ADVANCES IN MATHEMATICS **4**, 111-148 (1970)

ФОРМЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ КОМПОЗИЦИЮ

Р. Д. Шафер

Массачусеттский Технологический институт, Кембридж, Массачусеттс, 02139

Посвящается У. Т. Мартину

В данной работе мы в элементарных понятиях представляем старый вопрос о формах, допускающих композицию, то есть о формах N в алгебре, которые удовлетворяют

$$N(ab) = N(a)N(b),$$

и как этот вопрос был обобщен и полностью решен в недавней работе К. МакКриммона.

§1. Пусть F – произвольное поле. Обозначим как F_m ассоциативную алгебру всех матриц $m \times m$ $a = (\alpha_{ij})$ с элементами из F:

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mm} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Алгебра F_m имеет размерность m^2 над F.

Если $\xi_{ij} (i, j = l, ..., m)$ – m^2 алгебраически независимых элементов над F, и $K = F(\xi_{11}, \xi_{12}, ..., \xi_{mn})$ есть поле, образованное присоединением ξ_{ij} к F, тогда матрица

$$x = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1m} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{m1} & \xi_{m2} & \cdots & \xi_{mm} \end{pmatrix} \tag{2}$$

есть так называемый "характерный элемент" (generic element) алгебры F_m. С очевидностью, x не является элементом F_m вообще, а вместо этого является элементом ассоциативной алгебры K_m над K. Мы получаем элементы F_m с помощью специализации: $\xi_{ij} \to \alpha_{ij}$. То есть, заменив ξ_{ij} на α_{ij}, получаем из x в (2) элемент a в (1). Причина использования характерного элемента в том, что теперь мы получаем в свое распоряжение свойства многочлена.

Каждая матрица $x = (\xi_{ij})$ имеет детерминант

$$det\ x = \sum_{\sigma} (sgn\ \sigma) \xi_{1,\sigma 1} \xi_{2,\sigma 2} \cdots \xi_{m,\sigma m}$$

который является однородным многочленом

$$det\ x = d(\xi_{11}, \xi - 12, \ldots, \xi_{mm})$$

в кольце многочленов $F[\xi_{11}, \xi_{12} \ldots, \xi_{mm}]$. Однородный многочлен $d = det\ x$ имеет степень m. Если $\eta_{ij}(i, j = l, ..., m)$ алгебраически независимы над K, то $y = (\eta_{ij})$ – еще один характерный элемент F_m, и как x, так и y входят в алгебру L_m, где

$$L = K(\eta_{11}, \eta_{12}, \ldots, \eta_{mm}) = F(\xi_{11}, \xi - 12, \ldots, \xi_{mm}, \eta_{11}, \eta_{12}, \ldots, \eta_{mm})$$

Мы можем образовать произведение xy матриц x, y в L_m. Известное правило мультипликативности детерминантов дает

$$det(xy) = (det\ x)(det\ y). \tag{3}$$

В более общем случае, если s – произвольное положительное целое число, то однородный многочлен $N(x) = (det\ x)^s$ степени ms обладает свойством

$$N(xy) = N(x)N(y),$$

так как

$$N(xy) = (det(xy))^s = ((det\ x)(det\ y))^s = (det\ x)^s(det\ y)^s = N(x)N(y)$$

согласно (3).

Обратное этому утверждение было хорошо известно уже давно. Во всяком случае, допущение о несокращаемости многочлена $det\ x$ в $F[\xi_{11}, \xi_{12} \ldots, \xi_{mm}]$ легко доказать.

Теорема 1. Пусть F_m – ассоциативная алгебра всех $m \times\ m$ матриц над произвольным полем F, и $\xi_{ij}, \eta_{ij}(i, j = l, ...m)$ алгебраически независимы над F . Тогда однородный многочлен N степени $n > 0$ в $F[\xi_{11}, \xi_{12} \ldots, \xi_{mm}]$ удовлетворяет

$$N(xy) = N(x)N(y) \tag{4}$$

для $x = (\xi_{ij})$ и $y = (\eta_{ij})$ тогда и только тогда, когда $n = ms$ для некоторого положительного s и

