КОНСТРУИРОВАНИЕ ПСЕВДОРИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИИ БЕРВАЛЬДА-МООРА

Д. Г. Павлов

Московский Государственный Технический Университет им. Н. Э. Баумана
geom2004@mail.ru

Г. И. Гарасько

Всероссийский электротехнический институт, Москва
gri9z@mail.ru

Пространство ассоциативно-коммутативных гиперкомплексных чисел H_4, являясь четырехмерным метрическим финслеровым пространством с метрикой Бервальда-Моора, позволяет строить тензорные поля на основе аналитических функций переменной H_4, а также с нарушением таковой (аналитичности). Предложен способ построения метрического тензора четырехмерного псевдориманового пространства (пространства-времени) на основе четырежды контравариантного тензора тангенциального уравнения индикатрисы пространства Бервальда-Моора и Мировой функции. Пространство Бервальда-Моора оказывается тесно связанным с пространством Минковского. Нарушение аналитичности Мировой функции приводит к нетривиальному искривлению четырехмерного пространства-времени, в частности, нютоновскому потенциалу в нерелятивистском пределе.

1 Введение

Завораживающая красота теории функций комплексной переменной, в частности, выражающаяся в гармонии алгебраических фракталов на евклидовой плоскости, побуждает многих исследователей искать аналогичные числовые системы, элементам которых можно было бы ставить в соответствие уже точки не плоскости, а четырехмерного пространства-времени. В случае, если б такая деятельность увенчалась успехом, у нас появились бы реальные основания с доверием отнестись к знаменитому высказыванию Пифагора "всё сущее суть числа". При использовании для этой цели кватернионов [1], бикватернионов [2-4], октав [5] и т. п. были получены интересные результаты. Однако ни одна из теорий этих числовых систем, все же, пока не может сравниться даже с теорией относительно простых двухкомпонентных комплексных чисел. Основная причина этому достаточно печальному обстоятельству видится в отсутствии у рассматриваемых алгебр одного из основных математических свойств – коммутативности (а иногда даже и ассоциативности) умножения. Хотя авторы настоящей работы вполне осознают концептуальную обоснованность самых различных алгебр, все же, коммутативность умножения является неотъемлемым свойством всех основных числовых систем, среди которых: натуральные, целые, рациональные, действительные и комплексные числа. В конце концов, коммутативность и ассоциативность произведений входят в набор аксиом фундамента математики – арифметики и было бы, наверное, странно, если б вдруг оказалось, что самая естественная для описания нашего реального мира алгебраическая система, уже в своей основе не соответствовала бы правилам обычного счета.

В качестве одной из интересных числовых систем, свободной от отмеченного недостатка, может рассматриваться алгебра коммутативно-ассоциативных гиперкомплексных чисел, связанных с прямой суммой четырех действительных алгебр, далее для краткости обозначаемая H_4. Алгебра этих чисел изоморфна алгебре четырехмерных квадратных действительных диагональных матриц, а пространство, им соответствующее, является линейным финслеровым пространством с метрикой Бервальда-Моора (последнее обстоятельство было установлено авторами настоящей работы [6]). Следует отметить, что само финслерово пространство с метрикой Бервальда-Моора уже достаточно давно известно и частично исследовано [7 – 8].

Одним из важнейших обстоятельств, присущих данному пространству, является наличие в нем области параметров, в которой трехмерные расстояния (с точки зрения наблюдателя, использующего радарный метод их определения [9]) связаны с положительно определенной метрической функцией, в пределе переходящей в квадратичную форму [10]. Иными словами, трехмерный мир, увиденный глазами "живущего" в H_4 наблюдателя, с определенной точностью оказывается евклидовым. Более того, при переходе к релятивистским скоростям четырехмерные интервалы, разделяющие события в H_4, приближенно оказываются подчиняющимися соотношениям пространства Минковского [11]. Все это позволяет предположить, что и само пространство H_4, и связанная с ним финслерова геометрия с определенной степенью точности могут использоваться в качестве математических моделей реального пространства-времени, причем, возможно, даже более продуктивно, чем господствующие сегодня в физике псевдоримановы представления.

