О КВАТЕРНИОНАХ
I. КОНЕЧНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ТОЧКИ

Ханукаев Ю.И. (khan@ptci.ru)

При поддержке РФФИ, *тема 2-07-90327,* реализованы два приложения QuaPalette и DualPalette к пакету MATHEMATICA 4, позволяющие проводить аналитические вычисления с комплексными и дуальными кватернионами.

Ниже приводится текст статьи http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/033.pdf дополненный примером построения дуальной матрицы поворота по конечному повороту и смещению тела и определения соответствующего дуального кватерниона.

Рассматривается техника кватернионов, как альтернатива векторного и матричного описания пространственных конечных перемещений твердого тела. Дано кватернионное описание преобразования Х.Лоренца

1. В 1853 году У.Гамильтон (1805-1865) ввел понятие кватернионов [1] как обобщение комплексных чисел на четырехмерное пространство. Аппарат кватернионов представляет собой пример четырехмерной алгебры, в которой для операции умножения однозначно определена обратная операция – деление. Особенность кватернионов состоит в правиле их умножения.

Итак, $$A = \{a_o, a_1, a_2, a_3\} = a_o + \tau_1 a_1 + \tau_2 a_2 + \tau_3 a_3, \qquad a \in R. \qquad (1.1)$$

Операции умножения отражают возведение во вторую степень мнимой единицы и векторное перемножение элементов базиса декартовой системы координат:

$$\begin{array}{ll} & \tau_1 \circ \tau_2 = \tau_3, \quad \tau_2 \circ \tau_1 = -\tau_3, \\ \tau_1^{\,2} = \tau_2^{\,2} = \tau_3^{\,2} = -1, & \tau_2 \circ \tau_3 = \tau_1, \quad \tau_3 \circ \tau_2 = -\tau_1, \\ & \tau_3 \circ \tau_1 = \tau_2, \quad \tau_1 \circ \tau_3 = -\tau_2. \end{array} \qquad (1.2)$$

Таким образом, имеет место гиперкомплексное пространство

a_o – скалярная часть кватерниона,

$\overline{a} = a_o + \tau_1 a_1 + \tau_2 a_2 + \tau_3 a_3$ – векторная часть кватерниона.

Операции перемножения мнимых единиц позволяют записать

$$C = A \circ B = a_o b_o - (\overline{a} \cdot \overline{b}) + a_o \overline{b} + b_o \overline{a} + (\overline{a} \times \overline{b}). \qquad (1.3)$$

Отсюда видно, что перемножение кватернионов не коммутативно. В скалярной и матричной форме имеем

$$\begin{aligned} c_o &= a_o b_o - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3, \\ c_1 &= a_o b_1 + b_o a_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2, \\ c_2 &= a_o b_2 + b_o a_2 + a_3 b_1 - a_1 b_3, \\ c_3 &= a_o b_3 + b_o a_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1, \end{aligned} \qquad c = A \cdot b = B \cdot a, \qquad (1.4)$$

где $$A = \begin{pmatrix} a_o & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_o & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_o & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_o \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_o & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ b_1 & b_o & b_3 & -b_2 \\ b_2 & -b_3 & b_o & b_1 \\ b_3 & b_2 & -b_1 & b_o \end{pmatrix} \qquad (1.5)$$

Матрицы A и B ортогональны при условии $\sum_{i=0}^{3} a_i^2 = 1$, $\sum_{i=0}^{3} b_i^2 = 1$, то есть имеем дело с четырехмерными матрицами поворота типа

$$A_R = \begin{pmatrix} \lambda_o & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_o & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_o & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_o \end{pmatrix}, \quad B_R = \begin{pmatrix} \lambda_o & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_o & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_o & \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_o \end{pmatrix}. \qquad (1.6)$$

Произведение $A_R \cdot B_R{}^T = \Lambda_R$ коммутативно и также дает ортогональную матрицу

$$\Lambda_R = \begin{pmatrix} \sum \lambda_i{}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_o{}^2 + \lambda_1{}^2 - \lambda_2{}^2 - \lambda_3{}^2 & 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_o\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_o\lambda_2) \\ 0 & 2(\lambda_2\lambda_1 + \lambda_o\lambda_3) & \lambda_o{}^2 - \lambda_1{}^2 + \lambda_2{}^2 - \lambda_3{}^2 & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_o\lambda_1) \\ 0 & 2(\lambda_3\lambda_1 - \lambda_o\lambda_2) & 2(\lambda_3\lambda_2 + \lambda_o\lambda_1) & \lambda_o{}^2 - \lambda_1{}^2 - \lambda_2{}^2 + \lambda_3{}^2 \end{pmatrix}, \qquad (1.7)$$

которая поворачивает векторную часть кватерниона, оставляя неизменной его скалярную часть. Матрицы A_R и B_R выделяют между ортогональными базисами $\mathbf{E}_o, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ и $\mathbf{e}_o, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ортогональный базис $\mathbf{d}_o, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$: $\mathbf{E} = A_R \mathbf{d}$, $\mathbf{e} = B_R \mathbf{d}$, $\mathbf{E} = \Lambda_R \mathbf{e}$.

По аналогии с комплексными числами вводится понятия сопряженного кватерниона, нормы кватерниона и обратного кватерниона:

$\widetilde{A} = a_o - \overline{a}$ - кватернион, сопряженный кватерниону $A = a_o + \overline{a}$,

$\|A\| = A \circ \widetilde{A} = \widetilde{A} \circ A = a_o{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2$ – норма кватерниона A,

$A^{-1} = \dfrac{\widetilde{A}}{\|A\|}$ – кватернион обратный A.

Операции сопряжения и определения нормы обладают следующими свойствами: $C = A \circ B$, $\widetilde{C} = \widetilde{B} \circ \widetilde{A}$, $\|C\| = C \circ \widetilde{C} = A \circ B \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{A} = \|A\| \cdot \|B\|$.

Если кватернион нормирован, то обратный кватернион равен сопряженному кватерниону. Операция деления определяется как умножение на обратный кватернион $A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = 1$.

