$

т. е.

$$|A|^2|B|^2 - |AB|^2 = |a_{11}b_{21}^* - a_{12}b_{11}^*|^2 + |a_{21}b_{21}^* - a_{22}b_{11}^*|^2 + |a_{12}b_{12}^* - a_{11}b_{22}^*|^2 + |a_{22}b_{12}^* - a_{21}b_{22}^*|^2. \tag{29}$$

Таким образом,

$$|A|^2|B|^2 \geq |AB|^2, \tag{30'}$$

$$|A||B| \geq |AB|. \tag{30}$$

2. Для алгебры матриц третьего порядка получается, опуская вычисления, следующий результат:

$$\begin{gathered} |A|^2|B|^2 - |AB|^2 = |a_{12}b_{11}^* - a_{11}b_{21}^*|^2 + |a_{11}b_{31}^* - a_{13}b_{11}^*|^2 + |a_{22}b_{11}^* - a_{21}b_{21}^*|^2 + \\ +|a_{23}b_{11}^* - a_{21}b_{31}^*|^2 + |a_{32}b_{11}^* - a_{31}b_{21}^*|^2 + |a_{33}b_{11}^* - a_{31}b_{31}^*|^2 + |a_{11}b_{22}^* - a_{12}b_{12}^*|^2 + \\ +|a_{11}b_{32}^* - a_{13}b_{12}^*|^2 + |a_{22}b_{12}^* - a_{21}b_{22}^*|^2 + |a_{23}b_{12}^* - a_{21}b_{32}^*|^2 + |a_{32}b_{12}^* - a_{31}b_{22}^*|^2 + \\ +|a_{11}b_{23}^* - a_{12}b_{13}^*|^2 + |a_{11}b_{33}^* - a_{13}b_{13}^*|^2 + |a_{22}b_{13}^* - a_{21}b_{23}^*|^2 + |a_{33}b_{12}^* - a_{31}b_{32}^*|^2 + \\ +|a_{23}b_{13}^* - a_{21}b_{33}^*|^2 + |a_{32}b_{13}^* - a_{31}b_{23}^*|^2 + |a_{13}b_{21}^* - a_{12}b_{31}^*|^2 + |a_{22}b_{31}^* - a_{23}b_{21}^*|^2 + \\ +|a_{33}b_{13}^* - a_{31}b_{33}^*|^2 + |a_{33}b_{21}^* - a_{32}b_{31}^*|^2 + |a_{13}b_{22}^* - a_{12}b_{32}^*|^2 + |a_{22}b_{32}^* - a_{23}b_{22}^*|^2 + \\ +|a_{13}b_{23}^* - a_{12}b_{33}^*|^2 + |a_{33}b_{23}^* - a_{32}b_{33}^*|^2 + |a_{33}b_{22}^* - a_{32}b_{32}^*|^2 + |a_{22}b_{33}^* - a_{23}b_{23}^*|^2. \end{gathered} \tag{31}$$

Правая часть равенств (29), (31) содержит соответственно 4 и 27 неотрицательных слагаемых. Поэтому неравенства (30), (30′) выполняются. Равенство (31) может быть переписано следующим образом в виде суммы различных слагаемых:

$$|A|^2|B|^2 - |AB|^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} \sum_{\substack{1,2,3\\(\leftarrow k,\,\rightarrow l,\,k\neq l)}} |a_{ik}b^*{}_{lm} - a_{il}b^*{}_{km}|^2, . \tag{32}$$

Символ $\sum\limits_{(\leftarrow k,\,\rightarrow l,\,k\neq l)}^{1,2,3}$ означает, что: 1) при заданных i, m в паре индексов k, l k и l не меняются местами; 2) k и l принимают все возможные значения $1, 2, 3$ при выполнении условия $k \neq l$.

В силу антисимметрии d_{iklm}, где

$$d_{iklm} = a_{ik}b^*{}_{lm} - a_{il}b^*{}_{km}, \tag{33}$$

по индексам k, l и симметрии по этим индексам $|d_{iklm}|^2$ легко видеть, что формула (32) может быть переписана в виде

$$|A|^2|B|^2 - |AB|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} |a_{ik}b^*_{lm} - a_{il}b^*_{km}|^2. \tag{34}$$

В формуле (34) ограничение $k \neq l$ снимается и не все слагаемые различны:

$$|d_{iklm}|^2 = |d_{ilkm}|^2. \tag{35}$$

Кроме того, слагаемые с одинаковыми k и l тождественно равны нулю:

$$|d_{ikkm}|^2 \equiv 0. \tag{36}$$

Перейдем к кольцу матриц n-го порядка. Имеем:

$$|A|^2 = Sp\, AA^+ = \sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} a_{pr}(a^+)_{rp} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} a_{pr}a^*_{pr} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} |a_{pr}|^2;$$

$$|B|^2 = \sum_{s=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} |b_{sq}|^2;$$

$$|AB|^2 = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{pr}b_{rq}a^*_{ps}b^*_{sq};$$

$$\begin{gathered}
|A|^2|B|^2 - |AB|^2 = \left(\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} |a_{pr}|^2\right)\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} |b_{sq}|^2\right) - \\
- \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{pr}b_{rq}a^*_{ps}b^*_{sq} = \\
= \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1, r\neq s}^{n} |a_{pr}|^2|b_{sq}|^2 - \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1, r\neq s}^{n} a_{pr}b_{rq}a^*_{ps}b^*_{sq} = \\
= \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r,s=1,2\ldots n;\, r\neq s} (|a_{pr}|^2|b_{sq}|^2 + \\
+ |a_{ps}|^2|b_{rq}|^2) - \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r,s=1,\ldots n;\, r\neq s} (a_{pr}b^*_{sq}\cdot a^*_{ps}b_{rq} + a^*_{pr}b_{sq}a_{ps}b^*_{rq}) = \\
\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r,s=1,\ldots n; r\neq s} (|a_{pr}|^2|b_{sq}|^2 - 2Re\, a_{pr}b^*_{sq}a^*_{ps}b_{rq}) = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r,s=1,\ldots n; r\neq s} |a_{pr}b^*_{sq} - a_{ps}b_{rq}|^2.
\end{gathered}$$

Т. е.

$$|A|^2|B|^2 - |AB|^2 = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r,s=1...n,r\neq s}^{n} |a_{pr}b^*_{sq} - a_{ps}b^*_{rq}|^2 \geq 0. \tag{37}$$

Правая часть (37) содержит $n^3(n-1)/2$ различных слагаемых. Из (37) следует:

$$|A|^2|B|^2 - |AB|^2 \geq 0, \tag{38$'$}$$

$$|A||B| \geq |AB|. \tag{38}$$

Далее, $|A|^2|B|^2$ – произведение сумм квадратов; $|AB|^2$ – сумма квадратов,

$$|A|^2|B|^2 = |AB|^2 + \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r,s=1,...n;r\neq s}^{n} |a_{pr}b^*_{sq} - a_{ps}b^*_{rq}|^2, \tag{39$'$}$$

или

$$\left(\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}|a_{pq}|^2\right)\cdot\left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}|b_{rs}|^2\right) = \sum_{p'=1}^{n}\sum_{s'=1}^{n}\sum_{q'=1}^{n}|a_{p'q'}b_{q's'}|^2 + \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r,s=1..n,r\neq s}|a_{pr}b^*_{sq} - a_{ps}b^*_{rq}|^2, \tag{39}$$

т. е. сумма n^2 квадратов, умноженная на сумму n^2 квадратов, есть сумма $n^2+n^3(n-1)/2$ квадратов. В силу антисимметрии по r и s $d_{prsq} = a_{pr}b^*_{sq} - a_{ps}b^*_{rq}$ и симметрии $|d_{prsq}|^2$ получим:

$$|A|^2|B|^2 - |AB|^2 = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}|a_{pr}b^*_{sq} - a_{ps}b^*_{rq}|^2. \tag{40}$$

Здесь ограничение $r \neq s$ снято. Слагаемые не обязательно различны. Кроме того,

$$d_{prrq} \equiv 0. \tag{41}$$

Наряду с (38) очевидно, что

$$|A| \geq 0, \tag{5$'$}$$

$$|-A| = |A|, \tag{6}$$

поскольку

$$|A|^2 = (A', A').$$

Далее,

$$|A+B|^2 = (A'+B', A'+B') = |A|^2 + |B|^2 + (A', B') + (B', A') =$$
$$= |A|^2 + |B|^2 + (A', B') + (A', B')^* = |A|^2 + |B|^2 + 2Re\,(A', B') \leq |A|^2 + |B|^2 + 2|(A', B')|. \tag{42}$$

Но, согласно неравенству Шварца-Коши-Буняковского [4]

$$|(A', B')| \leq |A'| \cdot |B'|,$$

или

$$|(A', B')| \leq |A| \cdot |B|. \tag{43}$$

Поэтому

$$|A+B|^2 \leq |A|^2 + |B|^2 + 2|A||B| = (|A| + |B|)^2, \tag{44}$$

или

$$|A+B| \leq |A| \cdot |B|, \tag{45}$$

но, поскольку, для матриц n-го порядка A и B выполняются условия (38), (5′), (6), (45), величины $|A|, |B|, ...$ являются псевдонормами [1].

Мы видим, что неравенству (38) соответствуют равенства (37), или (39). При этом в данном случае неравенство (38) оказалось следствием равенств (37), или (39).

