ОПИСАНИЕ ПРЕЦЕССИИ ТОМАСА ПСЕВДОКВАТЕРНИОНАМИ

Д. Е. Бурланков, Г. Б. Малыкин

Нижегородский Государственный Университет, Нижний Новгород,
bur@phys.unn.runnet.ru

Институт Прикладной Физики РАН, Нижний Новгород,
malykin@ufp.appl.sci-nnov.ru

При криволинейном движении тела в плоскости со скоростью, сравнимой со скоростью света, преобразованию Лоренца подвергаются лишь три его координаты и матрица преобразования оказывается трехпараметрической. Это дает возможность описания таких преобразований слегка модифицированными на псевдоевклидовость метрики кватернионами Гамильтона – псевдокватернионами. Определены их алгебраические свойства и связь с преобразованиями Лоренца в (2+1)-мерном пространстве Минковского.Проведено интегрирование псевдокватернионного дифференциального уравнения непрерывных преобразований при движении тела по круговой орбите, откуда получено выражение для величины прецессии Томаса.

Преобразования Лоренца при плоском движении

В специальной теории относительности для описания шестипараметрических преобразований Лоренца используются комплексные кватернионы Ньюмена - Пенроуза [1, 2]. Однако техника работы с ними исключительно сложна. В то же время ряд принципиальных задач специальной теории относительности имеет дело с плоским движением тела, при котором преобразованиям Лоренца подвергаются только две пространственные координаты и время, тогда как нормальная к плоскости движения координата остается неизменной. В этом случае мы имеем дело с трехпараметрическим преобразованиями Лоренца в $(2 + 1)$-мерном пространстве Минковского. Для описания таких преобразований не нужно вводить комплексные кватернионы, достаточно лишь слегка модернизировать технику кватернионов Гамильтона.

Мы в дальнейшем обозначаем скорость света в вакууме c, а для тела, движущегося со скоростью $\mathbf{v}$ примем стандартные обозначения:

$$\beta = \frac{v}{c}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1}$$

Псевдокватернионы

(2+1)-мерное пространство Минковского имеет диагональную метрику $(\gamma_{ij}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1)$.

Введем три псевдокватернионных орта η_0, η_1, η_2 с алгебраическими свойствами:

$$\eta_i\eta_j = -\gamma_{ij} - \varepsilon_{ijk}\gamma^{kl}\eta_l; \tag{2}$$

$$\eta_0^2 = -1;\ \eta_1^2 = \eta_2^2 = 1;$$

$$\eta_0\eta_1 = -\eta_1\eta_0 = \eta_2;$$

$$\eta_0\eta_2 = -\eta_2\eta_0 = -\eta_1;$$

$$\eta_2\eta_1 = -\eta_1\eta_2 = \eta_0.$$

Добавление единицы, коммутирующей со всеми ортами, приводит к алгебре псевдокватернионов

$$z = a \cdot 1 + t \cdot \eta_0 + x \cdot \eta_1 + y \cdot \eta_2 \tag{3}$$

с нормой (не положительно определенной)

$$|z|^2 = a^2 + t^2 - x^2 - y^2 \tag{4}$$

и обратным значением

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}(a \cdot 1 - t \cdot \eta_0 - x \cdot \eta_1 - y \cdot \eta_2).$$

Аналогично евклидову случаю, псевдокватернионы с единичной нормой описывают вращения и псевдовращения в пространстве Минковского (2+1). Если $(n_0,\, n_1,\, n_2)$ – положительно или отрицательно определенный единичный вектор ($\mathbf{n}^2 \equiv n_0^2 - n_1^2 - n_2^2 = \pm 1$), то кватернион

$$\xi(\mathbf{n}, \psi) = C(\psi) + S(\psi)(n_0 \cdot \eta_0 + n_1 \cdot \eta_1 + n_2 \cdot \eta_2) = C(\psi) + S(\psi)(\mathbf{n} \cdot \eta) \tag{5}$$