Требование $\lambda_o{}^2 + \lambda_1{}^2 + \lambda_2{}^2 + \lambda_3{}^2 = 1$, обеспечивающее ортогональность матриц A_R и B_R (1.6), будет выполнено, если ввести параметризацию

$$\lambda_i = \frac{q_i}{\sqrt{q_o{}^2 + q_1{}^2 + q_2{}^2 + q_3{}^2}}, \quad i = 0,1,2,3.$$

Каждый кватернион определяет некоторое положительное число, равное норме кватерниона, единичный вектор $\overline{\tau} = \tau_1\alpha_1 + \tau_2\alpha_2 + \tau_3\alpha_3$, $\overline{\tau}^2 = -1$, где $\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \alpha_3{}^2 = 1$ и угол φ. Соотношения между этими величинами выражается формулой $U = \sqrt{\|U\|}\left(\cos\dfrac{\varphi}{2} + \overline{\tau}\sin\dfrac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\|U\|}\exp\left(\overline{\tau}\,\dfrac{\varphi}{2}\right)$. (1.8)

Представление кватерниона (1.8) аналогично представлению комплексного числа $z = r\exp(i\varphi)$, что позволяет рассматривать функции комплексного переменного как неразвернутые функции кватерниона. Точка мнимой оси разворачивается в плоскость трехмерного пространства $i = \tau_1\alpha_1 + \tau_2\alpha_2 + \tau_3\alpha_3$, $iy = \dfrac{U - \widetilde{U}}{2}$.

2. Свойство (1.7) матриц (1.6) позволяет использовать кватернионы для описания вращения твердого тела – трехмерной декартовой системы координат. Для этого полагают, что радиус-вектор **r** принадлежит четырехмерному пространству $\bar{r} \in H$, тогда отображение $H \to H$ по правилу

$$R = L \circ r \circ \widetilde{L}, \qquad \|L\| = 1 \tag{2.1}$$

эквивалентно преобразованию поворота. Проведем вычисления

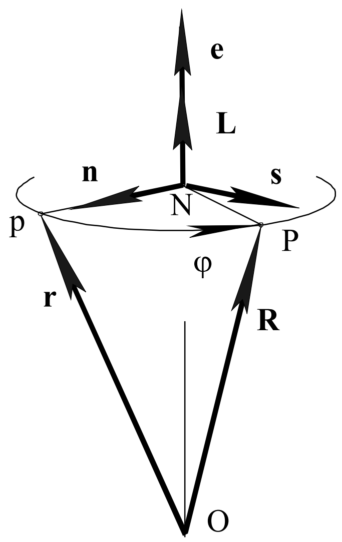
$$\begin{aligned} R &= (\lambda_o + \bar{\lambda}) \circ (r_o + \bar{r}) \circ (\lambda_o - \bar{\lambda}) = \sum \lambda_i^2 r_o + (\lambda_o + \bar{\lambda}) \circ \bar{r} \circ (\lambda_o - \bar{\lambda}) = \\ &= (\lambda_o^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) r_o + (-\bar{\lambda} \cdot \bar{r} + \lambda_o \bar{r} + \bar{\lambda} \times \bar{r}) \circ (\lambda_o - \bar{\lambda}) = \\ &= (\lambda_o^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) r_o + \bar{r}(\lambda_o^2 - \bar{\lambda}^2) + 2\bar{\lambda}(\bar{\lambda} \cdot \bar{r}) + 2\lambda_o \bar{\lambda} \times \bar{r}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

В скалярной форме имеем $R_o = (\lambda_o^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) r_o$,

$$\begin{aligned} R_1 &= (\lambda_o^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) r_1 + 2\lambda_1(\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3) + 2\lambda_o(\lambda_2 r_3 - \lambda_3 r_2) = \\ &= (\lambda_o^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) r_1 + 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_o\lambda_3) r_2 + 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_o\lambda_2) r_3, \\ R_2 &= (\lambda_o^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) r_2 + 2\lambda_2(\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3) + 2\lambda_o(\lambda_3 r_1 - \lambda_1 r_3) = \\ &= 2(\lambda_2\lambda_1 + \lambda_o\lambda_3) r_1 + (\lambda_o^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2) r_2 + 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_o\lambda_1) r_3, \\ R_3 &= (\lambda_o^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) r_3 + 2\lambda_3(\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3) + 2\lambda_o(\lambda_1 r_2 - \lambda_2 r_1) = \\ &= 2(\lambda_3\lambda_1 - \lambda_o\lambda_2) r_1 + 2(\lambda_3\lambda_2 + \lambda_o\lambda_1) r_2 + (\lambda_o^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2) r_3 \end{aligned}$$

или в матричном виде $R = \Lambda \cdot r$, где $\Lambda -$ матрица (1.7). Норма кватерниона и норма его векторной части сохраняются.

Векторная часть преобразования (2.2) может быть получена прямым геометрическим построением.



При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси точки тела описывают окружности, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси вращения, а радиус-вектор **r** любой точки с началом на оси вращения описывает коническую поверхность и преобразуется в вектор **R**. Поворот вокруг оси, совпадающей по направлению с единичным вектором $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 a_1 + \mathbf{e}_2 a_2 + \mathbf{e}_3 a_3$, на угол φ можно определить скаляром $\lambda_o = \cos\dfrac{\varphi}{2}$ и вектором

$$\mathbf{L} = \mathbf{e}\sin\frac{\varphi}{2} = \mathbf{e}_1\lambda_1 + \mathbf{e}_2\lambda_2 + \mathbf{e}_3\lambda_3,$$

$$\lambda_i = \alpha_i \sin\frac{\varphi}{2}, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1.$$

Величины λ_i, $i = 0,1,2,3$ называются параметрами Эйлера, которые можно считать прямоугольными декартовыми координатами точки в четырехмерном пространстве. Точки на гиперсфере $\lambda_o^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ определяют конечное положение тела. Выразим матрицу поворота через параметры Эйлера.