§2. Равенства, соответствующие неравенствам Шварца-Коши-Буняковского

Как и для псевдонорм матриц, рассмотренных в предыдущем параграфе, существуют равенства, соответствующие неравенствам Шварца-Коши-Буняковского [4, 6]. Вначале получим эти равенства для пространств малой размерности ($n = 3$ и $n = 4$).

1. $n = 3$. Имеем:

$$|x|^2 = (x, x) = |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2, \quad |y|^2 = (y, y) = |y_1|^2 + |y_2|^2 + |y_3|^2 \tag{46}$$

$$\begin{aligned}|x|^2|y|^2 = |x_1|^2|y_1|^2 + |x_2|^2|y_1|^2 + |x_3|^2|y_1|^2 + |x_1|^2|y_2|^2 + |x_2|^2|y_2|^2 + |x_3|^2|y_2|^2 + \\ +|x_1|^2|y_3|^2 + |x_2|^2|y_3|^2 + |x_3|^2|y_3|^2.\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}|(x, y)|^2 = (x_1y_1^* + x_2y_2^* + x_3y_3^*)(x_1^*y_1 + x_2^*y_2 + x_3^*y_3) = |x_1|^2|y_1|^2 + x_2y_2^*x_1^*y_1 + x_3y_3^*x_1^*y_1 + \\ +x_1y_1^*x_2^*y_2 + |x_2|^2|y_2|^2 + x_3y_3^*x_2^*y_2 + x_1y_1^*x_3^*y_3 + x_2y_2^*x_3^*y_3 + |x_3|^2|y_3|^2 = |x_1|^2|y_1|^2 + \\ +|x_2|^2|y_2|^2 + |x_3|^2|y_3|^2 + 2Re\,(x_1y_1^*x_2^*y_2) + 2Re\,(x_1y_1^*x_3^*y_3) + 2Re\,(x_2y_2^*x_3^*y_3).\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}|x|^2|y|^2 - |(x, y)|^2 = |x_2|^2|y_1|^2 + |x_3|^2|y_1|^2 + |x_1|^2|y_2|^2 + |x_3|^2|y_2|^2 + |x_1|^2|y_3|^2 + |x_2|^2|y_3|^2 - \\ -2Re\,(x_1y_1^*x_2^*y_2) - 2Re\,(x_1y_1^*x_3^*y_3) - 2Re\,(x_2y_2^*x_3^*y_3).\end{aligned} \tag{49}$$

Далее, как легко показать,

$$|x_2|^2|y_1|^2 + |x_1|^2|y_2|^2 - 2Re\,(x_1y_1^*x_2^*y_2) = |x_1y_2 - x_2y_1|^2, \tag{50}$$

$$|x_3|^2|y_1|^2 + |x_1|^2|y_3|^2 - 2Re\,(x_1y_1^*x_3^*y_3) = |x_3y_1 - x_1y_3|^2, \tag{51}$$

$$|x_3|^2|y_2|^2 + |x_2|^2|y_3|^2 - 2Re\,(x_2y_2^*x_3^*y_3) = |x_2y_3 - x_3y_2|^2. \tag{52}$$

Формула (49), с учетом формул (50) – (52), принимает вид:

$$|x|^2|y|^2 - |(x, y)|^2 = |x_1y_2 - x_2y_1|^2 + |x_3y_1 - x_1y_3|^2 + |x_2y_3 - x_3y_2|^2, \tag{53$'$}$$

или

$$|x|^2|y|^2 - |(x, y)|^2 = |[x, y]|^2, \tag{53}$$

$$|x|^2|y|^2 = |(x, y)|^2 + |[x, y]|^2, \tag{53$''$}$$

где $[x, y]$ – векторное произведение векторов x, y,

$$|[x, y]|^2 = ([xy], [xy]) = |x_1y_2 - x_2y_1|^2 + |x_3y_1 - x_1y_3|^2 + |x_2y_3 - x_3y_2|^2. \tag{54}$$

Поскольку

$$|[x, y]|^2 \geq 0,$$

имеем:

$$|x|^2|y|^2 - |(x, y)|^2 \geq 0, \tag{55}$$

т. е. неравенство Шварца-Коши-Буняковского. Оно получилось здесь как следствие равенства (53). Формулу (53$''$) перепишем в виде

$$\begin{aligned}(|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2)(y_1|^2 + |y_2|^2 + |y_3|^2) = |x_1y_1^* + x_2y_2^* + x_3y_3^*|^2 + \\ +|x_1y_2 - x_2y_1|^2 + |x_3y_1 - x_1y_3|^2 + |x_2y_3 - x_3y_2|^2,\end{aligned} \tag{53$'''$}$$

т. е. сумма квадратов, умноженная на сумму квадратов, есть сумма квадратов.

2. $n = 4$. Имеем:

$$|x|^2 = (x,x) = |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2, \tag{56}$$

$$|y|^2 = |y_1|^2 + |y_2|^2 + |y_3|^2 + |y_4|^2. \tag{57}$$

$$|x|^2|y|^2 = |x_1|^2|y_1|^2 + |x_2|^2|y_1|^2 + |x_3|^2|y_1|^2 + |x_4|^2|y_1|^2 + |x_1|^2|y_2|^2 + |x_2|^2|y_2|^2 + |x_3|^2|y_2|^2 + |x_4|^2|y_2|^2 + \\ + |x_1|^2|y_3|^2 + |x_2|^2|y_3|^2 + |x_3|^2|y_3|^2 + |x_4|^2|y_3|^2 + |x_1|^2|y_4|^2 + |x_2|^2|y_4|^2 + |x_3|^2|y_4|^2 + |x_4|^2|y_4|^2, \tag{58'}$$

$$|(x,y)|^2 = (x_1y_1^* + x_2y_2^* + x_3y_3^* + x_4y_4^*)(x_1^*y_1 + x_2^*y_2 + x_3^*y_3 + x_4^*y_4) = |x_1|^2|y_1|^2 + x_2y_2^*x_1^*y_1 + \\ + x_3y_3^*x_1^*y_1 + x_4y_4^*x_1^*y_1 + x_1y_1^*x_2^*y_2 + |x_2|^2|y_2|^2 + x_3y_3^*x_2^*y_2 + x_4y_4^*x_2^*y_2 + x_1y_1^*x_3^*y_3 + \\ + x_2y_2^*x_3^*y_3 + |x_3|^2|y_3|^2 + x_4y_4^*x_3^*y_3 + x_1y_1^*x_4^*y_4 + x_2y_2^*x_4^*y_4 + x_3y_3^*x_4^*y_4 + |x_4|^2|y_4|^2 = \\ = |x_1|^2|y_1|^2 + |x_2|^2|y_2|^2 + |x_3|^2|y_3|^2 + |x_4|^2|y_4|^2 + 2Re\,(x_2y_2^*x_1^*y_1) + 2Re\,(x_3y_3^*x_1^*y_1) + \\ + 2Re\,(x_4y_4^*x_1^*y_1) + 2Re\,(x_3y_3^*x_2^*y_2) + 2Re\,(x_4y_4^*x_2^*y_2) + 2Re\,(x_4y_4^*x_3^*y_3), \tag{58}$$

$$|x|^2|y|^2 - |(x,y)|^2 = |x_2|^2|y_1|^2 + |x_1|^2|y_2|^2 - 2Re\,(x_1y_1^*x_2^*y_2) + |x_3|^2|y_1|^2 + |x_1|^2|y_3|^2 - 2Re\,(x_3y_3^*x_1^*y_1) + \\ + |x_4|^2|y_1|^2 + |x_1|^2|y_4|^2 - 2Re\,(x_4y_4^*x_1^*y_1) + |x_3|^2|y_2|^2 + |x_2|^2|y_3|^2 - 2Re\,(x_3y_3^*x_2^*y_2) + \\ + |x_4|^2|y_2|^2 + |x_2|^2|y_4|^2 - 2Re\,(x_4y_4^*x_2^*y_2) + |x_4|^2|y_3|^2 + |x_3|^2|y_4|^2 - 2Re\,(x_4y_4^*x_3^*y_3). \tag{59}$$

Далее, имеем:

$$|x_2|^2|y_1|^2 + |x_1|^2|y_2|^2 - 2Re\,(x_1^*y_1x_2y_2^*) = |x_2y_1 - x_1y_2|^2, \tag{60}$$

$$|x_3|^2|y_1|^2 + |x_1|^2|y_3|^2 - 2Re\,(x_3y_3^*x_1^*y_1) = |x_3y_1 - x_1y_3|^2, \tag{61}$$

$$|x_4|^2|y_1|^2 + |x_1|^2|y_4|^2 - 2Re\,(x_4y_4^*x_1^*y_1) = |x_4y_1 - x_1y_4|^2, \tag{62}$$

$$|x_3|^2|y_2|^2 + |x_2|^2|y_3|^2 - 2Re\,(x_3y_3^*x_2^*y_2) = |x_3y_2 - x_2y_3|^2, \tag{63}$$

$$|x_4|^2|y_2|^2 + |x_2|^2|y_4|^2 - 2Re\,(x_4y_4^*x_2^*y_2) = |x_4y_2 - x_2y_4|^2, \tag{64}$$

$$|x_4|^2|y_3|^2 + |x_3|^2|y_4|^2 - 2Re\,(x_4y_4^*x_3^*y_3) = |x_4y_3 - x_3y_4|^2. \tag{65}$$