описывает вращение или псевдовращение относительно оси $\mathbf{n}$, при этом два последовательных (псевдо)поворота вокруг этой оси определяют поворот вокруг этой же оси:

$$(C(\psi_1) + S(\psi_1)(\mathbf{n} \cdot \eta))\,(C(\psi_2) + S(\psi_2)(\mathbf{n} \cdot \eta)) =$$

$$(C(\psi_1)C(\psi_2) + (\mathbf{n}^2)S(\psi_1)S(\psi_2)) + (C(\psi_1)S(\psi_2) + S(\psi_1)C(\psi_2))(\mathbf{n} \cdot \eta) =$$

$$C(\psi_1 + \psi_2) + S(\psi_1 + \psi_2)(\mathbf{n} \cdot \eta).$$

В зависимости от знака $\mathbf{n}^2$ величины C и S являются либо круговыми, либо гиперболическими косинусом и синусом.

При $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ – вращение в плоскости $(x,\, y)$ – синус S обращается в нуль впервые при $\psi = \pi$ – и при этом псевдокватернион описывает тождественное преобразование, т. е. поворот на 360°. Отсюда следует, что аргументом функций C и S является половинный угол. Этот вывод можно рассматривать и как результат аналитического продолжения кватернионов в евклидовом пространстве.

Преобразование самого псевдокватерниона z другим псевдокватернионом u производится в соответствии с выражением

$$z_u = u \cdot z \cdot u^{-1}. \tag{6}$$

Буст (преобразование Лоренца, определяемое только вектором скорости) вдоль направления, перпендикулярного пространственному двумерному единичному вектору $(n_x,\, n_y)$ – нормали к траектории – описывается псевдокватернионом

$$z_\chi = \mathrm{ch}\frac{\chi}{2} + \mathrm{sh}\frac{\chi}{2}(n_x\,\eta_1 + n_y\,\eta_2);$$

где функции χ можно выразить через γ:

$$\mathrm{sh}\frac{\chi}{2} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}; \quad \mathrm{ch}\frac{\chi}{2} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}; \quad \beta = \frac{v}{c} = \theta(\chi) = \frac{\mathrm{sh}(\chi)}{\mathrm{ch}(\chi)} = \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}; \tag{7}$$

С учетом этих соотношений буст, определяемый нормалью к траектории $n_x, = \cos\varphi,\ n_y = \sin\varphi$ определяется псевдокватернионом:

$$z_\chi = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} + \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}(\eta_1\,\cos\varphi + \eta_2\,\sin\varphi), \tag{8}$$

а поворот в плоскости $(x,\,y)$ на угол ψ – псевдокватернионом

$$z_\psi = \cos\frac{\psi}{2} + \eta_0\,\sin\frac{\psi}{2}.$$

Псевдокватернион с единичной нормой определяется тремя параметрами, в качестве которых можно выбрать $\gamma,\ \psi,\ \phi$:

$$z(\gamma,\psi,\phi) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}(\cos\psi + \eta_0\,\sin\psi) + \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}(\eta_1\,\cos\phi + \eta_2\,\sin\phi) \tag{9}$$

Мера в пространстве параметров выражается как модуль псевдокватерниона

$$dz = \frac{\partial z}{\partial\gamma}\,d\gamma + \frac{\partial z}{\partial\psi}\,d\psi + \frac{\partial z}{\partial\phi}\,d\phi =$$

$$\frac{\cos\psi\,d\gamma - 2\,(\gamma+1)\,\sin\psi\,d\psi}{2\sqrt{2}\,\sqrt{\gamma+1}} + \eta_0\,\frac{\sin\psi\,d\gamma + 2\,(\gamma+1)\,\cos\psi\,d\psi}{2\sqrt{2}\,\sqrt{\gamma+1}} + \tag{10}$$

$$\eta_1\,\frac{\cos\phi\,d\gamma - 2\,(\gamma-1)\,\sin\phi\,d\phi}{2\sqrt{2}\,\sqrt{\gamma-1}} + \eta_2\,\frac{\sin\phi\,d\gamma + 2\,(\gamma-1)\,\cos\phi\,d\phi}{2\sqrt{2}\,\sqrt{\gamma-1}}$$