Пусть N общее основание перпендикуляров, опущенных из точек p и P на вектор $\mathbf{L}$. Единичный вектор вдоль отрезка Np обозначим через $\mathbf{n}$ и введем единичный вектор $\mathbf{s} = \mathbf{e} \times \mathbf{n}$. Разложим вектор $\mathbf{R}$ по трем взаимно ортогональным направлениям $\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{s}$. $\mathbf{R} = \mathbf{e}ON + \mathbf{n}NP\cos\varphi + \mathbf{s}NP\sin\varphi$,

где $ON = \mathbf{e} \cdot \mathbf{r}$, $NP = Np$, $\mathbf{n}Np = \mathbf{r} - \mathbf{e}ON$, $\mathbf{s}NP = \mathbf{e} \times \mathbf{n}Np = \mathbf{e} \times \mathbf{r}$ и, значит,

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}\cos\varphi + \mathbf{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r})(1-\cos\varphi) + (\mathbf{e}\times\mathbf{r})\sin\varphi =$$

$$= \mathbf{r}\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) + 2\mathbf{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r})\sin^2\frac{\varphi}{2} + 2(\mathbf{e}\times\mathbf{r})\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} =$$

$$= \mathbf{r}\left(\lambda_o^2 - \mathbf{L}^2\right) + 2\mathbf{L}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{r}) + 2\lambda_o(\mathbf{L}\times\mathbf{r}). \qquad (2.3)$$

Это выражение совпадает с векторной частью (2.2).

Проведенное построение показывает, что преобразование $R = L \circ r \circ \widetilde{L} = \Lambda \cdot r$ есть поворот вектора $\mathbf{r}$ в положительную сторону вокруг оси $\mathbf{e}$, либо изменение описания вектора $\mathbf{r}$ при повороте в противоположную сторону системы координат.

Аналогично, преобразование $r = \widetilde{L} \circ R \circ L = \Lambda^T \cdot R$ есть поворот вектора $\mathbf{R}$ в отрицательную сторону, либо изменение описания вектора $\mathbf{R}$ при повороте системы координат в положительную сторону.

Формуле (2.3) можно придать другой вид введением вектора конечного поворота

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}\,tg\frac{\varphi}{2} \qquad (2.4)$$

Равенства $\mathbf{s}NP = \mathbf{e}\times\mathbf{n}Np = \mathbf{e}\times\mathbf{r}$, $ON = \mathbf{e}\cdot\mathbf{r}$, $\mathbf{r} = \mathbf{e}ON + \mathbf{n}Np$ или $-\mathbf{n}Np = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e} - \mathbf{r} = \mathbf{e}\times(\mathbf{e}\times\mathbf{r})$ позволяют записать исходное выражение $\mathbf{R} = \mathbf{e}ON + \mathbf{n}NP\cos\varphi + \mathbf{s}NP\sin\varphi$ в виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{e}ON + \mathbf{n}Np\frac{1 - tg^2\frac{\varphi}{2}}{1 + tg^2\frac{\varphi}{2}} + (\mathbf{e}\times\mathbf{r})\frac{2tg\frac{\varphi}{2}}{1 + tg^2\frac{\varphi}{2}} = \mathbf{r} + \mathbf{e}\times(\mathbf{e}\times\mathbf{r})\frac{2tg^2\frac{\varphi}{2}}{1 + tg^2\frac{\varphi}{2}} + (\mathbf{e}\times\mathbf{r})\frac{2tg\frac{\varphi}{2}}{1 + tg^2\frac{\varphi}{2}}$$

Получили формулу Родрига (1794-1851) $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \dfrac{2\mathbf{F}\times(\mathbf{r} + (\mathbf{F}\times\mathbf{r}))}{1 + \mathbf{F}^2}$ (2.5)

Кватернионы поворота, записанные в виде $N = \nu_o(1 + \overline{\nu}/\nu_o) = \nu_o(1 + \overline{F}_\nu)$,

$$L = \lambda_o(1 + \overline{\lambda}/\lambda_o) = \lambda_o(1 + \overline{F}_\lambda), \quad M = \mu_o(1 + \overline{\mu}/\mu_o) = \mu_o(1 + \overline{F}_\mu)$$

устанавливают также связь между векторами конечного поворота

$$\mathbf{F}_\nu = \mathbf{e}_\nu\,tg\frac{\varphi_\nu}{2}, \qquad \mathbf{F}_\lambda = \mathbf{e}_\lambda\,tg\frac{\varphi_\lambda}{2}, \qquad \mathbf{F}_\mu = \mathbf{e}_\mu\,tg\frac{\varphi_\mu}{2},$$

$$N = \nu_o(1 + \overline{F}_\nu) = M \circ L = \mu_o(1 + \overline{F}_\mu) \circ \lambda_o(1 + \overline{F}_\lambda) = \mu_o\lambda_o(1 - \overline{F}_\mu \cdot \overline{F}_\lambda + \overline{F}_\mu + \overline{F}_\lambda + \overline{F}_\mu \times \overline{F}_\lambda) =$$

$$= \mu_o\lambda_o(1 - \overline{F}_\mu \cdot \overline{F}_\lambda)\left(1 + \frac{\overline{F}_\mu + \overline{F}_\lambda + \overline{F}_\mu \times \overline{F}_\lambda}{1 - \overline{F}_\mu \cdot \overline{F}_\lambda}\right).$$

Из этого равенства получаем правило сложения векторов поворота

$$\mathbf{F}_\nu = \frac{\mathbf{F}_\mu + \mathbf{F}_\lambda + \mathbf{F}_\mu \times \mathbf{F}_\lambda}{1 - \mathbf{F}_\mu \cdot \mathbf{F}_\lambda}, \qquad \nu_o = \mu_o \lambda_o \left(1 - \mathbf{F}_\mu \cdot \mathbf{F}_\lambda\right). \tag{2.6}$$