Из (59) и (60) – (65) следует:

$$|x|^2|y|^2 - |(x,y)|^2 = |x_2y_1 - x_1y_2|^2 + |x_3y_1 - x_1y_3|^2 + |x_4y_1 - x_1y_4|^2 + \\ + |x_3y_2 - x_2y_3|^2 + |x_4y_2 - x_2y_4|^2 + |x_4y_3 - x_3y_4|^2, \tag{66}$$

или

$$(|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2)(|y_1|^2 + |y_2|^2 + |y_3|^2 + |y_4|^2) = \\ = |x_1y_1^* + x_2y_2^* + x_3y_3^* + x_4y_4^*|^2 + |x_2y_1 - x_1y_2|^2 + |x_3y_1 - x_1y_3|^2 + |x_4y_1 - x_1y_4|^2 + \\ + |x_3y_2 - x_2y_3|^2 + |x_4y_2 - x_2y_4|^2 + |x_4y_3 - x_3y_4|^2 \tag{67}$$

3. Для общего случая n-мерного пространства имеем:

$$|x|^2|y|^2 - |(x,y)|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 - \sum_{i=1}^{n} x_iy_i^* \cdot \sum_{k=1}^{n} x_ky_k^* =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |x_i|^2|y_k|^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_iy_i^*x_ky_k^* =$$

$$= \sum_{i,k;1..n;i\neq k} (|x_i|^2|y_k|^2 + |x_k|^2|y_i|^2) - \sum_{i,k;1..n;i\neq k} (x_i y_i^* x_k y_k^* + x_i^* y_i x_k^* y_k) =$$

$$= \sum_{i,k;1..n;i\neq k} (|x_i|^2|y_k|^2 + |x_k|^2|y_i|^2 - x_i y_i^* x_k y_k^* - x_i^* y_i x_k^* y_k) =$$

$$= \sum_{i,k;1..n;i\neq k} (x_i y_k - x_k y_i)(x_i^* y_k^* - x_k^* y_i) = \sum_{i,k;1..n;i\neq k} |x_i y_k - x_k y_i|^2,$$

т. е.

$$|x|^2|y|^2 - |(x,y)|^2 = \sum_{i,k;1..n;\, i\neq k} |x_i y_k - x_k y_i|^2 \qquad (68)$$

(в правой части – сумма $C_n^2 = n(n-1)/2$ различных слагаемых). Но вследствие симметричности каждого слагаемого по i и k имеем:

$$|x|^2|y|^2 - |(x,y)|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |x_i y_k - x_k y_i|^2. \qquad (69)$$

Здесь ограничения "непереставляемости местами" i и k и $i \neq k$ снимаются. В общем случае в силу неотрицательности правой части равенства (69) неравенство Шварца-Коши-Буняковского является его следствием. Соотношение (69) может быть переписано в виде

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 = |\sum_{r=1}^{n} x_r y_r^*|^2 + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} |x_l y_m - x_m y_l|^2. \qquad (70)$$

§3. Равенства, соответствующие неравенствам Шварца-Коши-Буняковского, записанные с помощью некоторых гиперкомплексных систем

Равенства вида (70) могут также быть записаны с помощью гиперкомплексных систем определенного типа. Рассмотрим, как и в предыдущих параграфах, вначале соотношения (69), или (70), для случаев трехмерного и четырехмерного пространств ($n = 3, n = 4$).

1. $n = 3$.

Рассмотрим некоторую гиперкомплексную систему, элементы которой a и b записаны в виде

$$a = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k, \qquad b = y_o + y_1 i + y_2 j + y_3 k \qquad (71)$$

с комплексными коэффициентами x_i, y_i $(i = 0, 1, 2, 3)$, причем

$$a)\ \ i^2 = j^2 = k^2 = -1; \qquad (72)$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j; \qquad (73)$$

$$x_l i_l \cdot y_l i_l = -x_l y_l^*, \quad x_l i_l \cdot y_m i_m = x_l y_m i_l i_m \qquad (l \neq m). \qquad (74')$$

$$b)\ \ x_v = \tilde{Re}\, a, \quad y_0 = \tilde{Re}\, b, \qquad (74'')$$

$$\tilde{Im}\, a = x_1 i + x_2 j + x_3 k, \quad \tilde{Im}\, b = y_1 i + y_2 i + y_3 k, \qquad (74)$$

$$\tilde{Re}\ a \cdot \tilde{Re}\, b = x_o y_0^*, x_0 \cdot (y_m j_m) = x_0 y_m j_m. \qquad (74''')$$

$\tilde{Re}\, a$, $\tilde{Re}\, b$ назовем действительными частями a и b, а $\tilde{Im}\, a$, $\tilde{Im}\, b$ – мнимыми частями. Отметим, что x_0, y_0 в комплексном пространстве – комплексные числа, а $\tilde{Im}\, a, \tilde{Im}\, b$ –

вообще говоря комплексные, но отнюдь не чисто мнимые числа (подобные системы, но более общего вида, были рассмотрены в [5]).

c) Произведение a и b равно:

$$a \cdot b = (x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) \cdot (y_o + y_1 i + y_2 j + x_3 k) = x_0 y_0^* + \\ + y_0(x_1 i + x_2 j + x_3 k) + x_0(y_1 i + y_2 j + y_3 k) + (x_1 i + x_2 j + x_3 k) \cdot (y_1 i + y_2 j + y_3 k), \tag{75}$$

где

$$(x_1 i + x_2 j + x_3 k) \cdot (y_1 i + y_2 j + y_3 k) = x_1 y_1^* i^2 + x_2 y_1 ji + x_3 y_1 ki + x_1 x_2 ij + \\ + x_2 y_2^* j^2 + x_3 y_2 kj + x_1 y_3 ik + x_2 y_3 jk + x_3 y_3^* k^2, \tag{76}$$

или, с учетом $(72), (74''')$

$$(x_1 i + x_2 j + x_3 k)(y_1 i + y_j + y_3 k) = -x_1 y_1^* - x_2 y_2^* - x_3 y_3^* + (x_2 y_3 - x_3 y_2) i + \\ + (x_3 y_1 - x_1 y_3) j + (x_1 x_2 - x_2 y_1) k. \tag{77}$$

Поскольку:

$$x = x_1 i + x_2 j + x_3 k, \quad y = y_1 i + y_2 j + y_3 k \tag{78}$$

трехмерные векторы, получим, согласно (77) и (78),

$$x \cdot y = \tilde{Im}\, a \cdot \tilde{Im}\, b = -(x, y) + [x, y], \tag{79}$$

где

$$[x, y] = (x_2 y_3 - x_3 y_2) i + (x_3 y_1 - x_1 y_3) j + (x_1 y_2 - x_2 y_1) k \tag{80}$$

определим как векторное произведение комплексных векторов x и y. Подставляя (77) в (75), получим:

$$a \cdot b = x_0 y_0^* - (x, y) + (y_0 x_1 + x_0 y_1 + x_2 x_3 - x_3 x_2) i + \\ + (y_0 x_2 + x_0 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3) j + (y_0 x_3 + x_0 y_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1), \tag{81'}$$

или

$$a \cdot b = x_0 y_0^* - (x, y) + y_0 x + x_0 y + [x, y], \tag{81}$$

откуда

$$\tilde{Re}\,(a \cdot b) = x_0 y_0^* - (x, y), \tag{82}$$

$$\tilde{Im}\,(a \cdot b) = y_0 x + x_0 y + [x, y]. \tag{83}$$

Определим сопряжение элементов a и b следующим образом:

$$a^+ = x_o - x_1 i - x_2 j - x_3 k, \quad b^+ = y_0 - y_1 i - y_2 j - y_3 k. \tag{84}$$

Полагая в $(81')$ $b = a^+$, получим:

$$a \cdot a^+ = x_0 x_0^* + x_1 x_1^* + x_2 x_2^* + x_3 x_3^* + (x_0 x_1 - x_0 x_1 - x_2 x_3 + x_3 x_2) i +$$

$$+ (x_0 x_2 - x_0 x_2 - x_3 x_1 + x_1 x_3) j + (x_0 x_3 - x_0 x_3 - x_1 x_2 + x_2 x_1) k$$

или, сокращая:

$$a \cdot a^+ = |x_0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = (a, a). \tag{85}$$

Мы видим, что

$$a \cdot a^+ \geq 0, \tag{86}$$

$$a \cdot a^+ = 0 \quad \text{только при} \quad a = 0, \tag{87}$$

и, как легко показать,

$$a \cdot a^+ = a^+ \cdot a. \tag{88}$$

Величину $a \cdot a^+ = a^+ \cdot a$ определим как квадрат модуля a:

$$a \cdot a^+ = a^+ \cdot a = |a|^2. \tag{89}$$

Поскольку

$$x = a|_{x_0=0}, \quad y = b|_{y_0=0}, \tag{90$'$}$$

то, согласно (81)

$$x \cdot y = -(x, y) + [x, y] = -(x, y) + [x, y]_1 i + [x, y]_2 j + [x, y]_3 k. \tag{90}$$

Теперь, с учетом (85), имеем:

$$|x \cdot y|^2 = |(x, y)|^2 + |x_2 y_3 - x_3 y_2|^2 + |x_3 y_1 - x_1 y_3|^2 + |x_1 y_2 - x_2 y_1|^2. \tag{91}$$

С другой стороны

$$|x|^2 |y|^2 = |(x, y)|^2 + |x_2 y_3 - x_3 y_2|^2 + |x_3 y_1 - x_1 y_3|^2 + |x_1 y_2 - x_2 y_1|^2. \tag{54$'''$}$$

Сравнивая с (91) и (53$'''$), имеем:

$$|x \cdot y|^2 = |x|^2 \cdot |y|^2. \tag{92}$$

Это – равенство, соответствующее неравенству Шварца-Коши-Буняковского, записанное с помощью гиперкомплексных элементов $x = a|_{x_0=0}$ и $y = b|_{y_0=0}$. Отметим, что для полных элементов a и b $|a \cdot b|^2 \neq |a|^2 |b|^2$.