$$N(x) = (det\ x)^s$$

Доказательство. В (4) мы предполагали, что $N(y)$ и $N(xy)$ образованы из $N(x)$ с помощью замены ξ_{ij} на η_{ij} и $\sum_k\ \xi_{ik}\eta_{ki}$, соответственно. Мы уже видели справедливость "если"-части теоремы. Для того, чтобы убедиться в обратном, обозначим тождественную матрицу в F_m как 1. Тогда из (4) вытекает $N(1) = (N(1))^2$. Если $N(1) = 0$, то $N(x) = N(x1) = N(x)N(1) = 0$, что противоречит допущению что N имеет степень $n > 0$. Отсюда $N(1) = 1$. Характеристическим многочленом для x является

$$det(\lambda 1 - x) = \lambda^m - tr\ x\ \lambda^{m-1} + \cdots + (-1)^m\ det\ x \tag{5}$$

Согласно теореме Кэли-Гамильтона, x удовлетворяет этому многочлену и мы имеем $x_m - (tr\ x)x^{m-1} + \cdots + (-1)^m(det\ x)1 = 0$, или

$$xz = (det\ x)1 \tag{6}$$

где $z = (\zeta_{ij})$ – матрица $m \times\ m$ с элементами ζ_{ij} в

$$F[\xi_{11}, \xi_{12} \ldots, \xi_{mm}].$$

Тогда из (4) и (6) вытекает $N(x)N(z) = (det\ x)^n N(1) = (det\ x)^n$, так как N – однородный многочлен степени n. То есть $N(x)$ делит (является делителем???) $(det\ x)^n$ в кольце многочленов $F[\xi_{11}, \xi_{12} \dots, \xi_{mm}]$. Но известно, что $det\ x$ несократим [7, стр. 115; 4, стр. 176]. Отсюда $N(x) = (det\ x)^s$ для некоторого положительного целого числа s, так как $N(1) = 1$. Это завершает доказательство Теоремы 1.

Пусть $\mathbb{A}$ – любая конечномерная алгебра, не обязательно ассоциативная, над F. Отображение (посредством???) в однородный многочлен

$$a \to N(a)$$

из $\mathbb{A}$ в F называется *формой* на $\mathbb{A}$. Говорят, что форма на $\mathbb{A}$ *допускает композицию* в случае

$$N(ab) = N(a)N(b) \tag{7}$$

для всех a, b в $\mathbb{A}$.

Пусть $\mathbb{A}$ будет F_m, и пусть $N(x) = (det\ x)^s$. Тогда, согласно (4), и специализации $(\xi_{ij} \to \alpha_{ij}; \eta_{ij} \to \beta_{ij})$, получаем

$$N(ab) = N(a)N(b)$$

для всех $a = (\alpha_{ij}), b = (\beta_{ij})$ в $\mathbb{A} = F_m$. Следовательно, форма

$$a \to N(a) = (det\ a)^s$$

в $\mathbb{A} = F_m$ допускает композицию.

Обратно, мы можем сказать, что, всякий раз, когда форма N на F_m допускает композицию, (4) справедливо для порождающих x, y из F_m. Это действительно верно, если F содержит достаточно элементов. Для допущения

$$P = P(\xi_{11}, \xi_{12} \dots, \xi_{mm}, \eta_{11}, \eta_{12} \dots, \eta_{mm})$$

будет ненулевой многочлен в

$$F[\xi_{11}, \xi_{12} \dots, \xi_{mm}, \eta_{11}, \eta_{12} \dots, \eta_{mm}],$$

который ?????????????? n в любом из этих неопределенных. Если F содержит более чем n особых элементов, то

$$P\alpha_{11}, \alpha_{12} \dots, \alpha_{mm}, \beta_{11}, \beta_{12} \dots, \beta_{mm} \neq 0$$

для каких-либо α_{ij}, β_{ij} в F [11, стр. 32]. Отсюда, предположим что $N(x)$ имеет степень n и что F содержит более чем n особых элементов. Если

$$P = N(xy) - N(x)N(y)$$

не нулевой многочлен, тогда $N(ab) - N(a)N(b) \neq 0$ для некоторых a, b в F_m, что противоречит (7). Отсюда (7) включает (4) если F содержит более чем n элементов.