3. Аппарат кватернионов может быть использован для описания метрики Г.Минковского (1864-1909), инвариантной относительно преобразования Х.Лоренца (1853-1928). Обозначим какое-либо событие в пространстве-времени кватернионом $X = X_o + \tau_\alpha X_\alpha$, где $X_o = icT$, $T-$ время, $c-$ скорость света (фундаментальная постоянная), $X_\alpha -$ декартовы координаты точки. Интервал между двумя событиями метрики Минковского определяется формулой $s^2 = x \circ \widetilde{x} = X \circ \widetilde{X} = S^2$. Результаты измерений одного и того же события, наблюдаемого двумя наблюдателями s и S, связаны преобразованием Лоренца

$$\overline{r}_\parallel = \left(\overline{R}_\parallel - \overline{V}T\right)\gamma, \quad \overline{r}_\perp = \overline{R}_\perp, \quad t = \left(T - \frac{\overline{V} \cdot \overline{R}}{c^2}\right)\gamma, \quad \gamma = 1\Big/\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\ , \tag{3.1}$$

оставляющим инвариантным интервал

$$s^2 = \overline{r}_\parallel^{\,2} + \overline{r}_\perp^{\,2} - c^2 t^2 = \overline{R}_\parallel^{\,2} + \overline{R}_\perp^{\,2} - c^2 T^2 = S^2.$$

Формально преобразование Лоренца есть “жесткое” преобразование пространства-времени в себя и описывается ортогональной матрицей S: $x_\alpha = S_{\alpha\beta} X_\beta$. Например, при движении вдоль оси OX_1

$$S = \begin{pmatrix} ch\psi & -ish\psi & 0 & 0 \\ ish\psi & ch\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -i\gamma V/c & 0 & 0 \\ i\gamma V/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Рассмотрим преобразование $$L \circ R \circ \widetilde{L}^*, \tag{3.3}$$

где $R = icT + \tau_1 X_1 + \tau_2 X_2 + \tau_3 X_3$, $L = \cos\frac{i\psi}{2} + \tau_1 \sin\frac{i\psi}{2} = ch\frac{\psi}{2} + \tau_1\, ish\frac{\psi}{2}$.

Запишем в матричном виде произведение

$$L \circ R = \lambda_o X_o - \overline{\lambda} \cdot \overline{X} + \lambda_o \overline{X} + X_o \overline{\lambda} + \overline{\lambda} \times \overline{X} =$$

$$= \left(\lambda_o X_o - \lambda_1 X_1 - \lambda_2 X_2 - \lambda_3 X_3\right) + \tau_1\left(\lambda_1 X_o + \lambda_o X_1 - \lambda_3 X_2 + \lambda_2 X_3\right) +$$

$$+ \tau_2\left(\lambda_2 X_o + \lambda_3 X_1 + \lambda_o X_2 - \lambda_1 X_3\right) + \tau_3\left(\lambda_3 X_o - \lambda_2 X_1 + \lambda_1 X_2 + \lambda_o X_3\right).$$

В произведении кватернионов $L \circ R$ первому сомножителю соответствует квадратная матрица, а второму – матрица столбец

$$L \circ R \to \begin{pmatrix} \lambda_o & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_o & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_o & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_o \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_o \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = A_Z R. \tag{3.4}$$

Далее запишем в явном виде произведение

$$R \circ \widetilde{L}^* = \lambda_o^* X_o + \overline{\lambda}^* \cdot \overline{X} + \lambda_o^* \overline{X} - X_o \overline{\lambda}^* + \overline{\lambda}^* \times \overline{X} =$$

$$= \left(\lambda_o^* X_o + \lambda_1^* X_1 + \lambda_2^* X_2 + \lambda_3^* X_3\right) + \tau_1\left(-\lambda_1^* X_o + \lambda_o^* X_1 - \lambda_3^* X_2 + \lambda_2^* X_3\right) +$$

$$+ \tau_2\left(-\lambda_2^* X_o + \lambda_3^* X_1 + \lambda_o^* X_2 - \lambda_1^* X_3\right) + \tau_3\left(-\lambda_3^* X_o - \lambda_2^* X_1 + \lambda_1^* X_2 + \lambda_o^* X_3\right),$$

$$R \circ \widetilde{L}^* \to \begin{pmatrix} \lambda_o & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_o & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_o & \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_o \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_o \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = B_Z R \,. \qquad (3.5)$$

В последнем равенстве учтено, что $\lambda_o^* = \lambda_o$ и $\lambda_\alpha^* = -\lambda_\alpha, \quad \alpha = 1,2,3$.

По сравнению с выражением (3.4) транспонированным оказался блок, соответствующий векторной части. Это понятно: кватернионное и комплексное сопряжения в рассматриваемом случае совпадают, то есть $\widetilde{L}^* = L$, а произведение $R \circ \widetilde{L}^* = R \circ L$ отличается от произведения $L \circ R$ знаком векторного произведения.

Вычислим результирующую матрицу преобразования

$$S = A_Z \cdot B_Z = B_Z \cdot A_Z = \begin{pmatrix} 2\lambda_o^2 - 1 & -2\lambda_o\lambda_1 & -2\lambda_o\lambda_2 & -2\lambda_o\lambda_3 \\ 2\lambda_1\lambda_o & 1-2\lambda_1^2 & -2\lambda_1\lambda_2 & -2\lambda_1\lambda_3 \\ 2\lambda_2\lambda_o & -2\lambda_2\lambda_1 & 1-2\lambda_2^2 & -2\lambda_2\lambda_3 \\ 2\lambda_3\lambda_o & -2\lambda_3\lambda_1 & -2\lambda_3\lambda_2 & 1-2\lambda_3^2 \end{pmatrix}. \qquad (3.6)$$

В рассматриваемом случае $\lambda_o = ch\dfrac{\psi}{2}, \quad \lambda_1 = ish\dfrac{\psi}{2}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ и S совпадает с (3.2). Само преобразование $r = SR$ есть преобразование Лоренца (3.1)

$$ict = icT\gamma - i\frac{V}{c}X_1\gamma = ic\left(T - \frac{VX_1}{c^2}\right)\gamma, \quad x_1 = -VT\gamma + X_1\gamma, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3 \,.$$

В общем случае $\mathbf{V} = \mathbf{e}\,V$ и кватернион преобразования имеет вид

$$L = \cos\frac{i\psi}{2} + \tau_1\alpha_1 \sin\frac{i\psi}{2} + \tau_2\alpha_2 \sin\frac{i\psi}{2} + \tau_3\alpha_3 \sin\frac{i\psi}{2}, \qquad (3.7)$$

где $\cos i\psi = ch\psi = \gamma = 1\Big/\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}, \quad \sin i\psi = ish\psi = i\dfrac{V}{c}\gamma = iV\Big/c\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}$.