Можно показать, что полученная гиперкомплексная система с комплексными коэффициентами x_0, x_1, x_2, x_3 неассоциативна и неальтернативна. Однако при действительных коэффициентах она совпадает с кватернионом. Легко видеть, что (53$'''$) и (92) выполняются не только при выполнении условий (73), но и любого из условий

$$ij = -ji = (\pm)_1 k, \quad jk = -kj = (\pm)_2 i, \quad ki = -ik = (\pm)_3 j, \tag{93}$$

причем индексы $()_1, ()_2, ()_3$ означают, что выбор знаков $\pm$ в каждом из соотношений (93) независим. Следовательно, существует несколько гиперкомплексных систем, приводящих к (53$'''$) и (92). (см. также [5], стр. 36). Любой из указанных гиперкомплексных систем, для которых $x_k i_k \cdot y_k i_k = -x_k y_k^*$, может быть сопоставлена система, для которой

$$x_k i_k \cdot y_k i_k = -x_k^* y_k, \tag{94}$$

$$(\tilde{Re}\, a \cdot \tilde{Re}\, b)_l = x_0^* y_0. \tag{94$'$}$$

Если для исходной системы (назовем ее *правой*)

$$a \cdot b = \tilde{Re}\,(a \cdot b) + \tilde{Im}\,(a \cdot b), \tag{95}$$

то для системы (94$'$) (назовем ее *левой*) произведение, которое мы обозначим как $(a \cdot b)_l$, как легко показать, равно

$$(a \cdot b)_l = (\tilde{Re}\,(a \cdot b))^* + \tilde{Im}\,(a \cdot b). \tag{96}$$

Вернемся теперь к системе, умножение в которой определено формулой (81′). Для $(a \cdot b)^+$ получим:

$$(a \cdot b)^+ = x_0 y_0^* - (x, y) - (y_0 x_1 + y_1 x_0 + x_2 y_3 - x_3 y_2)i - \\ -(y_0 x_2 + y_2 x_0 + x_3 y_1 - x_1 y_3)j - (y_0 x_3 + y_3 x_0 + y_2 x_1 - y_1 x_2)k. \tag{97}$$

Для $b^+ a^+$ получим:

$$b^+ \cdot a^+ = y_0 x_0^* - (y, x) + (-x_0 y_1 - y_0 x_1 + y_2 x_3 - y_3 x_2)i +$$

$$+(-x_0 y_2 - y_0 x_2 + y_3 x_1 - y_1 x_3)j + (-x_0 y_3 - y_0 x_3 + y_1 x_2 - y_2 x_1)k,$$

или

$$b^+ a^+ = y_0 x_0^* - (x, y)^* - (x_0 y_1 + y_0 x_1 - y_2 x_3 + y_3 x_2)i - \\ -(x_0 y_2 + y_0 x_2 - y_3 x_1 + y_1 x_3)j - (x_0 y_3 + y_0 x_3 - y_1 x_2 + y_2 x_1)k. \tag{98}$$

Мы видим, что

$$(a \cdot b)^+ \neq b^+ \cdot a^+. \tag{99}$$

Однако согласно (96)

$$b^+ a^+|_l = y_0^* x_0 - (x, y) - (x_0 y_1 + y_0 x_1 - y_2 x_3 + y_3 x_2)i - \\ -(x_0 y_2 + y_0 x_2 - y_3 x_1 + y_1 x_3)j - (x_0 y_3 + y_0 x_3 - y_1 x_2 + y_2 x_1)k. \tag{100}$$

Сравнивая (100) и (97) имеем:

$$(a \cdot b)^+ = (b^+ \cdot a^+)_l. \tag{101}$$

Поскольку мнимые части $a \cdot b$ и $(a \cdot b)_l$ равны, то соотношение (92) остается в силе и для левой системы. Далее, т.к., согласно (95) и (96)

$$a \cdot a^+ = \tilde{Re}\,(a \cdot a^+), \tag{95′}$$

$$(a \cdot a^+)_l = (\tilde{Re}\,(a \cdot a^+))^*, \tag{96′}$$

и поскольку

$$\tilde{Re}\,(a \cdot a^+) = ((\tilde{Re}\,(a \cdot a^+))_l)^*, \tag{102}$$

то

$$a \cdot a^+ = (a \cdot a^+)_l\,, \tag{103}$$

или

$$|a| = |a|_l. \tag{104}$$

2. $n = 4$.

В четырехмерном евклидовом пространстве правая часть соотношения (66) содержит шесть слагаемых вида $|x_i y_k - x_k y_i|^2$; i, k; $(i \neq k)$ принимает значения $1, 2, 3, 4$.

Введем гиперкомплексные системы седьмого порядка, элементы которых a и b равны:

$$a = x_0 + x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4 + x_5 i_5 + x_6 i_6, \\ b = y_0 + y_1 i_1 + y_2 i_2 + y_3 i_3 + y_4 i_4 + y_5 i_5 + y_6 i_6, \tag{105}$$

$x_k, y_k\,(k = 0, 1...6)$ – комплексные числа,

$$\tilde{Re}\,a = x_0, \quad \tilde{Im}\,a = \sum_{k=1}^{6} x_k i_k; \quad \tilde{Re}\,b = y_0, \quad \tilde{Im}\,b = \sum_{l=1}^{6} y_l i_l. \tag{106}$$

Векторам $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ соответствуют гиперкомплексные элементы

$$x = \sum_{k=1}^{4} x_k i_k, \quad y = \sum_{l=1}^{4} y_l i_l. \tag{107}$$

Определим умножение ортов i_k следующим образом:

$$a)\, i_k^2 = -1 \ \text{ для всех k ;} \tag{108}$$

$$b)\, i_k i_l = 0 \ \ (k \neq l, k > 4 \text{ или } l > 4); \tag{109}$$

$$c)\, i_k i_l = i_m, \quad k \neq l; \ \ k, l \neq m; \ \ 1 \leq k \leq 4, \ 1 \leq l \leq 4, \ 1 \leq m \leq 6; \tag{110}$$

$d)$ Индексу m в (110) соответствует единственная пара индексов $(k, l) : (k', l') \to m'$,

$$\text{но если} \ \ (k', l') \neq (k, l), \ \ \text{то} \ \ m' \neq m\,; \tag{111}$$

$$e)\, i_k i_l = -i_l i_k, \quad k \neq l (112), \quad x_0 \cdot (x_k i_k) = x_0 x_k i_k\,; \tag{113}$$

$$f)\, (x_l i_l)(y_l i_l) = -x_l y_l^*, \quad (l = 1, 2, ...5, 6) \ \ \tilde{R}e\, a \cdot \tilde{R}e\, b = x_0 y_0^*\,; \tag{114}$$

$$g)\, (x_k i_k) \cdot (y_l i_l) = (x_k y_l) i_k i_l \ \ (k, l = 1, 2...6, \ k \neq l)\,. \tag{115}$$

Рассмотрим конкретный пример такой системы, в котором (110) имеет вид:

$$i_1 i_2 = i_3, \quad i_2 i_3 = i_4, \quad i_3 i_4 = i_1, \quad i_4 i_1 = i_2, \quad i_1 i_3 = i_5, \quad i_2 i_4 = i_6. \tag{110$'$}$$

Далее, получим:

$$\begin{gathered} a \cdot b = x_0 y_0^* - (x, y) + (x_1 y_0 + x_0 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3) i_1 + (x_0 y_2 + x_2 y_0 + x_4 y_1 - x_1 y_4) i_2 + \\ +(x_0 y_3 + x_3 y_0 + x_1 y_2 - x_2 y_1) i_1 + (x_0 y_4 + x_4 y_0 + x_2 y_3 - x_3 y_2) i_4 + \\ +(x_0 y_5 + x_5 y_0 + x_1 y_3 - x_3 y_1) i_5 + (x_0 y_6 + x_6 y_0 + x_2 y_4 - x_4 y_2) i_6. \end{gathered} \tag{116}$$

Сопряжение определим, как и при $n = 3$:

$$a^+ = x_0 - x_1 i_1 - x_2 i_2 - x_3 i_3 - x_4 i_4 - x_5 i_5 - x_6 i_6. \tag{117}$$

Полагая $b = a^+$, получим:

$$y_0 = x_0, \ y_1 = -x_1, \ y_2 = -x_2, \ y_3 = -x_3, \ y_4 = -x_4, \ y_5 = -x_5, \ y_6 = -x_6. \tag{118}$$

Подставляя (118) в (116), имеем:

$$a \cdot a^+ = |x_0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2 + |x_5|^2 + |x_6|^2 + (x_1 x_0 - x_0 x_1 - x_3 x_4 + x_4 x_3) i_1 +$$

$$+(-x_0 x_2 + x_2 x_0 - x_4 x_1 + x_1 x_4) i_2 + (-x_0 x_3 + x_3 x_0 - x_1 x_2 + x_2 x_1) i_3 + (-x_0 x_4 + x_4 x_0 - x_2 x_3 + x_3 x_2) i_4 +$$

$$+(-x_0 x_5 + x_5 x_0 - x_1 x_3 + x_3 x_1) i_5 + (-x_0 x_6 + x_6 x_0 - x_2 x_4 + x_4 x_2) i_6$$