Любая гиперкомплексная алгебра полностью определяется заданием закона умножения элементов некоторого фиксированного базиса. В системе гиперкомплексных чисел H_4 имеется такой специальный базис e_1, e_2, e_3, e_4 (будем называть его изотропным), что

$$e_i e_j = p_{ij}^k e_k \qquad p_{ij}^k = \begin{cases} 1\,, \text{если } i = j = k\,, \\ 0\,, \text{во всех остальных случаях}\,. \end{cases} \tag{1}$$

Любая аналитическая функция в этом базисе имеет вид

$$F(X) = f^1(\xi^1)e_1 + f^2(\xi^2)e_2 + f^3(\xi^3)e_3 + f^4(\xi^4)e_4\,, \tag{2}$$

где

$$H_4 \ni X = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 + \xi^3 e_3 + \xi^4 e_4\,, \tag{3}$$

а f^i – четыре произвольные гладкие функции одного действительного переменного.

В пространстве H_4 существует еще один выделенный базис 1, j, k, jk (будем называть его ортогональным), который связан с изотропным базисом формулами

$$\left.\begin{aligned} 1 &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4\,, \\ j &= e_1 + e_2 - e_3 - e_4\,, \\ k &= e_1 - e_2 + e_3 - e_4\,, \\ jk &= e_1 - e_2 - e_3 + e_4\,, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где базисный элемент 1 – единица алгебры, а компонента аналитической функции переменной H_4 в этом базисе при единичном элементе определяется формулой

$$u = \frac{1}{4}\left[f^1(\xi^1) + f^2(\xi^2) + f^3(\xi^3) + f^4(\xi^4)\right]\,. \tag{5}$$

Если считать X радиус-вектором, то координатное пространство ξ^1, ξ^2, ξ^3, ξ^4 является пространством Бервальда-Моора с элементом длины

$$ds = \sqrt[4]{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 d\xi^4} \equiv \sqrt[4]{g_{ijkl} d\xi^i d\xi^j d\xi^k d\xi^l}\,, \tag{6}$$

где

$$g_{ijkl} = \begin{cases} \dfrac{1}{4!}\,, & \text{если все индексы разные,} \\ 0\,, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{7}$$

Тангенциальное уравнение индикатрисы для такой геометрии можно записать следующим образом:

$$g^{ijkl} p_i p_j p_k p_l - 1 = 0\,, \tag{8}$$

где

$$g^{ijkl} = \begin{cases} \dfrac{4^4}{4!}\,, & \text{если все индексы разные,} \\ 0\,, & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases} \tag{9}$$

$$p_i = \frac{g_{ijkl} d\xi^j d\xi^k d\xi^l}{(g_{mrst} d\xi^m d\xi^r d\xi^s d\xi^t)^{3/4}} \tag{10}$$

– компоненты обобщенного импульса, или обобщенные импульсы.

Имея в своем распоряжении тензоры p^k_{ij}, g_{ijkl}, g^{ijkl} и векторные поля аналитических функций $F_{(A)}(X)$ переменной H_4, можно конструировать метрические тензоры в четырехмерном пространстве-времени многими способами, например,

$$g_{ij}(\xi) = g_{ijkl} f^k_{(1)} f^l_{(2)}\,, \tag{11}$$

а затем изучать полученную риманову геометрию. Разнообразие этих способов как раз и является главным недостатком такого подхода.

Как известно [12], если определено тангенциальное уравнение индикатрисы как

$$\Phi(p;\xi) = 0\,, \tag{12}$$

то геодезические будут решениями канонической системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{\xi}^i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \cdot \lambda(p;\xi)\,, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^i} \cdot \lambda(p;\xi)\,, \tag{13}$$

$\lambda(p;\xi) \neq 0$ – произвольная гладкая функция, а точка над символами ξ^i и p_i означает производную по некоторому параметру эволюции τ.

2 Построение метрической функции псевдориманова пространства

Рассмотрим пространство, конформно связанное с пространством H_4, то есть пространство с элементом длины

$$ds' = \kappa(\xi) \cdot \sqrt[4]{g_{ijkl} d\xi^i d\xi^j d\xi^k d\xi^l}\,, \tag{14}$$

где $\kappa(\xi) > 0$ – некоторый коэффициент растяжения-сжатия, зависящий от точки пространства, скалярная функция.