Матрица поворота (3.3) в рассматриваемом случае принимает вид

$$S = \begin{pmatrix} \gamma & -i\dfrac{V_1}{c}\gamma & -i\dfrac{V_2}{c}\gamma & -i\dfrac{V_3}{c}\gamma \\ i\dfrac{V_1}{c}\gamma & 1+\alpha_1^2(\gamma-1) & \alpha_1\alpha_2(\gamma-1) & \alpha_1\alpha_3(\gamma-1) \\ i\dfrac{V_2}{c}\gamma & \alpha_2\alpha_1(\gamma-1) & 1+\alpha_2^2(\gamma-1) & \alpha_2\alpha_3(\gamma-1) \\ i\dfrac{V_3}{c}\gamma & \alpha_3\alpha_1(\gamma-1) & \alpha_3\alpha_2(\gamma-1) & 1+\alpha_3^2(\gamma-1) \end{pmatrix} \qquad (3.8)$$

Запишем само преобразование Лоренца

$$ict = icT\gamma - i\gamma\sum_{\alpha=1}^{3} V_\alpha X_\alpha \Big/ c \qquad x_j = -V_jT\gamma + X_j + \alpha_j\sum_{k=1}^{3}\alpha_k X_k(\gamma - 1) \qquad \text{или}$$

$$t = \left(T - \frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{R}}{c^2}\right)\gamma, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{V}}{V}\frac{(\mathbf{R}\cdot\mathbf{V})}{V} + \left(\frac{\mathbf{V}}{V}\frac{(\mathbf{R}\cdot\mathbf{V})}{V} - \mathbf{V}T\right)\gamma \qquad (3.9)$$

4. В 1873 году У.Клиффорд (1845-1879) дал оригинальное описание [2] движения твердого тела с помощью кватерниона, у которого компонентами являются величины $a+\varepsilon a^o$, где a, a^o – вещественные и комплексные числа и $\varepsilon^2 = 0$. Впоследствии величины $A = a+\varepsilon a^o$ Э.Штуди (1862-1930) назвал дуальными числами [3]. А.Котельникову (1865-1944) в 1895 году удалось истолковать все формулы теории кватернионов, как “неразвернутые” формулы теории дуальных кватернионов [4], то есть установить полную аналогию тех и других формул. Применительно к кинематике эта аналогия устанавливает соотношение между движениями тела с одной неподвижной точкой и движениями произвольного вида.

Действия над дуальными числами ассоциативны по отношению к умножению и дистрибутивны по отношению к сложению. В дуальном числе

$$A = a+\varepsilon a^o = a\left(1+\varepsilon \frac{a^o}{a}\right) = a\left[1+\varepsilon\, p(A)\right] \tag{4.1}$$

a – главная часть, $a^o = mom(A)$ – моментная часть,

$a^o/a = p(A)$ – параметр числа.

Если $a^o = 0$, то $p(A)=0$ и дуальное число вещественно. За модуль дуального числа принимают модуль его главной части $|A| = |a|$. Равенство $A = a+\varepsilon a^o = 0$ означает, что одновременно $a=0$ и $a^o = 0$.

$$A \pm B = (a \pm b) + \varepsilon(a^o \pm b^o),$$

$$A \cdot B = (a+\varepsilon\ a^o)(b+\varepsilon\ b^o) = ab + \varepsilon\,(a^o b + ab^o),$$

$$\frac{A}{B} = \frac{(a+\varepsilon\ a^o)}{(b+\varepsilon\ b^o)} = \frac{(a+\varepsilon\ a^o)(b-\varepsilon\ b^o)}{(b+\varepsilon\ b^o)(b-\varepsilon\ b^o)} = \frac{ab}{b^2} + \varepsilon\,\frac{a^o b - ab^o}{b^2}.$$

Возведение в степень и извлечение корня ($n-$целое) производится по формулам бинома И.Ньютона:

$$A^n = (a+\varepsilon a^o)^n = a^n + \varepsilon\, n a^o a^{n-1}, \qquad \sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{a+\varepsilon\ a^o} = \sqrt[n]{a} + \varepsilon\ \frac{1}{n} a^o \sqrt[n]{a^{1-n}}.$$

Функции дуальной переменной представляют также в виде дуальной величины и считают дифференцируемыми [5]. Общее выражение для функции дуальной переменной представляет собой первые два члена ряда Тейлора, в котором $\varepsilon\ \Delta x^o$ играет роль приращения: $F(X) = f(x) + \varepsilon\left[x^o \frac{df(x)}{dx} + f^o(x)\right]$ (4.2)

Например, для функции $\exp X$ имеем $\exp X = \exp x \cdot \exp \varepsilon x^o = e^x(1+\varepsilon x^o)$.