или, сокращая:

$$|a|^2 = a \cdot a^+ = a^+ a = |x_0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2 + |x_5|^2 + |x_6|^2, \tag{119}$$

где $|a|^2$ снова определим как квадрат модуля. Полагая в (116), (119) $x_0 = x_5 = x_6 = 0$, $y_0 = y_5 = y_6 = 0$, получим:

$$\begin{gathered} x \cdot y = (x_3 y_4 - x_4 y_3) i_1 + (x_4 y_1 - x_1 y_4) i_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) i_3 + \\ +(x_2 y_3 - x_3 y_2) i_4 + (x_1 y_3 - x_3 y_1) i_5 + (x_2 y_4 - x_4 y_2) i_6, \end{gathered} \tag{120}$$

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^{4} |x_k|^2, \quad |y|^2 = \sum_{l=1}^{4} |y_l|^2. \tag{121}$$

Далее,

$$\begin{gathered}|x \cdot y|^2 = |(x,y)|^2 + |x_3y_4 - x_4y_3|^2 + |x_4y_1 - x_1y_4|^2 + |x_1y_2 - x_2y_1|^2 + \\ +|x_2y_3 - x_3y_2|^2 + |x_1y_3 - y_1x_3|^2 + |x_2y_4 - y_2x_4|^2.\end{gathered} \tag{122}$$

Из (66) и (122) получим:

$$|x|^2|y|^2 = |x \cdot y|^2, \tag{123}$$

(аналогично равенству (92) для $n = 3$).

Однако

$$|a|^2|b|^2 \neq |a \cdot b|^2. \tag{124}$$

Так же, как и для $n = 3$, системе (116) соответствует система, в которой

$$x_r i_r \cdot y_r i_r = -x_r^* y_r, \tag{125}$$

$$\tilde{Re}\, a \cdot \tilde{Re}\, b = x_0^* y_0. \tag{125$'$}$$

Назовем ее левой. В отличие от исходной системы, для левой системы согласно (125), (125′) имеем:

$$(ab)_l = x_0^*y_0 - x_1^*y_1 - x_2^*y_2 - x_3^*y_3 - x_4^*y_4 - x_5^*y_5 - x_6^*y_6 + (x_1y_0 + x_0y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)i_1 +$$

$$+(x_0y_2 + x_2y_0 + x_4y_1 - x_1y_4)i_2 + (x_0y_3 + x_3y_0 + x_1y_2 - y_1x_2)i_3 + (x_0y_4 + x_4y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)i_4 +$$

$$+(x_0y_5 + x_5y_0 + x_1y_3 - x_3y_1)i_5 + (x_0y_6 + x_6y_0 + x_2y_4 - x_4y_2)i_6. \tag{126}$$

Для исходной системы (правой)

$$(a \cdot b)^+ = x_0y_0^* - x_1y_1^* - x_2y_2^* - x_3y_3^* - x_4y_4^* - x_5y_5^* - x_6y_6^* + (-x_1y_0 - x_0y_1 + x_4y_3 - x_3y_4)i_1 +$$

$$+(-x_0y_2 - x_2y_0 + x_1y_4 - x_4y_1)i_2 + (-x_0y_3 - x_3y_0 + x_2y_1 - x_1y_2)i_3 + (-x_0y_4 - x_4y_0 + x_3y_2 - x_2y_3)i_4 +$$

$$+(-x_0y_5 - x_5y_0 + x_3y_1 - x_1y_3)i_5 + (-x_0y_6 - x_6y_0 + x_4y_2 - x_2y_4)i_6. \tag{127}$$

Далее,

$$b^+ = y_0 - y_1i_1 - y_2i_2 - y_3i_3 - y_4i_4 - y_5i_5 - y_6i_6, \tag{128}$$

$$a^+ = x_0 - x_1i_1 - x_2i_2 - x_3i_3 - x_4i_4 - x_5i_5 - x_6i_6, \tag{128$'$}$$

$$(b^+a^+)_l = y_0^*x_0 - y_1^*x_1 - y_2^*x_2 - y_3^*x_3 - y_4^*x_4 - y_5^*x_5 - y_6^*x_6 + (-y_0x_1 - y_1x_0 + y_3x_4 - y_4x_3)i_1 +$$

$$+(-y_0x_2 - y_2x_0 + y_4x_1 - x_4y_1)i_2 + (-y_0x_3 - y_3x_0 + y_1x_2 - y_2x_1)i_3 + (-y_0x_4 - y_4x_0 + y_2x_3 - x_2y_3)i_4 +$$

$$+(-y_0x_5 - y_5x_0 + y_1x_3 - y_3x_1)i_5 + (-y_0x_6 - y_6x_0 + y_2x_4 - y_4x_2)i_6. \tag{129}$$

Сравнивая (127) и (129), получим:

$$(a \cdot b)^+ = (b^+a^+)_l. \tag{130}$$

В действительных пространствах как при $n = 3$, так и при $n = 4$, разница между правыми и левыми гиперкомплексными системами исчезает, и в приведенных примерах

$$(a \cdot b)^+ = b^+ \cdot a^+ \tag{131}$$

– формула (130) принимает обычный вид.

3. n-мерное комплексное евклидово пространство, $n \geq 3$.

Сопоставим векторам x, y такого пространства элементы гиперкомплексной системы

$$a = x_0 + \sum_{i=1}^{n'} x_i \varepsilon_i, \quad b = y_0 + \sum_{k=1}^{n'} y_k \varepsilon_k, \tag{132}$$

$$n' = C_n^2 = n(n-1)/2. \tag{133}$$

x_0, x_i, y_0, y_k – комплексные коэффициенты, ε_i – мнимые единицы,

$$\varepsilon_i^2 = -1; \tag{134}$$

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \sum_{s=1}^{n'} a_{ijs} \varepsilon_s, \tag{135}$$

$$a_{ijs} = -a_{jis}, \tag{136}$$

$$x_0 \cdot y_0 = x_0 y_0^*, \tag{136'}$$

$$x_0 \cdot y_0 = a|x_1 = x_2 = ... = 0 \cdot b|y_1 = y_2 = .. = 0$$

$$(x_i \varepsilon_i) \cdot (y_i \varepsilon_i) = -x_i y_i^*, \tag{137}$$

$$(x_i \varepsilon_i) \cdot (y_j \varepsilon_j) = (x_i y_j) \cdot \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \quad (i \neq j). \tag{138}$$

Сопряжение $^+$ определим следующим образом:

$$a^+ = x_0 - \sum_{i=1}^{n'} x_i \varepsilon_i. \tag{139}$$

Произведение $a \cdot b$ равно:

$$a \cdot b = (x_0 + \sum_{i=1}^{n'} x_i \varepsilon_i) \cdot (y_0 + \sum_{j=1}^{n'} y_j \varepsilon_j) = x_0 y_0^* + y_0 \sum_{i=1}^{n'} x_i \varepsilon_i + x_0 \sum_{i=1}^{n'} y_i \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n'} \sum_{s=1}^{n'} x_i y_j a_{ijs} \varepsilon_s -$$

$$- \sum_{i=1}^{n'} x_i y_i^* = x_0 y_0^* - \sum_{l=1}^{n'} x_l y_l^* + y_0 \sum_{s=1}^{n'} x_s \varepsilon_s + x_0 \sum_{s=1}^{n'} y_s \varepsilon_s + \sum_{s=1}^{n'} \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n'} x_i y_j a_{ijs} \varepsilon_s,$$

или

$$a \cdot b = x_0 y_0^* - \sum_{l=1}^{n'} x_l y_l^* + \sum_{s=1}^{n'} (y_0 x_s + x_0 y_s + \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n'} x_i y_j a_{ijs}) \varepsilon_s. \tag{140}$$

Пусть теперь

$$b = a^+ \quad (x_0 = y_0, \ x_i = -y_i \quad (i \neq 0)). \tag{141}$$

или, согласно (140) и (141),

$$a \cdot a^+ = x_0 x_0^* + \sum_{l=1}^{n'} x_l x_l^* + \sum_{s=1}^{n'} (x_0 x_s - x_0 x_s - \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n'} x_i x_j a_{ijs}) \varepsilon_s.$$

Но вследствие выполнения (136) имеем:

$$\sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n'} x_i x_j a_{ijs} = 0,$$

и мы получим

$$aa^+ = \tilde{Re}\,(a\cdot a^+) = |x_0|^2 + \sum_{l=1}^{n'} |x_l|^2 = \sum_{k=0}^{n'} |x_k|^2 = (a,a). \tag{142}$$

Поскольку

$$a = (a^+)^+, \tag{143}$$

имеем также

$$a^+a = aa^+ = \sum_{k=0}^{n'} |x_k|^2 = (a,a). \tag{144}$$

Имеем также, как легко показать,

$$\tilde{Re}\,(a\cdot b^+) = (a,b), \tag{142$'$}$$

$$\tilde{Re}\,(a\cdot b) = x_0y_0^* - (\tilde{Im}\,a, \tilde{Im}\,b), \tag{142$''$}$$
$$\tilde{Re}\,(a\cdot a) = |x_0|^2 - (\tilde{Im}\,a, \tilde{Im}\,a)$$

– форма Минковского.