В доказательстве Теоремы 1 мы использовали характеристический многочлен порождающего элемента $x = (\xi_{ij})$из F_m. Для отдельного элемента a из F_m характеристический многочлен от a не должен быть monic ??? многочленом наименьшей степени с коэффициентами из поля F, которое соответствует a. Однако, для порождающего элемента $x = (\xi_{ij})$, характеристический многочлен (5) легко представить в виде monic ??? многочлена наименьшей степени с коэффициентами из $K = F(\xi_{11}, \xi_{12} \dots, \xi_{mm})$, который соответствует x; так что, характеристический многочлен и минимальный многочлен $m_x(\lambda)$ совпадают. Для несократимости $det\ x$ в $D = F[\xi_{11}, \xi_{12} \dots, \xi_{mm}]$ предполагается несократимость в $D[\lambda]$ особого многочлена

(5). Тогда, так как минимальный многочлен $m_x(\lambda)$ из x делит ??? (5) и оба monic ??? , $m_x(\lambda)$ равняется (5):

$$m_x(\lambda) = \lambda^m - tr\ x\ \lambda^{m-1} + \cdots + (-1)^m det\ x \tag{8}$$

Для удобства терминологии в более общем случае, который будет показан в §3, мы назовем (8) *порождающим минимальным многочленом алгебры* F_m.

Для отдельного элемента $a = (\alpha_{ij})$ из F_m мы получим многочлен

$$m_a(\lambda) = \lambda^m - tr\ a\ \lambda^{m-1} + \cdots + (-1)^m det\ a \tag{9}$$

из (8) с помощью специализации ($\xi_{ij} \to \alpha_{ij}$). В этом случае $m_a(\lambda)$ есть действительно характеристический многочлен от a. Тогда (9)называется *порождающим минимальным многочленом* элементов a из F_m, и $det\ a$ – *порождающей нормой* от a.

Мы можем переформулировать Теорему 1 следующим образом:

Теорема 1′. Пусть N – форма степени $n > 0$ в ассоциативной алгебре F_m всех матриц $m \times m$ над произвольным полем F, которая содержит более чем n особых элементов. В этом случае N допускает композицию, тогда и только тогда, когда N есть степень порождающей нормы:

$$N(a) = (det\ a)^s$$

для некоторого положительного целого числа s и для всех a из F_m.

§2. Долгая история форм, допускающих композицию, начинается с квадратичных форм. Превосходные обзоры истории невырожденных квадратичных форм, допускающих композицию содержатся в [6] и[3]. Мы не будем повторять здесь эту историю, заметим лишь, что самые ранние упоминания относятся к Диофанту и Эйлеру, и что в 1898 году появилась классическая теорема Гурвица [8] которая ограничила размерность конечномерных алгебр, содержащих такие формы, числами 1,2,4 и 8. Капланский в 1954 году доказал, что все алгебры, имеющие такие формы, с необходимостью конечномерны [12].

Все будет несколько проще, если мы примем что характеристика $F \neq 2$. В дальнейшем в этой работе мы будем исходить из этого допущения. К тому же, так как мы будем сталкиваться с алгебрами, которые неассоциативны, мы будем использовать термин *алгебра* для векторного пространства над F, на котором определено билинейное умножение, не обязательно ассоциативное.

Пусть V – векторное пространство над F, вообще говоря, бесконечномерное. Тогда отображение

$$a \to N(a)$$

V на F называется квадратичной формой на V в случае если

$$N(\alpha a) = \alpha^2 N(a)$$

для всех α в F, a в V и если

$$(a, b) = \frac{1}{2}[N(a + b) - N(a) - N(b)] \tag{10}$$

билинейна. Тогда $N(a) = (a, a)$. Эта терминология согласуется с той, что использовалась в §1 для конечномерного случая. Такая квадратичная форма называется *невырожденной* в случае, когда ассоциированная симметричная билинейная форма (10) невырождена; то есть, из $(a, b) = 0$ для всех b из V вытекает $a = 0$.