Пусть в этом пространстве задана некоторая нормальная конгруенция геодезических (мировых линий), тогда существует скалярная функция $S(\xi)$ (см., например, [12]) такая, что ее гиперповерхности уровня трансверсальны этой нормальной конгруенции мировых линий и она является решением уравнения

$$g^{ijkl}\frac{\partial S}{\partial \xi^i}\frac{\partial S}{\partial \xi^j}\frac{\partial S}{\partial \xi^k}\frac{\partial S}{\partial \xi^l} = \kappa(\xi)^4\,, \tag{15}$$

причем обобщенные импульсы вдоль данной конгруенции мировых линий связаны с функцией $S(\xi)$ соотношениями

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial \xi^i}\,, \tag{16}$$

а уравнения мировых линий приобретают вид

$$\dot{\xi}^i = g^{ijkl}\frac{\partial S}{\partial \xi^j}\frac{\partial S}{\partial \xi^k}\frac{\partial S}{\partial \xi^l}\cdot\lambda(\xi)\,, \tag{17}$$

где $\lambda(\xi)\neq 0$.

В физике такую функцию $S(\xi)$ называют действием как функцией координат, а уравнение (15) – уравнением Гамильтона-Якоби. В работе [10] предложено называть функцию $S(\xi)$ *Мировой функцией*.

Если задана конгруенция мировых линий, то известно движение (эволюция) каждой точки пространства, в частности, известно поле скоростей в каждой точке пространства, но не известны энергетические характеристики материальных объектов (наблюдателей), соответствующих данной мировой линии. Знание Мировой функции $S(\xi)$ позволяет вычислять обобщенные импульсы p_i, с которыми связаны энергетические характеристики, и инвариантную энергетическую характеристику точки $\kappa(\xi)$, которая еще имеет смысл локального коэффициента растяжения-сжатия плоского пространства H_4.

Таким образом, если парадигмой нашего мировоззрения является классическая механика, то любая пара из трех объектов: Мировая функция, конгруенция мировых линий, финслерова геометрия – дают нам полное знание о Мире.

Построим дважды контравариантный тензор $g^{ij}(\xi)$ следующим образом:

$$g^{ij}(\xi) = \frac{1}{\kappa(\xi)^4}\cdot g^{ijkl}\frac{\partial S}{\partial \xi^k}\frac{\partial S}{\partial \xi^l}\,. \tag{18}$$

Так как

$$det(g^{ij}(\xi)) = -\frac{4^4}{3^3\kappa(\xi)^8}\neq 0\,, \tag{19}$$

то везде, где определена геометрия (14), можно построить тензор $g_{ij}(\xi)$ такой, что

$$g^{ik}(\xi)g_{kj}(\xi) = \delta^i_j\,, \tag{20}$$

$$g_{ij}(\xi) = 4\cdot\begin{pmatrix} -2\left(\frac{\partial S}{\partial \xi^1}\right)^2 & \frac{\partial S}{\partial \xi^1}\frac{\partial S}{\partial \xi^2} & \frac{\partial S}{\partial \xi^1}\frac{\partial S}{\partial \xi^3} & \frac{\partial S}{\partial \xi^1}\frac{\partial S}{\partial \xi^4} \\ \frac{\partial S}{\partial \xi^1}\frac{\partial S}{\partial \xi^2} & -2\left(\frac{\partial S}{\partial \xi^2}\right)^2 & \frac{\partial S}{\partial \xi^2}\frac{\partial S}{\partial \xi^3} & \frac{\partial S}{\partial \xi^2}\frac{\partial S}{\partial \xi^4} \\ \frac{\partial S}{\partial \xi^1}\frac{\partial S}{\partial \xi^3} & \frac{\partial S}{\partial \xi^2}\frac{\partial S}{\partial \xi^3} & -2\left(\frac{\partial S}{\partial \xi^3}\right)^2 & \frac{\partial S}{\partial \xi^3}\frac{\partial S}{\partial \xi^4} \\ \frac{\partial S}{\partial \xi^1}\frac{\partial S}{\partial \xi^4} & \frac{\partial S}{\partial \xi^2}\frac{\partial S}{\partial \xi^4} & \frac{\partial S}{\partial \xi^3}\frac{\partial S}{\partial \xi^4} & -2\left(\frac{\partial S}{\partial \xi^4}\right)^2 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Несомненно, что в том же самом координатном пространстве ξ^1, ξ^2, ξ^3, ξ^4 такой тензор $g_{ij}(\xi)$ определяет риманову или псевдориманову геометрию с элементом длины

$$ds'' = \sqrt{g_{ij}(\xi)d\xi^i d\xi^j}\,. \tag{22}$$

Непосредственно из построения тензора $g_{ij}(\xi)$ следует, что при замене геометрии (14) на геометрию (22) исходная конгруенция мировых линий и соответствующая этой когруенции Мировая функция $S(\xi)$ остаются теми же.