Норма этого псевдокватерниона в соответствии с (4) и определяет метрику в пространстве параметров:

$$dl^2 = -\frac{d\gamma^2}{\gamma^2-1} + \frac{\gamma+1}{2}\,d\psi^2 + \frac{\gamma-1}{2}\,d\phi^2 = \tag{11}$$

$$-\left(\frac{d\chi}{2}\right)^2 + \mathrm{ch}^2\left(\frac{\chi}{2}\right)\,d\psi^2 + \mathrm{sh}^2\left(\frac{\chi}{2}\right)\,d\phi^2,$$

если представить $\gamma = \mathrm{ch}\chi$. Это – метрика пространства постоянной отрицательной кривизны, однако это не пространство Лобачевского, которое локально имеет евклидову метрику, а псевдориманово пространство с постоянной отрицательной кривизной.

Релятивистское вращение по окружности

Тело, вращающееся по окружности с постоянной скоростью v, испытывает центростремительное ускорение и пространство - время в бесконечно малой окрестности этого тела претерпевает бесконечно малое преобразование Лоренца (буст), определяемое выражением (8). Если тело на окружности достигло угла φ, изменение скорости равно $\mathbf{a}\,dt = \mathbf{n}\,v\,\omega\,dt = \mathbf{n}\,v\,d\varphi$, где $\mathbf{n}$ – вектор нормали, то псевдокватернион, описывающий это преобразование

$$w(\varphi) = 1 + \beta\,\frac{d\varphi}{2}\,(-\eta_1\,\sin\varphi + \eta_2\,\cos\varphi) = 1 + \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}\,\frac{d\varphi}{2}\,(-\eta_1\,\sin\varphi + \eta_2\,\cos\varphi). \tag{12}$$

При последующих поворотах угол меняется на величину $d\varphi$ и при повороте на конечный угол псевдокватернион преобразования определяется бесконечным произведением таких кватернионов, близких к единице с переменным углом φ.

Интегрирование проще провести, рассматривая действие этих близких к единице псевдокватернионов на псевдокватернион (9):

$$w(\varphi)\cdot z(\gamma,\psi,\phi) = \left(1+\frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}\,\frac{d\varphi}{2}\,(-\eta_1\,\sin\varphi+\eta_2\,\cos\varphi)\right)\cdot$$
$$\left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}(\cos\psi+\eta_0\,\sin\psi)+\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}(\eta_1\,\cos\phi+\eta_2\,\sin\phi)\right) =$$
$$\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\left(\left(\cos\psi-(1-\frac{1}{\gamma})\,\frac{d\varphi}{2}\,\sin(\varphi-\phi)\right)+\eta_0\,\left(\sin\psi+(1-\frac{1}{\gamma})\,\frac{d\varphi}{2}\,\cos(\varphi-\phi)\right)\right)+$$
$$\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\left(\eta_1\,\left(\cos\phi-(1+\frac{1}{\gamma})\,\frac{d\varphi}{2}\,\sin(\varphi-\psi)\right)+\eta_2\,\left(\sin\phi+(1+\frac{1}{\gamma})\,\frac{d\varphi}{2}\,\cos(\varphi-\psi)\right)\right) \quad (13)$$