Для дифференцируемых функций дуальных переменных сохраняются все формулы и теоремы дифференциального и интегрального исчислений, например, $\frac{dX^n}{dX} = nX^{n-1}$, $\frac{de^X}{dX} = e^X$, $\frac{d\ln X}{dX} = \frac{1}{X}$, $\frac{d\sin X}{dX} = \cos X$,

$$\frac{d\cos X}{dX} = -\sin X, \quad \int X^A dX = \frac{1}{A+1} X^{A+1} + C, \quad \int \cos(AX)dX = \frac{1}{A}\sin(AX) + C.$$

Фигуру, образованную двумя скрещивающимися осями $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ *и осью* $\mathbf{E}$, *пересекающей* $\mathbf{E}_1$ *и* $\mathbf{E}_2$ *под прямым углом, называют дуальным углом.* Для приведения единичного вектора $\mathbf{E}_1$ к совпадению с единичным вектором $\mathbf{E}_2$ необходимо оси $\mathbf{E}_1$ сообщить винтовое движение, состоящее из смещения δ вдоль оси $\mathbf{E}$ и поворота на угол φ вокруг оси $\mathbf{E}$. Дуальное число $\Phi = \varphi + \varepsilon\delta$ принимают за меру дуального угла между осями $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$. Числа φ, δ

считаются положительными, если вращение происходит в положительную сторону, а смещение - в положительном направлении оси винта $\mathbf{E}$.

Можем написать $\cos\Phi = \cos\varphi - \varepsilon\,\delta\sin\varphi$, $\qquad \sin\Phi = \sin\varphi + \varepsilon\,\delta\cos\varphi$,

$$tg\Phi = \frac{\sin\varphi + \varepsilon\,\delta\cos\varphi}{\cos\varphi - \varepsilon\,\delta\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi + \varepsilon\,\delta}{\cos^2\varphi} = tg\varphi + \varepsilon\,\delta(1 + tg^2\varphi)\cdot$$

Дуальный кватернион вводится равенством

$$\cos\frac{\Phi}{2} + \overline{E}\sin\frac{\Phi}{2} = \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \overline{E}\sin\frac{\varphi}{2}\right) + \varepsilon\frac{\delta}{2}\left(-\sin\frac{\varphi}{2} + \overline{E}\cos\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \overline{E}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\circ\left(1 + \varepsilon\,\overline{E}\,\frac{\delta}{2}\right), \qquad (4.3)$$

где $\overline{E} = \tau_1\alpha_1 + \tau_2\alpha_2 + \tau_3\alpha_3 = \overline{\tau}$, $\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \alpha_3{}^2 = 1$, и представляет собой произведение кватерниона поворота и соосного ему кватерниона сдвига.

Кватернион сдвига получается из кватерниона поворота простой заменой угла φ на смещение $\varepsilon\,\delta$: $\cos\frac{\varepsilon\,\delta}{2} + \overline{E}\sin\frac{\varepsilon\,\delta}{2} = 1 + \varepsilon\,\overline{E}\,\frac{\delta}{2}\cdot$ (4.4)

При этом вектор Родрига $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{E}tg\frac{\varphi}{2}$ перейдет в $\boldsymbol{\theta}^o = \mathbf{E}tg\varepsilon\,\frac{\delta}{2} = \varepsilon\;\mathbf{E}\frac{\delta}{2}$ и $1 + (\boldsymbol{\theta}^{\,o})^2 = 1, \quad \boldsymbol{\theta}^o \times (\boldsymbol{\theta}^o \times \mathbf{R}) = 0\cdot$

Рассмотрим преобразование $L^o \circ \bar{f} \circ \widetilde{L}^o$, где $\bar{f}$ – произвольный вектор-кватернион и $L^o = 1 + \varepsilon\,\overline{E}\,\frac{\delta}{2}$ - кватернион сдвига.

$$\left(1 + \varepsilon\,\overline{E}\frac{\delta}{2}\right)\circ\bar{f}\circ\left(1 - \varepsilon\,\overline{E}\frac{\delta}{2}\right) =$$

$$= \left(\bar{f} - \varepsilon\frac{\delta}{2}\overline{E}\cdot\bar{f} + \varepsilon\frac{\delta}{2}\overline{E}\times\bar{f}\right)\circ\left(1 - \varepsilon\,\overline{E}\frac{\delta}{2}\right) = \bar{f} + \varepsilon\,\delta\,\overline{E}\times\bar{f}. \qquad (4.5)$$

Преобразование (2.5) $\mathbf{f} + 2\dfrac{\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{f} + \boldsymbol{\theta}\times(\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{f})}{1+\theta^2}$, эквивалентное $L\circ\bar{f}\circ\widetilde{L}$, при замене вектора $\boldsymbol{\theta}$ на вектор $\boldsymbol{\theta}^o$ сразу дает (4.5) $\quad \mathbf{f} + \varepsilon\,\delta\;\mathbf{E}\times\mathbf{f}$.

Итак, преобразуемый вектор заменяется совокупностью того же вектора и момента вектора относительно исходного полюса.

Поскольку скользящий вектор $\mathbf{f}$, приложенный в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$, эквивалентен в начале координат вектору $\mathbf{f}$ и моменту $\mathbf{r}\times\mathbf{f}$, то рассматриваемое преобразование (4.5) $\left(1 + \varepsilon\,\frac{\bar{r}}{2}\right)\circ\bar{f}\circ\left(1 - \varepsilon\,\frac{\bar{r}}{2}\right) = \bar{f} + \varepsilon\,\bar{r}\times\bar{f}$ есть приведение скользящего вектора $\mathbf{f}$ к началу координат. Тогда преобразование $L\circ(\bar{f} + \varepsilon\;\bar{r}\times\bar{f})\circ\widetilde{L}$, где $L = \lambda_o + \bar{\lambda}$, есть поворот вектора $\mathbf{f}$, приложенного в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$.

Так возникает понятие дуального вектора и винтовое исчисление [7]

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} + \varepsilon\;\mathbf{f}^o = \mathbf{e}_i(f^i + \varepsilon\,f^{oi}) = (\mathbf{f}, \mathbf{f}^o), \qquad (4.6)$$

где $\mathbf{f}$ – главная часть дуального вектора,

$\mathbf{f}^o$ – моментная часть дуального вектора, момент.

Если момент (моментная часть) дуального вектора пропорционален его главной части, то дуальный вектор $(\mathbf{f}, p\mathbf{f})$ называется винтом, $\quad p$ – параметр винта.