Таким образом, в нашей концепции одному и тому же Миру, то есть паре {Мировая функция; конгруенция мировых линий}, в общем случае соответствует некий класс жестко связанных между собой, но качественно различных финслеровых геометрий.

3 Условие аналитичности и пространство Минковского

Пусть Мировая функция $S(\xi)$ является компонентой некоторой аналитической функции переменной H_4 при единице в ортогональном базисе (4), то есть

$$S(\xi) = \frac{1}{4}\left[f^1(\xi^1) + f^2(\xi^2) + f^3(\xi^3) + f^4(\xi^4)\right]\,. \tag{23}$$

Тогда

$$g^{ijkl}\frac{\partial S}{\partial \xi^i}\frac{\partial S}{\partial \xi^j}\frac{\partial S}{\partial \xi^k}\frac{\partial S}{\partial \xi^l} = \frac{\partial f^1(\xi^1)}{\partial \xi^1}\frac{\partial f^2(\xi^2)}{\partial \xi^2}\frac{\partial f^3(\xi^3)}{\partial \xi^3}\frac{\partial f^4(\xi^4)}{\partial \xi^4} = \kappa(\xi)^4 > 0\,, \tag{24}$$

что приводит к ограничению на функции f^i:

$$\frac{\partial f^1(\xi^1)}{\partial \xi^1}\frac{\partial f^2(\xi^2)}{\partial \xi^2}\frac{\partial f^3(\xi^3)}{\partial \xi^3}\frac{\partial f^4(\xi^4)}{\partial \xi^4} > 0\,. \tag{25}$$

Из выражения (24) следует, что пространство с элементом длины (14) может быть получено из пространства с элементом длины (6) конформным преобразованием, то есть условие аналитичности Мировой функции можно трактовать, в некотором смысле, как условие конформной симметрии.

Построим по предложенному в предыдущем разделе алгоритму тензор $g_{ij}(\xi)$. Оказывается, что в той области, где функции f^i не имеют особенностей, всегда найдется такая система координат x^0, x^1, x^2, x^3, в которой элемент длины ds'' имеет вид

$$ds'' = \sqrt{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^3)^2 - (x^3)^2}\,. \tag{26}$$

Выпишем формулы, выражающие координаты x^0, x^1, x^2, x^3 через исходные координаты ξ^1, ξ^2, ξ^3, ξ^4:

$$\left.\begin{aligned}
x^0 &= \frac{1}{4}\left(f^1(\xi^1) + f^2(\xi^2) + f^3(\xi^3) + f^4(\xi^4)\right)\,,\\
x^1 &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(f^1(\xi^1) + f^2(\xi^2) - f^3(\xi^3) - f^4(\xi^4)\right)\,,\\
x^2 &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(f^1(\xi^1) - f^2(\xi^2) + f^3(\xi^3) - f^4(\xi^4)\right)\,,\\
x^3 &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(f^1(\xi^1) - f^2(\xi^2) - f^3(\xi^3) + f^4(\xi^4)\right)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Таким образом, чтобы получить нетривиальное искривление пространства-времени необходимо использовать Мировые функции с нарушенной конформной симметрией.

4 Ньютоновский потенциал

Покажем, что существуют Мировые функции, приводящие к нетривиальным псевдоримановым четырехмерным пространствам. Для этого рассмотрим функцию вида

$$S(\xi) = \frac{1}{4}\left(\xi^1 + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4\right) + \alpha \cdot \psi(\varrho)\,, \tag{28}$$

где α – параметр нарушения аналитичности Мировой функции (параметр нарушения конформной симметрии в пространстве H_4), ψ – произвольная функция одного аргумента

$$\varrho = \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2}\,, \tag{29}$$