При сдвиге тела по круговой траектории параметр γ не меняется, а могут меняться только углы ψ и ϕ. Сравним полученное выражение с приращением псевдокватерниона (9) при приращении этих углов:

$$z(\gamma,\psi+d\psi,\phi+d\phi) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\,((\cos\psi-d\psi\,\sin\psi)+\eta_0\,(\sin\psi+d\psi\,\cos\psi))+$$
$$\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\,(\eta_1\,(\cos\phi-d\phi\,\sin\phi)+\eta_2\,(\sin\phi+d\phi\,\cos\phi))\,.$$

Эти соотношения совпадают при

$$\psi+\phi=\varphi;\quad \psi=(1-\frac{1}{\gamma})\,\frac{\varphi}{2};\quad \phi=(1+\frac{1}{\gamma})\,\frac{\varphi}{2}. \quad (14)$$

Если эти значения подставить в (9) и обозначить

$$k = 1-\frac{1}{\gamma}, \quad (15)$$

то получится псевдокватернион, определяемый двумя параметрами – константой γ, определяемой скоростью движения тела, и углом φ, равномерно изменяющимся вдоль траектории:

$$z(\gamma,\varphi) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\,(\cos(k\,\varphi)+\eta_0\,\sin(k\,\varphi))+\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\,(\eta_1\,\cos((1-k)\varphi)+\eta_2\,\sin((1-k)\varphi)) =$$
$$\cos(k\,\varphi)\,z_n+\sin(k\,\varphi)\,z_\tau, \quad (16)$$

где

$$z_n = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}+\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\,(\eta_1\,\cos\varphi+\eta_2\,\sin\varphi)$$

– псевдокватернион нормали к траектории, а

$$z_\tau = \eta_0\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}+\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\,(\eta_1\sin\varphi-\eta_2\,\cos\varphi).$$

– псевдокватернион касательной. Оба этих вектора имеют единичный модуль.

Если $k = 0$, то $z(\gamma, \varphi) = z_n$ – указывает на нормаль, определяющую ускорение, – но при $k > 0$ ПК начинает поворачиваться между касательной и нормалью пропорционально углу сдвига тела по орбите с угловой частотой прецессии Томаса

$$\Omega_T = k\,\omega = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\omega, \tag{17}$$

если ω – угловая частота вращения по орбите.

Введенные выше псевдокватернионы являются подмножеством комплексных кватернионов Ньюмена и Пенроуза, введенных для описания четырехмерных преобразований Лоренца, но техника работы с последними несравненно сложнее.

Описание с помощью псевдокватернионов произведения конечных преобразований Лоренца, приводящих к т. наз. *вращению Вигнера*, приведено в нашей работе [3].

Прецессия Томаса

Выведенная величина коэффициента томасовой прецессии $k = 1 - \sqrt{1 - \beta^2}$ говорит о том, что с ростом линейной скорости вращения от нуля до скорости света (β от 0 до 1) коэффициент растет от нуля (при малых скоростях квадратично) до единицы, то есть в ультрарелятивистском пределе угловая скорость томасовой прецессии совпадает с угловой скоростью орбитального вращения.

Однако в литературе наиболее распространенным выражением (см., например, [4–6]) является

$$k_T = \gamma - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1, \tag{18}$$

приводящая для ультрарелятивистского движения ($\beta \to 1$) к бесконечной скорости вращения локального репера.

В препринте [3] показано, что эта ошибка возникла вследствие пренебрежения в матрице преобразования Лоренца преобразованием времени, которое при бесконечно малом преобразовании вроде бы не играет ни какой роли, однако существенно сказывается при интегрировании матриц в процессе конечного поворота по орбите.

Очень убедительным кажется вывод формулы (18) в работе Rhodes и Semon [7]. Авторы пытаются вывести величину ПТ путем переноса теоремы Гамильтона-Родригеса (см., например, [8, 9]) в псевдоевклидово пространство: при проведении преобразований Лоренца, при которых некоторая ось, *вокруг которой в процессе преобразований вращение отсутствует*, возвращается к своему первоначальному положению, результирующее преобразование Лоренца оказывается поворотом вокруг этой оси на угол, равный телесному углу, описанному направляющим вектором этой оси на псевдосфере.