Примера будет достаточно, чтобы показать, почему если мы не знаем заранее алгебру, на которой определена форма, допускающая композицию, как мы это сделали в Теореме $1'$, мы ограничены рассотрением невырожденных квадратичных форм. Пусть $\mathbb{R}$ – произвольная алгебра над F. Присоединим единичный элемент 1 к $\mathbb{R}$, чтобы получить алгебру $\mathbb{A} = F1 + \mathbb{R}$, в которой каждый элемент a из $\mathbb{A}$ имеет форму

$$a = \alpha 1 = r, \quad \alpha \; in \; F, r \; in \; \mathbb{R} \tag{11}$$

Определим

$$N(a) = \alpha^2$$

для всех a в (11). Тогда N является квадратичной формой в $\mathbb{A}$, допускающей композицию, так как $b = \beta 1 = s, \beta$ из F, s из $\mathbb{R}$, отсюда $ab = \alpha\beta 1 + \beta r + \alpha s + rs$ и $N(ab) = (\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2 = N(a)N(b)$. Квадратичная форма N не сообщает совсем ничего о совершенно произвольной алгебре $\mathbb{R}$ (следовательно, ничего существенного об $\mathbb{A}$). $\mathbb{R}$ является радикалом N, так что N является невырожденной квадратичной формой в случае, если $\mathbb{R}$ не есть 0.

Нас интересуют те алгебры $\mathbb{A}$, не обязательно конечномерные, которые допускают невырожденные квадратичные формы, допускающие композицию.Зная такие алгебры, мы зададимся вопросом, какие возможны формы. Если $\mathbb{A}$ содержит 1, ответ легко сформулировать в терминах того, что Джекобсон [9] назвал *композиционными алгебрами.*

Пусть $\mathbb{B}$ – алгебра с 1 размерности n над F, причем $\mathbb{B}$ обладает инволюцией (то есть антиавтоморфизмом периода 2)

$$b \to \bar{b} \qquad \text{для всех} \quad b \text{ из } \mathbb{B},$$

удовлетворяющей

$$b + \bar{b} = t(b)1, \qquad b\bar{b}(= \bar{b}b) = n(b)1 \tag{12}$$

для $t(b), n(b)$ из F. Тогда

$$b^2 - t(b)b + n(b)1 = 0$$

для всех b из $\mathbb{B}$. Мы построим алгебру $\mathbb{A}$ размерности $2n$ над F следующим образом: элементы $\mathbb{A}$ записываются как

$$a = b_1 + vb_2, \qquad b_i \text{ из } \mathbb{B}, \tag{13}$$

равенство, сложение и умножение на скалярные величины определяется покомпонентно. Для любых $\mu \neq 0$ из F, умножение в $\mathbb{A}$ определяется посредством

$$(b_1 + vb_2)(b_3 + vb_4) = (b_1b_3 + \mu b_4\bar{b}_2) + v(\bar{b}_1b_4 + b_3b_2).$$

Тогда $\mathbb{A}$ является алгеброй с 1, обладающей композицией $a \to \bar{a}$ определенной посредством

$$\bar{a} = \bar{b}_1 - vb_2,$$

и удовлетворяющей

$$a + \bar{a} = t(a)1, \qquad a\bar{a}(= \bar{a}a) = n(a)1$$

для всех a из $\mathbb{A}$, где *след* $t(a)$ есть

$$t(a) = t(b_1)$$

и *норма* $n(a)$ есть

$$n(a) = n(b_1) - \mu n(b_2) \tag{14}$$

для a из (13) и $t(b), n(b)$ из (12). Эта конструкция, *процесс Кэли-Диксона*, допускает повторение.

Если мы начинаем с 1-мерной алгебры $\mathbb{B} = F$, в которой имеется тождественное отображение в виде инволюции $b \to \bar{b}$, мы получим последовательность алгебр:

$$F,\ \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{O}, ...$$

размерности $1, 2, 4, 8, ...$, которые зависят исключительно от F и скалярных величин $\mu_i \neq 0$, использованных на пути от одной алгебры к следующей. В зависимости от выбора μ_1 (квадрат или неквадрат в F) $\mathbb{Z}$ является или $F \oplus F$, или полем, являющимся квадратичным расширением F. Алгебры $\mathbb{Q}$ являются (обобщенными) *кватернионными алгебрами* над F; они включают алгебру F_2 всех 2×2 матриц над F. Алгебры $\mathbb{O}$ являются 8-мерными *алгебрами Кэли* над F.