Ниже мы ограничимся системами, в которых

$$\begin{gathered}\varepsilon_i\varepsilon_j = -\varepsilon_j\varepsilon_i = \varepsilon_l \quad (i\neq j),\quad l\neq i\neq j;\quad i,j\leq n; \varepsilon_i\cdot\varepsilon_j = 0 \text{ при } i'>n \text{ или } j'>n,\\ \text{и каждому индексу } l \text{ соответствует одна и только одна пара индексов } i,j.\end{gathered} \tag{145}$$

Системы, удовлетворяющие соотношениям $(134), (136'), (137), (138), (139), (145)$, назовем системами *квазикватернионов*. Векторам $(x_1, x_2, ...x_n), (y_1, y_2, ...y_n)$ n-мерного комплексного пространства соответствуют элементы системы квазикватернионов

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i\varepsilon_i. \tag{146}$$

Каждому n-мерному евклидову пространству можно поставить в соответствие, разумеется, не единственное кольцо квазикватернионов (см. [5]). Только для действительных евклидовых пространств квазикватернионы являются алгебрами, поскольку для комплексных квазикватернионов

$$(\alpha a)\cdot b \neq a\cdot(\alpha b). \tag{147}$$

(α – комплексное число). Произведение двух векторных квазикватернионов равно:

$$x\cdot y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j^{\rho_{ij}}\varepsilon_i\varepsilon_j, \tag{148}$$

где ρ_{ij} – символ, определяемый соотношениями

$$\begin{cases}\rho_{ij} = *, & i=j,\\ \rho_{ij} = 1, & i\neq j.\end{cases} \tag{149}$$

Согласно $(148), (134)$ и (145) получим:

$$\begin{gathered} x\cdot y = -\sum_{m=1}^{n} x_m y_m^* + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j\varepsilon_i\varepsilon_j =\\ = -(x,y) + \sum_{l=1}^{n'}(x_iy_j - x_jy_i)\varepsilon_l, \quad (i\neq j;\quad i,j \text{ не переставляются})\end{gathered} \tag{150}$$

Согласно (142) и (150) имеем:

$$|x \cdot y|^2 = |(x, y)|^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i y_j - x_j y_i|^2, \quad (i \neq j; \quad i, j \text{ не переставляются}). \tag{151}$$

Сравнивая (68) и (151), получим:

$$|x \cdot y|^2 = |x|^2 |y|^2. \tag{152}$$

Это – равенство, соответствующее неравенству Шварца-Коши-Буняковского, записанное в "квазикватернионном" виде.

Произведение полных квазикватернионов $a \cdot b$ определяется формулой

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n'} x_i y_j^{\rho_{ij}} \varepsilon_i \varepsilon_j, \tag{153}$$

$$a = x_0 + \sum_{i=1}^{n'} x_i \varepsilon_i, \quad b = y_0 + \sum_{j=1}^{n'} y_j \varepsilon_j. \tag{154}$$

Согласно (153), (154)

$$a \cdot b = x_0 y_0^* + x_0 \sum_{i=1}^{n'} x_i \varepsilon_i + y_0 \sum_{j=1}^{n'} y_j \varepsilon_j + \sum_{i=1}^{n'} x_i \varepsilon_i \cdot \sum_{j=1}^{n'} y_j \varepsilon_j. \tag{155}$$

Однако вследствие соотношения $\varepsilon_i \varepsilon_j = 0$ при $i > n$ или $j > n, i \neq j$, имеем, как легко показать

$$\sum_{i=1}^{n'} x_i \varepsilon_i \cdot \sum_{j=1}^{n'} y_j \varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i \cdot \sum_{j=1}^{n} y_i \varepsilon_i. \tag{156}$$

Следовательно,

$$a \cdot b = x_0 y_0^* + x_0 \sum_{i=1}^{n'} y_i \varepsilon_i + y_0 \sum_{j=1}^{n'} x_j \varepsilon_j + \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j \varepsilon_j = x_0 y_0^* + \sum_{l=1}^{n'} (x_0 y_l + y_0 x_l) y_l +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n'} \sum_{k=1}^{n'} (x_i y_k - x_k y_i) \varepsilon_l - \sum_{m=1}^{n'} x_m y_m^* \quad (i \neq k; \quad i, k \text{ не переставляются})$$

$$a \cdot b = x_0 y_0^* - (\tilde{Im}\, a, \tilde{Im}\, b) + \sum_{l=1}^{n'} (x_0 y_l + y_0 x_l + x_i y_k - x_k y_i) \varepsilon_l, \tag{157}$$

$$(\tilde{Im}\, a, \tilde{Im}\, b) = \sum_{m=1}^{n'} x_m y_m^*. \tag{158}$$

Далее,

$$(a \cdot b)^+ = x_0 y_0^* - (\tilde{Im}\, a, \tilde{Im}\, b) - \sum_{l=1}^{n'} (x_0 y_l + y_0 x_l + x_i y_k - x_k y_i) \varepsilon_l \tag{159}$$

(в третьем слагаемом каждому индексу l соответствует единственная пара индексов i, k).

Каждому квазикватерниону (назовем его правым) введем в соответствие квазикватернион с законом умножения

$$(a \cdot b)_l = \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{n'} x_i^{\rho_{ij}} y_j \varepsilon_i \varepsilon_j, \tag{153$'$}$$

где a и b определяются формулами (154). Согласно (153′) и (154)

$$\begin{gathered}(a \cdot b)_l = [(x_0 + \sum_{i=1}^{n'} x_i\varepsilon_i)(y_0 + \sum_{j=1}^{n'} y_j\varepsilon_j)]_l = x_0^* y_0 + x_0 \sum_{j=1}^{n'} y_j \varepsilon_j + y_0 \sum_{j=1}^{n'} x_j\varepsilon_j + \\ + \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j\varepsilon_j = x_0^* y_0 + \sum_{l=1}^{n'} (x_0 y_l + y_0 x_l)\varepsilon_l - (x,y)^*_{n'} + \sum_{l=1}^{n'} (x_i y_k - x_k y_i)\varepsilon_l,\end{gathered}$$

т. е.

$$(a \cdot b)_l = x_0^* y_0 - (x,y)^*_{n'} + \sum_{l=1}^{n'} (x_0 y_l + y_0 x_l + x_i y_k - x_k y_i)\varepsilon_l. \tag{160}$$

Для $(b^+ a^+)_l$ имеем, согласно (160),

$$b^+ a^+|_l = y_0^* x_0 - (y,x)^*_{n'} - \sum_{l=1}^{n'} (y_0 x_l + x_0 y_l - y_i x_k + y_k x_i)\varepsilon_l,$$

или

$$b^+ a^+|_l = y_0^* x_0 - (x,y)_{n'} - \sum_{l=1}^{n'} (y_0 x_l + x_0 y_l - y_i x_k + y_k x_i)\varepsilon_l. \tag{161}$$

где $(x,y)_{n'} = \sum\limits_{l=1}^{n'} x_l y_l^*$. Сравнивая (159) с (161), получим:

$$(a \cdot b)^+ = (b^+ a^+)_l. \tag{162}$$

В действительном пространстве формула (162) принимает обычный вид.

Нетрудно показать, что модули $|x|$ векторных квазикватернионов $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\varepsilon_i$ вследствие выполнения условия (152) и других условий являются нормами. Модули полных квазикватернионов вследствие того, что $|a||b| \neq |a \cdot b|$, нормами не являются. Вопрос о том, являются ли они псевдонормами, в статье не рассматривается. При умножении элементов $a \cdot b = (x_0 + \sum\limits_{i=1}^{n'} x_i\varepsilon_i)(y_0 + \sum\limits_{k=1}^{n'} y_k\varepsilon_k)$ применяется левый и правый дистрибутивные законы. Можно показать, что отсюда следуют дистрибутивные законы

$$(a+b)(c+d) = a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d. \tag{163}$$

Следовательно, рассмотренные квазикватернионы являются кольцами.

Все полученные ваше соотношения применимы и для $n < 3$, однако размерность квазикватернионов уже не равна $n(n-1)/2 + 1$.

4. Рассмотрим вопрос о делении для двух наиболее простых квазикватернионов при $n = 3$ и $n = 1$.