Доказав эту теорему, авторы применяют ее к вектору, *касательному* к мировой линии вращающегося тела, конец которого описывает кривую в пространстве Лобачевского. Однако для этой оси условия теоремы о телесном угле неприменимы: она не является осью без вращения, так как в каждый момент именно вокруг нее и совершается томасов поворот.

Ось в трехмерном пространстве-времени, вокруг которой при движении тела по окружности не происходит вращения – это нормаль к траектории. Но она пространственно-подобна и ее направляющий вектор описывает кривую не на верхней полости двуполосного гиперболоида (римановой псевдосферы – пространства Лобачевского), которую рассматривают авторы, а на однополостном гиперболоиде (псевдоримановой псевдосфере), разрезая его на две половины бесконечной площади. Это можно прямо увидеть из метрики (11) параметров преобразования Лоренца: γ имеет отрицательную норму, а углы, изменяющиеся пропорционально углу сдвига по орбите φ, определяют одномерное пространство с положительной нормой, поэтому геометрия Лобачевского, которую авторы работы [7] применяют к описанию прецессии Томаса, прямого отношения к ней не имеет.

Выражение (17) для угловой скорости прецессии Томаса получено в ряде работ одного из авторов, в частности, в [10].

Авторы благодарны В. Ф. Чубу за обсуждение проблем описания прецессии Томаса гиперкомплексными числами и В. Л. Гинзбургу за внимание к проблеме.

Литература

[1] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. А. *Гравитация* (М.: Мир. Т. 1. 1977, С. 222 [Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A. Gravitation (San Francisco: W. H. Freeman and C^0, 1973)]

[2] Пенроуз Р., Риндлер В.. *Спиноры и пространство – время* (М.: Мир, 1987) [Penrose R., Rindler W. *Two-Spinors Calculus and Relativistic Fields* (Cambrige University Press. 1986)]

[3] Бурланков Д. Е. Малыкин, Г. Б. *Препринт ИПФ РАН N^o* 576, Н. Новгород (2000)

[4] Thomas L. H., Nature. 1926. V. 117, P. 514.

[5] Thomas L. H., Phil. Mag. 1927. S.7 . V. 3, N 13. P. 1-22.

[6] Мёллер К. *Теория относительности* (М.: Атомиздат, 1975) [Möller C., *The theory of relativity* (Oxford: Claredon press, 1952, 1972)].

[7] Rhodes J. A., Semon M. D., Am. J. Phys. 2004. **72**, P. 943

[8] Уиттекер Э. *Аналитическая динамика* (Ижевск: РХД, 1999) [E. T. Whittaker, *Tretise on the Analitical Dynamics of Particles and Rigid Bodies* (Cambrige, 1927)]

[9] Малыкин Г. Б. Харламов, С. А., УФН, 2003. Т. 173, N^o 9, С. 985

[10] Малыкин Г. Б., Пермитин Г. В., *Томасовская прецессия* Физическая энциклопедия, М.: Рос. энциклопедия, 1998. Т. 5, С. 123.

Thomas precession by pseudoquaternions

D. E. Burlankov, G. B. Malykin

Nizhny Novgorod State University, Russia,
Institute of Applied Physics RAS, Nizhny Novgorod, Russia

When a body moves curvilinearly in a plane with a velocity that is comparable to the velocity of light, only three coordinates of the body undergo Lorentz transformation, and the transformation matrix appears to be three-parametric. This enables description of these transformations by pseudoquaternions, Hamilton quaternions slightly modified for pseudo-Euclidean character of the metrics. Their algebraic properties and relation to the Lorentz transformations in a 2+1-dimensional Minkovsky space were determined. We integrated the pseudoquaternion differential equation of continuous transformations at a body's motion along a circular orbit and, as a result, obtained an expression for the value of the Thomas precession.