Вектор $\mathbf{m}^o(\mathbf{F}) = p\mathbf{f} + \mathbf{r}\times\mathbf{f}$ называется моментом винта относительно точки O, а дуальный вектор $(\mathbf{f}, p\mathbf{f} + \mathbf{r}\times\mathbf{f})$ – мотором винта относительно точки O. Винт полностью определяет мотор для любой точки пространства, этот мотор в свою очередь единственным образом определяет параметр винта, и, следовательно, сам винт $$p = \frac{\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}^o}{\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}} = \frac{\mathbf{f}\cdot(p\mathbf{f} + \mathbf{r}\times\mathbf{f})}{\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}}. \qquad (4.7)$$

Моментная часть мотора винта имеет минимальное значение для точек оси винта $\min \mathbf{f}^o = p\mathbf{f}$, $\mathbf{r} = \alpha\mathbf{f}$. При переходе к какой-либо другой точке пространства момент винта увеличивается, получая приращение, перпендикулярное вектору винта $\mathbf{f}^o{}_\perp = \mathbf{r}\times\mathbf{f}$. Компонента момента винта коллинеарная вектору винта, остается неизменной $\mathbf{f}^o{}_\parallel = p\mathbf{f}$. Таким образом, любой дуальный вектор $(\mathbf{f}, \mathbf{f}^o)$, заданный в некоторой точке O, можно рассматривать, как мотор винта $(\mathbf{f}, p\mathbf{f})$ для этой точки O.

Выбором точки приведения C на оси винта компонента $\mathbf{f}^o{}_\perp$ моментной части дуального вектора может быть обращена в нуль. Полагая $\mathbf{r}_{oc} = -\dfrac{\mathbf{f}\times\mathbf{f}^o}{f^2}$,

получаем $$\mathbf{f}^c = \mathbf{f}^o + \mathbf{r}_{oc}\times\mathbf{f} = \mathbf{f}^o - \frac{\mathbf{f}\times\mathbf{f}^o}{f^2}\times\mathbf{f} = \mathbf{f}\frac{\mathbf{f}^o\cdot\mathbf{f}}{f^2} = p\mathbf{f}.$$

В основу всех действий над винтами положено действие над моторами, которые соответствуют этим винтам. При рассмотрении двух и более винтов выбирается в пространстве общая точка приведения O, и к ней относятся моторы всех винтов $\bar{F} = \bar{f} + \varepsilon\bar{f}^o = \sum\limits_i \left(1 + \varepsilon\dfrac{\bar{r}_{oi}}{2}\right)\circ\left(\bar{f}_i + \varepsilon\bar{f}^o{}_i\right)\circ\left(1 - \varepsilon\dfrac{\bar{r}_{oi}}{2}\right)$,

далее переход к точке C на оси винта $\left(1 + \varepsilon\dfrac{\bar{r}_{oc}}{2}\right)\circ(\bar{f} + \varepsilon\bar{f}^o)\circ\left(1 - \varepsilon\dfrac{\bar{r}_{oc}}{2}\right)$

дает один из четырех винтов $\mathbf{F} = 0 + \varepsilon 0$, $\mathbf{F} = \mathbf{f} + \varepsilon 0$, $\mathbf{F} = 0 + \varepsilon\mathbf{f}^o$, $\mathbf{F} = \mathbf{f} + \varepsilon p\mathbf{f}$.

Любая алгебраическая операция над винтами (умножение на число, сложение и перемножение винтов) определяется как операция над моторами этих винтов, а так как каждый мотор формально выражается дуальным вектором, то алгебра винтов сводится к алгебре дуальных векторов, в которой работают обычные и дуальные кватернионы. О перенесении дуального формализма на трехмерное векторное пространство, тензорный анализ и т.д. укажем обзор [7].

Аналогия операций над дуальными объектами с операциями обычной векторной алгебры позволила А.П.Котельникову и Э.Штуди [6] сформулировать «принцип перенесения»: *все формулы векторной алгебры сохраняют силу при замене векторов* $\mathbf{F} = \mathbf{f}$ *или винтов* $\mathbf{F} = \mathbf{f} + \varepsilon p\mathbf{f}$ *моторами* $\mathbf{F} = \mathbf{f} + \varepsilon(p\mathbf{f} + \mathbf{r}\times\mathbf{f})$, *отнесенными к новой точке, и углов между винтами – дуальными углами между осями винтов.*

Техника кватернионов весьма эффективна при сложении поворотов. Пусть кватернионы L и M заданы в исходной системе координат, и каждый из них поворачивает произвольный вектор вокруг некоторой оси: $R' = L\circ R\circ\tilde{L}$,

$$R'' = M\circ R'\circ\tilde{M} = M\circ L\circ R\circ\tilde{L}\circ\tilde{M}, \quad R'' = N\circ R\circ\tilde{N}, \quad \text{где} \quad N = M\circ L.$$

Кватернион результирующего поворота N равен произведению составляющих кватернионов L и M в обратном порядке, то есть произведение кватернионов в обратном порядке есть два последовательных поворота вокруг двух осей, фиксированных в исходной системе координат. Это правило получения кватерниона результирующего поворота не изменяется при отображении составляющих кватернионов на любой базис. Пусть, например, это отображение задается кватернионом S, то есть

$$N_S = \widetilde{S} \circ N \circ S, \quad L_S = \widetilde{S} \circ L \circ S, \quad M_S = \widetilde{S} \circ M \circ S,$$

$$N_S = \widetilde{S} \circ M \circ L \circ S = \widetilde{S} \circ M \circ S \circ \widetilde{S} \circ L \circ S = M_S \circ L_S.$$

В большинстве практических случаев кватернионы составляющих поворотов заданы своими компонентами в осях, которые они сами поворачивают. В этих же осях требуется найти компоненты кватерниона результирующего поворота. Кватернионы, заданные таким образом, называются собственными. Один кватернион всегда можно считать собственным, так как его описание в исходных и повернутых им самим осях совпадают. Если же преобразование задается двумя собственными кватернионами, то их нужно выразить в какой либо одной системе осей, то есть преобразовать первый кватернион L к системе осей, преобразованной вторым кватернионом $L_M = \widetilde{M} \circ L \circ M$, либо записать второй кватернион M в исходной системе осей $M_L = L \circ M \circ \widetilde{L}$. Далее кватернионы, выраженные в одной системе осей, перемножаем в обратном порядке

$$N = M \circ L_M = M \circ \widetilde{M} \circ L \circ M = L \circ M, \quad N = M_L \circ L = L \circ M \circ \widetilde{L} \circ L = L \circ M.$$