а) Начнем рассмотрение с квазикватерниона с левым умножением. Для квазикватернионов a и b имеем:

$$(a \cdot x)_l = b, \tag{164}$$

где $x = x_{l,l}$ – левое частное. Изменив обозначения, имеем:

$$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \tag{165}$$

$$b = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k, \tag{166}$$

$$x = x_{l,l} = x_0 + x_1 k + x_2 j + x_3 k. \tag{167}$$

Таким образом,

$$(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)(x_0 + x_1 k + x_2 j + x_3 k)|_l = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k, \tag{168$'$}$$

т. е.

$$a_0^* x_0 - a_1^* x_1 - a_2^* x_2 - a_3^* x_3 + (a_0 x_1 + a_1 x_0 + a_2 x_3 - a_3 x_2) i + (a_0 x_2 + a_2 x_0 + a_3 x_1 - a_1 x_3) j +$$
$$+ (a_3 x_0 + a_0 x_3 + a_1 x_2 - a_2 x_1) k = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k, \tag{168}$$

откуда получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_0^* x_0 - a_1^* x_1 - a_2^* x_2 - a_3^* x_3 = b_0 \\ a_1 x_0 + a_0 x_1 - a_3 x_2 - a_2 x_3 = b_1 \\ a_2 x_0 + a_3 x_1 + a_0 x_2 - a_1 x_3 = b_2 \\ a_3 x_0 - a_2 x_1 + a_1 x_2 - a_0 x_3 = b_3 \end{cases} \tag{169$'$}$$

Согласно формуле Крамера получим, опуская промежуточные вычисления

$$x_{l,l} = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k, \tag{167}$$

где

$$x_0 = \tfrac{1}{|a_0|^2+|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}\Big\{ b_0 a_0 + \tfrac{1}{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2}[b_1(a_1^* a_0^2 + |a_3|^2 a_1 + |a_2|^2 a_1 + a_0 a_2 a_3^* -$$
$$- a_0 a_2^* a_3 + |a_1|^2 a_1) + b_2(a_1^* a_3 a_0 - a_0 a_1 a_3^* + |a_2|^2 a_2 + |a_3|^2 a_2 + a_0^2 a_2^* + |a_1|^2 a_2) +$$
$$+ b_3(|a_1|^2 a_3 + a_0^2 a_3^* + |a_2|^2 a_3 + |a_3|^2 a_3 + a_1 a_0 a_2^* - a_0 a_2 a_1^*)]\Big\}, \tag{169}$$

$$x_1 = \tfrac{1}{|a_0|^2+|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}\Big\{ -b_0 a_1 + \tfrac{1}{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2}[b_1(|a_0|^2 a_0 - a_1 a_2 a_3^* + a_1 a_2^* a_3 + |a_3|^2 a_0 +$$
$$+ a_0^* a_1^2 + |a_2|^2 a_0) + b_2(|a_0|^2 a_3 + a_1^2 a_3^* + |a_2|^2 a_3 + |a_3|^2 a_3 - a_1 a_2^* a_0 + a_1 a_2 a_0^*) -$$
$$- b_3(a_0 a_1 a_3^* - a_0^* a_1 a_3 + |a_2|^2 a_2 + |a_3|^2 a_2 + |a_0|^2 a_2 + a_1^2 a_2^*)]\Big\}, \tag{170}$$

$$x_2 = \tfrac{1}{|a_0|^2+|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}\Big\{ -b_0 a_2 + \tfrac{1}{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2}[-b_1(|a_0|^2 a_3 + a_2^2 a_3^* + |a_1|^2 a_3 + |a_3|^2 a_3 -$$
$$- a_1 a_2 a_0^* + a_1^* a_2 a_0) + b_2(|a_0|^2 a_0 + a_1 a_2 a_3^* - a_1^* a_2 a_3 + a_0 |a_3|^2 + a_0^* a_2^2 + a_0 |a_1|^2) +$$
$$+ b_3(|a_0|^2 a_1 + a_1 |a_3|^2 + a_1^* a_2^2 - a_0 a_2 a_3^* + a_0^* a_2 a_3 + |a_1|^2 a_1)]\Big\}, \tag{171}$$

$$x_3 = \tfrac{1}{|a_0|^2+|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}\Big\{ -b_0 a_3 + \tfrac{1}{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2}[b_1(a_0^* a_3 a_1 + |a_2|^2 a_2 - a_1^* a_0 a_3 +$$
$$+ a_3^2 a_2^* + |a_0|^2 a_2 + |a_1|^2 a_2) - b_2(|a_0|^2 a_1 + |a_2|^2 a_1 + a_1^* a_3^2 + a_3 a_0 a_2^* - a_0^* a_2 a_3 + |a_1|^2 a_1) +$$
$$+ b_3(|a_0|^2 a_0 - a_1 a_3 a_2^* + a_1^* a_3 a_2 + a_0 |a_2|^2 + a_3^2 a_0^* + |a_1|^2 a_0)]\Big\}. \tag{172}$$

(Первый индекс в $x_{l,l}$ указывает характер деления (левое или правое), второй – характер умножения в квазикватернионе).

Аналогичные вычисления для $x_{r,l}$ дают:

$$x_{r,l} = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k, \tag{167}$$

где

$$x_0 = \tfrac{1}{|a_0|^2+|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}\Big\{b_0^* a_0 + \tfrac{1}{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2}[b_1(|a_0|^2 a_1^* + a_1|a_3|^2 + a_1|a_2|^2 - \\ -a_0a_2a_3^* + a_1|a_1|^2 + a_0a_2^*a_3) + b_2(-a_1^*a_3a_0 + a_0a_1a_3^* + |a_2|^2a_2 + |a_3|^2a_2 + |a_1|^2a_2 + a_0^2a_2^*) + \\ +b_3(|a_1|^2a_3 + a_0^2a_3^* + |a_2|^2a_3 + |a_3|^2a_3 + a_0a_2a_1^* - a_0a_2^*a_1)]\Big\}, \tag{173}$$

$$x_1 = \tfrac{1}{|a_0|^2+|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}\Big\{-a_1b_0^* + \tfrac{1}{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2}[b_1(|a_0|^2a_0 + a_1a_2a_3^* - a_1a_2^*a_3 + a_0|a_3|^2 + \\ +a_0|a_2|^2 + a_1^2a_0^*) - b_2(|a_0|^2a_3 + a_1^2a_3^* + |a_2|^2a_3 + |a_3|^2a_3 - a_1a_2a_0^* + a_1a_2^*a_0) + b_3(a_0^*a_3a_1 - \\ -a_0a_1a_3^* + |a_2|^2a_2 + |a_3|^2a_2 + |a_0|^2a_2 + a_1^2a_2^*)]\Big\}, \tag{174}$$

$$x_2 = \tfrac{1}{|a_0|^2+|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}\Big\{-b_0^*a_2 + \tfrac{1}{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2}[b_1(|a_0|^2a_3 + a_2^2a_3^* + |a_1|^2a_3 + |a_3|^2a_3 + \\ +a_1a_2a_0^* - a_1^*a_2a_0) + b_2(|a_0|^2a_0 - a_1a_2a_3^* + a_1^*a_2a_3 + |a_3|^2a_0 + a_2^2a_0^* + |a_1|^2a_0) - \\ -b_3(|a_0|^2a_1 + a_1|a_3|^2 + a_1^*a_2^2 + a_0a_2a_3^* - a_0^*a_2a_3 + |a_1|^2a_1)]\Big\}, \tag{175}$$

$$x_3 = \tfrac{1}{|a_0|^2+|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2}\Big\{-b_0^*a_3 + \tfrac{1}{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2}[-b_1(-a_0^*a_1a_3 + a_0a_1^*a_3 + |a_2|^2a_2 + \\ +a_3^2a_2^* + |a_0|^2a_2 + |a_1|^2a_2) + b_2(|a_0|^2a_1 + a_1|a_2|^2 + a_1^*a_3^2 - a_0a_3a_2^* + a_2a_3a_0^* + |a_1|^2a_1) + \\ +b_3(|a_0|^2a_0 + a_1a_3a_2^* - a_1^*a_3a_2 + a_0|a_2|^2 + a_0^*a_3^2 + |a_1|^2a_0)]\Big\}, \tag{176}$$

Далее, нетрудно показать, что:

1. $x_{l,r}$ получается из $x_{l,l}$ (формулы (169) – (172)) заменой в них b_0 на b_0^*.
2. $x_{r,r}$ получается из $x_{r,l}$ (формулы (173) – (176)) заменой в них b_0^* на b_0.

Из полученных формул следует, что деление (правое и левое) на квазикватернионы (правый или левый), рассмотренные выше, возможно только при $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$. Из этих формул также следует, что любое деление b_0 на a возможно при a, отличном от нуля.

Легко показать, что левая и правая единицы $e_{r,l}$, $e_{l,l}$, $e_{r,r}$, e_{lr} рассмотренных квазикватернионов не совпадают, а также, что

$$e_{r,l} = 1,\ e_{l,l} \neq 1,\ e_{l,r} = 1,\ e_{r,r} \neq 1. \tag{177}$$

Рассмотрим снова правое произведение квазикватернионов $a \cdot b$ (формула (81′)) в обозначениях a_k, b_k:

$$a \cdot b = a_0b_0^* - a_1b_1^* - a_2b_2^* - a_3b_3^* + (b_0a_1 + a_0b_1 + a_2b_3 - a_3b_2)i + \\ +(b_0a_2 + a_0b_2 + a_3b_1 - a_1b_3)j + (b_0a_3 + a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1)k. \tag{81″}$$

Точно так же

$$(a \cdot b)_l = a_0^*b_0 - a_1^*b_1 - a_2^*b_2 - a_3^*b_3 + (b_0a_1 + a_0b_1 + a_2b_3 - a_3b_2)i + \\ +(b_0a_2 + a_0b_2 + a_3b_1 - a_1b_3)j + (b_0a_3 + a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1)k. \tag{81‴}$$

Перейдем к рассмотрению указанных квазикватернионов с нулевыми коэффициентами при всех мнимых ортах, кроме одного (например i-го). Тогда имеем:

$$a \cdot b = a_0b_0^* - a_1b_1^* + (b_0a_1 + a_0b_1)i, \tag{178}$$

$$(a \cdot b)_l = a_0^* b_0 - a_1^* b_1 + (b_0 a_1 + a_0 b_1)i. \tag{179}$$

Получаются замкнутые алгебраические системы, соответственно с правым и левым умножением. Они неассоциативны и неальтернативны, однако

$$b \cdot a = b_0 a_0^* - b_1 a_1^* + (a_0 b_1 + b_0 a_1)i,$$

т. е.

$$b \cdot a = (a \cdot b)_l. \tag{180}$$

Рассмотрим вопрос о делении таких систем. Полагая в формулах (167), (169) – (172) и (173) – (176) a_2, b_2 и a_3, b_3 равным нулю, получим в результате вычислений

$$x_{l,l} = \frac{1}{|a_0|^2 + |a_1|^2}[a_0 b_0^* + a_1^* b_1 + (a_0^* b_1 - a_1 b_0)i], \tag{181}$$

$$x_{r,l} = \frac{1}{|a_0|^2 + |a_1|^2}[a_0 b_0^* + a_1^* b_1 + (a_0^* b_1 - a_1 b_0^*)i]. \tag{182}$$

Заменяя согласно сказанному выше b_0 на b_0^* в (181), получим:

$$x_{l,r} = \frac{1}{|a_0|^2 + |a_1|^2}[a_0 b_0^* + a_1^* b_1 + (a_0^* b_1 - a_1 b_0^*)]. \tag{183}$$

Точно так же замена в $x_{r,l}$ b_0^* на b_0 дает:

$$x_{r,r} = \frac{1}{|a_0|^2 + |a_1|^2}[a_0 b_0 + a_1^* b_1 + (a_0^* b_1 - a_1 b_0)i]. \tag{184}$$

Из формул (181) – (184) следует, что при $a \neq 0$ в такой системе всегда возможно деление, но $x_{l,l} \neq x_{r,l}$, и $x_{l,r} \neq x_{r,r}$.