а y^0, y^1, y^2, y^3 – координаты точки в ортогональном базисе 1, j, k, jk:

$$\left.\begin{aligned} y^0 &= \frac{1}{4}(\xi^1 + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4)\,,\\ y^1 &= \frac{1}{4}(\xi^1 + \xi^2 - \xi^3 - \xi^4)\,,\\ y^2 &= \frac{1}{4}(\xi^1 - \xi^2 + \xi^3 - \xi^4)\,,\\ y^3 &= \frac{1}{4}(\xi^1 - \xi^2 - \xi^3 + \xi^4)\,. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Тогда производные Мировой функции по координатам ξ^i можно выразить следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \xi^1} &= \frac{1}{4}\left[1 + \frac{\alpha}{\varrho}\frac{d\psi}{d\varrho}\left(y^1 + y^2 + y^3\right)\right]\,,\\ \frac{\partial S}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{4}\left[1 + \frac{\alpha}{\varrho}\frac{d\psi}{d\varrho}\left(y^1 - y^2 - y^3\right)\right]\,,\\ \frac{\partial S}{\partial \xi^3} &= \frac{1}{4}\left[1 + \frac{\alpha}{\varrho}\frac{d\psi}{d\varrho}\left(-y^1 + y^2 - y^3\right)\right]\,,\\ \frac{\partial S}{\partial \xi^4} &= \frac{1}{4}\left[1 + \frac{\alpha}{\varrho}\frac{d\psi}{d\varrho}\left(-y^1 - y^2 + y^3\right)\right]\,. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Вычислим компоненты метрического тензора в координатах y^0, y^1, y^2, y^3, используя инвариантность квадрата элемента длины

$$g_{ij}(\xi)d\xi^i d\xi^j = \tilde{g}_{ij}(y)dy^i dy^j \tag{32}$$

и приводя подобные, получим:

$$\tilde{g}_{00} = 1 - 3\alpha^2\left(\frac{d\psi}{d\varrho}\right)^2\,, \qquad \tilde{g}_{\beta\beta\_} = -3\left\{1 + \alpha^2\left(\frac{d\psi}{d\varrho}\right)^2\left[1 - \frac{4(y^\alpha)^2}{3\rho^2}\right]\right\}\,, \tag{33}$$

$$2\tilde{g_{0\beta}} = -4\left[\alpha\frac{d\psi}{d\varrho}\frac{y^\beta}{\varrho} + 3\alpha^2\left(\frac{d\psi}{d\varrho}\right)^2 \cdot \frac{y^1y^2y^3}{y^\beta\varrho^2}\right]\,, \tag{34}$$

$$2\tilde{g}_{\beta\gamma} = -4\left[3\alpha\frac{d\psi}{d\varrho}\frac{y^\delta}{\varrho} + \alpha^2\left(\frac{d\psi}{d\varrho}\right)^2 \cdot \frac{y^\beta y^\gamma}{\varrho^2}\right]\,, \tag{35}$$

где индексы β, γ, δ, пробегают значения $1,2,3$; $\beta \equiv \beta_-$, но по этой паре не ведется суммирование, в последней формуле индексы β, γ, δ все разные.

Если параметр $\alpha = 0$, то

$$(\tilde{g}_{ij}) = diag(1,-3,-3,-3)\,. \tag{36}$$

Это говорит о том, что реальные физические координаты x^0, x^1, x^2, x^3 пространства-времени связаны с координатами y^0, y^1, y^2, y^3 следующим образом:

$$x^0 = y^0\,, \qquad x^\beta = \sqrt{3}\cdot y^\beta\,. \tag{37}$$

Перейдем к физическим координатам x^0, x^1, x^2, x^3:

$$\tilde{g}_{ij}(y)dy^i dy^j = \bar{g}_{ij}(x)dx^i dx^j\,, \tag{38}$$

где

$$\bar{g}_{00} = \tilde{g}_{00}\,, \qquad \bar{g}_{0\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\tilde{g}_{0\beta}\,, \qquad \bar{g}_{\beta\gamma} = \frac{1}{3}\cdot\tilde{g}_{\beta\gamma}\,. \tag{39}$$

Введем обозначение

$$r = \sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2} \equiv \sqrt{3}\cdot\varrho\,, \tag{40}$$