Наконец, можно считать, что оба кватерниона L и M заданы в промежуточной системе координат, то есть в системе координат, в которую переходит исходная после первого преобразования. Кватернион результирующего поворота $M \circ L$ преобразуем к исходной и конечной системам координат

$$N = L \circ M \circ L \circ \widetilde{L} = \widetilde{M} \circ M \circ L \circ M = L \circ M.$$

1. Hamilton W.R. Lectures on Quaternions. Dublin, 1853
2. Clifford W. Preliminary Scetch of Biquaternions.
   Proc. of London Math. Soc., 1873, v. IV, p. 381-393.
3. Study E. Ueber Nicht-Euklidische und Liniengeometrie.
   Festschr. der Philos. Fakult. zu Greifswald, 1900.
4. Котельников А.П. Винтовое счисление и некоторые приложения
   его к геометрии и механике. Казань, 1895.
5. Зейлигер Д.Н. Комплексная линейчатая геометрия. ОНТИ, 1934.
6. Котельников А.П. Теория винтов и комплексные числа.
   Сб. Некоторые приложения идей Лобачевского
   в механике и физике. Гостехиздат, 1950
7. Диментберг Ф.М. Теория винтов и ее приложения.
   М., Наука, Гл. ред. физ-мат лит.,1978

Построение дуальной матрицы поворота состоит в вычислении косинусов дуальных углов между осями системы отсчета $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z$ и осями $\mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_\beta$, связанными с телом :

$$\cos\Phi_{ij} = \cos\left(\varphi_{ij} + \varepsilon\, d_{ij}\right) = \cos\varphi_{ij} - \varepsilon\, d_{ij} \sin\varphi_{ij} =$$
$$= \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{e}_j - \varepsilon(\mathbf{E}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{E}_i \cdot \left[\mathbf{e}_j + \varepsilon(\mathbf{r} \times \mathbf{e}_j)\right]$$

В этом выражении d_{ij} - расстояние между скрещивающимися осями (проекция вектора смещения $\mathbf{r} = Oo$ на перпендикуляр к осям). Итак,

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_x \cdot \left(\mathbf{e}_\tau + \varepsilon\,\mathbf{r} \times \mathbf{e}_\tau\right) & \mathbf{E}_y \cdot \left(\mathbf{e}_\tau + \varepsilon\,\mathbf{r} \times \mathbf{e}_\tau\right) & \mathbf{E}_z \cdot \left(\mathbf{e}_\tau + \varepsilon\,\mathbf{r} \times \mathbf{e}_\tau\right) \\ \mathbf{E}_x \cdot \left(\mathbf{e}_\nu + \varepsilon\,\mathbf{r} \times \mathbf{e}_\nu\right) & \mathbf{E}_y \cdot \left(\mathbf{e}_\nu + \varepsilon\,\mathbf{r} \times \mathbf{e}_\nu\right) & \mathbf{E}_z \cdot \left(\mathbf{e}_\nu + \varepsilon\,\mathbf{r} \times \mathbf{e}_\nu\right) \\ \mathbf{E}_x \cdot \left(\mathbf{e}_\beta + \varepsilon\,\mathbf{r} \times \mathbf{e}_\beta\right) & \mathbf{E}_y \cdot \left(\mathbf{e}_\beta + \varepsilon\,\mathbf{r} \times \mathbf{e}_\beta\right) & \mathbf{E}_z \cdot \left(\mathbf{e}_\beta + \varepsilon\,\mathbf{r} \times \mathbf{e}_\beta\right) \end{pmatrix}$$

Из начального положения $\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z$ в конечное положение $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ оси можно перевести одним винтовым движением. Дуальный кватернион этого винта представляет собой суперпозицию поворота и сдвига вокруг оси, проходящей через точку, радиус-вектор которой равен $\mathbf{r}$.

$$\Lambda = \left(\cos\frac{\varphi}{2} + (\mathbf{e} + \varepsilon\,\mathbf{r} \times \mathbf{e})\sin\frac{\varphi}{2}\right)\left(1 + \varepsilon\,(\mathbf{e} + \varepsilon\,\mathbf{r} \times \mathbf{e})\frac{d}{2}\right) =$$
$$= \left(\cos\frac{\varphi}{2} - \varepsilon\frac{d}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right) + \left(\mathbf{e} + \varepsilon\,\mathbf{r} \times \mathbf{e}\right)\left(\sin\frac{\varphi}{2} + \varepsilon\frac{d}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right) =$$
$$= \cos(\Phi/2) + \left(\mathbf{e} + \varepsilon\,\mathbf{r} \times \mathbf{e}\right)\sin(\Phi/2),$$

Матрица поворота (1.7) определяет параметры винта:

$$\tfrac{1}{2}\left(SpA - 1\right) = \cos\Phi = \cos\varphi - \varepsilon\, d \sin\varphi,$$
$$A_{jk} - A_{kj} = 2\left(\mathbf{e} + \varepsilon\,\mathbf{r} \times \mathbf{e}\right)_i \sin\Phi =$$
$$= 2\left(\mathbf{e} + \varepsilon\,\mathbf{r} \times \mathbf{e}\right)_i\left(\sin\varphi + \varepsilon\, d\cos\varphi\right), \quad ijk = 123, 231, 312$$

Главная часть дуального кватерниона определяет ось винта $\mathbf{e}(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ и угол поворота φ вокруг оси винта, а моментная часть – смещение d вдоль оси винта и радиус- вектор $\mathbf{r}$ от точки приведения до какой-либо точки оси винта.