Из формулы (180) также имеем:

$$x_{l,l} = x_{r,r}, \tag{185}$$

$$x_{r,l} = x_{l,r}, \tag{186}$$

что также следует из формул (181), (184) и из формул (182), (183). Отправляясь снова от кватернионов, рассмотрим гиперкомплексную систему той же размерности ($n = 4$) с несколько иными правилами умножения:

$$\begin{gathered} a \cdot b = a_0 b_0 - a_1 b_1^* - a_2 b_2^* - a_3 b_3^* + (a_0 b_1 + a_1 b_0^* + a_2 b_3 - a_3 b_2)i + \\ +(a_0 b_2 + a_2 b_0^* + a_3 b_1 - a_1 b_3)j + (a_0 b_3 + a_3 b_0^* + a_1 b_2 - a_2 b_1)k. \end{gathered} \tag{187}$$

Сопряжение определим по формуле

$$a^+ = a_0^* - a_1 i - a_2 j - a_3 k, \tag{188}$$

и соответственно

$$b^+ = b_0^* - b_1 i - b_2 j - b_3 k. \tag{188'}$$

Из формул (187) – (188′) следует:

$$a \cdot a^+ = a^+ \cdot a = |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2. \tag{189}$$

Легко показать, что

$$(a \cdot b)^+ = b^+ a^+. \tag{189'}$$

При

$$x = a_1 i + a_2 j + a_3 k, \tag{190}$$

$$y = b_1 i + b_2 j + b_3 k, \tag{190$'$}$$

получим, согласно (187) (при $a_0 = b_0 = 0$).

$$x \cdot y = -(x, y) + (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k,$$

$$|x \cdot y|^2 = |(x, y)|^2 + |a_2 b_3 - a_3 b_2|^2 + |a_3 b_1 - a_1 b_3|^2 + |a_1 b_2 - a_2 b_1|^2,$$

и после вычислений

$$|x \cdot y|^2 = |a_1|^2 |b_1|^2 + |a_2|^2 |b_2|^2 + |a_3|^2 |b_3|^2 + |a_2|^2 |b_3|^2 + |a_3|^2 |b_2|^2 + |a_3|^2 |b_1|^2 +$$

$$+ |a_1|^2 |b_3|^2 + |a_1|^2 |b_2|^2 + |a_2|^2 |b_1|^2 = |x|^2 |y|^2,$$

т. е.

$$|x \cdot y|^2 = |x|^2 |y|^2 \tag{152}$$

– равенство, соответствующее неравенству Шварца-Коши-Буняковского. Полагая в нашей системе $a_2 = a_3 = 0$, и соответственно $b_2 = b_3 = 0$, получим из формулы (187)

$$a \cdot b = a_0 b_0 - a_1 b_1^* + (a_0 b_1 + a_1 b_0^*) i. \tag{191}$$

Получается снова замкнутая система. Это – система "удвоенных" комплексных чисел, изоморфная действительным кватернионам [2]. Дальнейшее изучение подобных систем в статье проводиться не будет.

Заключение

1. Для кольца матриц получена псевдонорма, и найдено равенство, соответствующее неравенству

$$|AB| \leq |A| \cdot |B|$$

2. Получены равенства, соответствующее неравенствам Шварца-Коши-Буняковского. Для каждого евклидова комплексного n-мерного пространства ($n \geq 3$) вводятся некоторые $n' + 1$-мерные гиперкомплексные системы ($n' = n(n-1)/2$), позволяющие с их помощью записать указанные равенства. Несколько подробнее рассмотрены две гиперкомплексные 4-мерные системы, в действительной области переходящие в кватернионы.

Литература

[1] А. Г. Курош. *Лекции по общей алгебре*, ГИФМЛ, Москва, 1962.

[2] И. Л. Кантор, А. С. Солодовников.*Гиперкомплексные числа.* "Наука", Москва, 1973.

[3] А. Г. Курош. *Курс высшей алгебры.* ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1949.

[4] И. М. Гельфанд. *Лекции по линейной алгебре.* "Наука", ГИФМЛ, Москва, 1971.

[5] А. А. Элиович. *О норме бикватернионов и иных алгебр с центральным сопряжением.* "Гиперкомплексные числа в геометрии и физике", 2 (2) 2004.

[6] С. Ленг. *Алгебра.*Перевод с английского Е. С. Голода. Под редакцией А. И. Кострикина. "Мир", Москва, 1968.

Приложение

Вывод формул (4) – (7).

Для квадрата нормы произведения квазиунитарных матриц AB имеем:

$$|AB|^2 = (AB)\cdot(AB)^+ = AB\cdot B^+A^+ = |A|^2|B|^2$$

или

$$|AB|^2 = |A|^2|B|^2, \tag{4'}$$

откуда

$$|AB| = |A||B|. \tag{4}$$

Далее,

$$|A|^2 = AA^+ = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^*_{11} & a^*_{21} & \dots & a^*_{n1} \\ a^*_{12} & a^*_{22} & \dots & a^*_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^*_{1n} & a^*_{2n} & \dots & a^*_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \dots + |a_{1n}|^2 & 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ - - - - - - - - & - - - - - - - - \\ - - - - - - - - & - - - - - - - - \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 & |a_{n1}|^2 + |a_{n2}|^2 + \dots + |a_{nn}|^2 \end{array}\right).$$

Но каждый k-й диагональный элемент равен

$$|A|^2 = |A|^2_{kk} = |a_{k1}|^2 + |a_{k2}|^2 + \dots + |a_{kk}|^2$$

$$(|A|^2_{11} = |A|^2_{22} = \dots = |A|^2_{kk} = \dots)$$

и обращается в нуль только при

$$a_{k1} = a_{k2} = a_{k3} = \dots = a_{kn} = 0,$$

откуда следует:

$$|A| = 0 \ \text{ только при } \ A = 0. \tag{5}$$

Соотношение

$$|-A| = |A|. \tag{6}$$

очевидно.

Рассмотрим теперь сумму двух квазиунитарных матриц $A+B$, и потребуем, чтобы эта сумма также была квазиунитарной. Имеем:

$$|A+B|^2 = (A+B)(A^+ + B^+) = |A|^2 + |B|^2 + AB^+ + BA^+.$$

Условия квазиунитарности $A+B$, очевидно, запишутся следующим образом:

$$|A|^2 + |B|^2 + AB^+ + BA^+ \geq 0,$$

$$(A,B) = \frac{AB^+ + BA^+}{2} = c. \tag{7'}$$

где c действительно (коэффициент $\frac{1}{2}$ в левой части (7′) выбран для удобства).

(A,B) является скалярным произведением элементов (матриц) A и B, поскольку [4]:

1) оно является числом (в данном случае действительным);
2) $(A, A) = |A|^2 \geq 0, \quad (A, A) = 0$ только при $A = 0$;
3) $(A, B) = (B, A)$;
4) $(A + B, C) = (A, C) + (B, C)$;
5) $(\lambda A, B) = \lambda(A, B), \lambda$ – действительное число.

Вычислим теперь выражение

$$(|A| + |B|)^2 - |A + B|^2$$

Имеем:

$$(|A| + |B|)^2 - |A + B|^2 = |A|^2 + |B|^2 + 2|A||B| - |A|^2 - |B|^2 - 2(A, B) = 2(|A||B| - (A, B)).$$

Поскольку (A, B) действительно, то $(A, B) \leq |(A, B)|$ Следовательно,

$$(|A| + |B|)^2 - |A + B|^2 \geq 2(|A||B| - |(A, B)|). \tag{7''}$$

Но, согласно неравенству Шварца-Коши-Буняковского,

$$|(A, B)| \leq |A||B|.$$

Поэтому

$$(|A| + |B|)^2 - |A + B|^2 \geq 0, \quad (|A| + |B|)^2 \geq |A + B|^2,$$

откуда [6]

$$|A| + |B| \geq |A + B|. \tag{7}$$

Отметим, что совокупность квазиунитарных квазиунитарно суммируемых друг с другом матриц представляет собой действительное евклидово пространство, в котором, в частности, выполняется неравенство треугольника (7).