тогда

$$\bar{g}_{00} = 1 - 9\alpha^2\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2, \qquad \bar{g}_{\beta\beta_-} = -\left\{1+3\alpha^2\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2\left[1-\frac{4(x^\alpha)^2}{3r^2}\right]\right\}, \tag{41}$$

$$2\bar{g_{0\beta}} = -4\left[\alpha\frac{d\psi}{dr}\frac{x^\beta}{r} + 3\sqrt{3}\alpha^2\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2\cdot\frac{x^1x^2x^3}{x^\beta r^2}\right], \tag{42}$$

$$2\bar{g}_{\beta\gamma} = -4\left[\sqrt{3}\alpha\frac{d\psi}{dr}\frac{x^\delta}{r} + \alpha^2\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2\cdot\frac{x^\beta x^\gamma}{r^2}\right]. \tag{43}$$

Метрический тензор $\bar{g}_{ij}(x) = \bar{g}_{ij}(x^1,x^2,x^3)$ зависит только от пространственных координат x^1,x^2,x^3, то есть соответствует стационарному гравитационному полю, стационарной Вселенной. Пробная частица массы m движется по геодезическим псевдориманого пространства с метрическим тензором $\bar{g}_{ij}(x^1,x^2,x^3)$.

Пусть в данной системе отсчета пробная частица движется со скоростью много меньше скорости света c,

$$\frac{dx^\beta}{dt} = v^\beta\,, \qquad |v^\beta| \ll c\,, \tag{44}$$

а сами гравитационные поля слабые, то есть на тех временных отрезках, на которых рассматривается движение частицы, условие $|v^\beta| \ll 1$ сохраняется. Для описания такого нерелятивистского движения пробной частицы в слабом гравитационном поле получим функцию Лагранжа L. Для этого разложим правую часть соотношения

$$L = -mc\cdot\frac{\sqrt{\bar{g}_{ij}(x^1,x^2,x^3)dx^i dx^j}}{dt} \tag{45}$$

с точностью до членов $\left(\dfrac{v}{c}\right)^2$ включительно:

$$L = -mc^2\sqrt{\bar{g}_{00}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{\bar{g}_{00}}\left(2\bar{g}_{0\beta}\frac{v^\beta}{c} + \bar{g}_{\beta\gamma}\frac{v^\beta v^\gamma}{c^2}\right)}\,, \tag{46}$$

$$L \simeq -mc^2\sqrt{\bar{g}_{00}} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2\bar{g}_{00}} \left(2\bar{g}_{0\beta}\frac{v^\beta}{c} + \bar{g}_{\beta\gamma}\frac{v^\beta v^\gamma}{c^2} \right) - \frac{1}{8\bar{g}_{00}^2}\left(2\bar{g}_{0\beta}\frac{v^\beta}{c} \right)^2 \right\}. \quad (47)$$

Если раскрыть скобки, то в правой части будет содержаться аддитивный член, являющийся полной производной по времени от некоторой функции $f(r)$, он будет линейно зависеть от компонент скорости и его можно опустить. Не меняя обозначение для функции Лагранжа, имеем

$$L \simeq -mc^2\sqrt{\bar{g}_{00}} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2\bar{g}_{00}} \cdot \bar{g}_{\beta\gamma}\frac{v^\beta v^\gamma}{c^2} - \frac{1}{8\bar{g}_{00}^2}\left(2\bar{g}_{0\beta}\frac{v^\beta}{c} \right)^2 \right\}. \quad (48)$$

Мы стремимся получить функцию Лагранжа вида

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} - U(\vec{x}), \quad (49)$$

где $U(\vec{x})$ – потенциальная энергия пробной частицы, $\vec{x} \equiv (x^1, x^2, x^3)$, $\vec{v} \equiv (v^1, v^2, v^3)$, $r^2 = \vec{x}^2$, $\vec{v}^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 \equiv v^2$. Для этого нам придется сделать некие предположения о связи параметра α со скоростью света:

$$\alpha = \frac{\nu}{c}, \quad \text{при} \quad c \to \infty \quad \alpha \to 0. \quad (50)$$

Кроме того, будем считать, что α того же (или более высокого порядка малости), что и отношение $\left|\frac{v}{c}\right|$. Тогда сохраним в формуле (48) лишь члены, неисчезающие при $c \to \infty$, имеем:

$$L \simeq -mc^2 + mc^2\frac{9}{2}\frac{\nu^2}{c^2}\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 + m \cdot \frac{v^1v^1 + v^2v^2 + v^3v^3}{2}. \quad (51)$$

Учитывая, что величина $(-mc^2)$ есть полная производная функции $(-mc^2 \cdot t)$ по времени, и опуская ее, получим

$$L \simeq \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{9m\nu^2}{2}\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2. \quad (52)$$

Пусть в начале координат трехмерного пространства x^1, x^2, x^3 покоится точечная масса M, тогда потенциальная энергия пробной частицы массы m, находящейся в точке x^1, x^2, x^3, равна

$$U(r) = -\gamma\frac{mM}{r}, \quad (53)$$

γ – гравитационная постоянная. Сравнивая формулы (49) и (52), получим уравнение для функции $\psi(r)$

$$\frac{9m\nu^2}{2}\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 = \gamma\frac{mM}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\psi}{dr} = \pm\frac{\sqrt{2\gamma M}}{3\nu}\frac{1}{r^{1/2}}. \quad (54)$$

Таким образом,

$$\psi(r) = \pm\frac{2\sqrt{2\gamma M}}{3\nu} \cdot r^{1/2} + \psi_0 \qquad (\psi_0 \text{ – постоянная}). \quad (55)$$

Итак, Мировая функция

$$S = x^0 \pm \frac{2\sqrt{2\gamma M}}{3c} \cdot r^{1/2} + C_0 \qquad (C_0 \text{ – постоянная}), \quad (56)$$

осуществляя конформное преобразование элемента длины плоского пространства Бервальда-Моора, индуцирует в пространстве Минковского псевдориманову геометрию, которая для нерелятивистской пробной частицы массы m дает уравнения движения кеплеровой задачи в поле притяжения гравитирующей точечной массы M, покоящейся в начале пространственных координат.

Более сложная Мировая функция, также, возможно, приводящая к стационарной Вселенной, имеет вид

$$S(\xi) = \frac{1}{4}\left(\xi^1 + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4\right)[1 + \alpha_1 \cdot \psi_1(\varrho)] + \alpha_2 \cdot \psi_2(\varrho)\,, \tag{57}$$

где α_A – параметры нарушения аналитичности Мировой функции (параметры нарушения конформной симметрии в пространстве H_4), ψ_A – произвольные функции одного аргумента ϱ (29), (30).

Заключение

Полученные в настоящей работе результаты позволяют сделать вывод о глубокой связи, существующей между геометриями Эйнштейна и финслеровыми пространствами с метрической функцией Бервальда-Моора. Удалось указать конкретное финслерово пространство с метрикой Бервальда-Моора, которое в пределе оказалось связанным с искривленным псевдоримановым пространством, имеющим ньютонов характер гравитационного потенциала. Этот факт указывает на принципиальную возможность более интересных построений, в частности, отыскание таких финслеровых пространств, чьими предельными приближениями окажутся известные релятивистские решения.

Литература

[1] Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А. Кватернионы в релятивистской физике. Минск, Наука, 1989.

[2] Ефремов А. П. Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, Vol 4, 200.

[3] Кассандров В. В. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **1**, Vol 4, 200.

[4] Казанова Г. От алгебры Клиффорда до атома водорода. М.: Платон, 1997.

[5] J. C. Baez. The octonions. // Bull. Amer. Mathem. Soc. **39: 2**, 145–205 (2002).

[6] Pavlov D. G. Hypercomplex Numbers, Associated Metric Spaces, and Extension of Relativistic Hyperboloid. ArXiv: gr-qc/0206004.

[7] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F.: Phys. Lett. A 244, N 4, (1988) 222.

[8] Bogoslovsky G. Yu., Goenner H. F.: Gen. Relativ. Gravit. 31, N 10, (1999) 1565.

[9] Пименов Р. И. Конструкции времени в естествознании: на пути к пониманию феномена времени. Часть 1. Междисциплинарное исследование. М.: Изд. Мос. Ун-та, 1996, с. 153 – 199.

[10] Гарасько Г. И., Павлов Д. Г. Трехмерные расстояния и модуль скорости в линейных финсеровых пространствах. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **3**, Vol 5, 200.

[11] Павлов Д. Г. Число и геометрия пространства-времени. В сб. Метафизика. Век XXI. Под ред. Ю. С. Владимирова. М.: Бином, 2006.

[12] Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. Изд. 2-е, ст. М.: Едиториал УРСС, 2003.