$F, \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ являются ассоциативными алгебрами. Алгебры Кэли $\mathbb{O}$ неассоциативны. Они удовлетворяют более слабым тождествам

$$a^2 b = a(ab), \qquad ba^2 = (ba)a \tag{15}$$

для всех a, b из $\mathbb{O}$. Любая алгебра, в которой удовлетворяются тождества (15) называется *альтернативной.* С очевидностью, любая ассоциативная алгебра является альтернативной. Таким образом, любая из алгебр $F, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{O}$ из последовательности выше альтернативна. Также квадратичная норма $n(a)$, определенная индуктивно с помощью (12) и (14), является невырожденной и допускает композицию на алгебрах $F, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{O}$. Однако, никакие другие алгебры из последовательности, начатой $F, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{O}, ...$ не являются альтернативными и не допускают композицию. Доказательства этих утверждений и нижеследующего обобщения знаменитой теоремы Гурвица можно найти в [9] или [20, часть III]. Алгебры $F, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{O}$ называются *композиционными алгебрами.*

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{A}$ – алгебра с 1, возможно бесконечномерная, над полем F характеристики $\neq 2$. Необходимое и достаточное условие для существования невырожденной квадратичной формы N, допускающей композицию в $\mathbb{A}$, состоит в том, что $\mathbb{A}$ является одной из альтернативных композиционных алгебр $F, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{O}$ размерности* $1, 2, 4$ *или 8. Более того, N является квадратичной нормой, задаваемой посредством (12) и (14).*

Из (14) следует, что по отношению к базисам $\{1, v_1, v_2, v_2 v_1, v_3, ...\}$, полученным процессом Кэли-Диксона, формы норм, упомянутые в Теореме 2 представляются как

$$\alpha^2, \tag{16}$$

$$\alpha_1^2 - \mu_1 \alpha_2^2,$$

$$\alpha_1^2 - \mu_1 \alpha_2^2 - \mu_2 \alpha_3^2 + \mu_1 \mu_2 \alpha_4^2 \tag{17}$$

и

$$\alpha_1^2 - \mu_1 \alpha_2^2 - \mu_2 \alpha_3^2 + \mu_1 \mu_2 \alpha_4^2 - \mu_3 \alpha_5^2 + \mu_1 \mu_3 \alpha_6^2 + \mu_2 \mu_3 \alpha_7^2 - \mu_1 \mu_2 \mu_3 \alpha_8^2$$

для произвольного $\mu_i \neq 0$ из F. Конечно, такие формы будут представляться различно в разных базисах $F, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ или $\mathbb{O}$.

Рассмотрим случай $n = m = 2$ в Теореме $1'$: F_2 является алгеброй всех 2×2 матриц

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

с α_i из F. Тогда

$$det\, a = \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3 \tag{18}$$

является квадратичной формой на 4-мерном пространстве F_2. Ассоциированная симметричная билинейная форма есть

$$(a,b) = 1/2(\alpha_1\beta_4 - \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_1),$$

которая имеет ранг 4 и является поэтому невырожденной. Может вызвать вопрос, как если F_2 является примером алгебры кватернионов, детерминант (18), допускающий композицию на F_2 и являющийся невырожденным, появляется среди возможных вариантов (17). Это получается благодаря подходящему изменению базиса. Если $\mu_1 = \mu_2 = 1$, то $\mathbb{H}$ изоморфно F_2 на основе изоморфизма

$$\alpha_1 1 + \alpha_2 v_1 + \alpha_3 v_2 + \alpha_4 v_2 v_1 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_3-\alpha_4 \\ \alpha_3+\alpha_4 & \alpha_1-\alpha_2 \end{pmatrix}$$

Тогда детерминант согласно (18) есть

$$(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_2) - (\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3+\alpha_4) = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + \alpha_4^2,$$

что соответствует (17).

F также изоморфна алгебре F_1 всех матриц 1×1 над F, где generic норма равна $det(\alpha 1) = \alpha$. Следовательно, форма (16), допускающая композицию на F_1 является power of the generic нормы,что требуется в Теореме $1'$.

§3. Пусть $\mathbb{A}$ – произвольная алгебра, не обязательно ассоциативная, над произвольным полем F. Для фиксированного элемента a из $\mathbb{A}$ отображение

$$R_a : b \to ba = bR_a, \qquad \text{для всех } b \text{ из } \mathbb{A},$$

является линейным оператором на $\mathbb{A}$ и называется правым умножением на $\mathbb{A}$, определенным посредством a. Аналогично, элемент a из $\mathbb{A}$ определяет левое умножение L_a на $\mathbb{A}$ посредством

$$L_a : b \to ab = bL_a, \qquad \text{для всех } b \text{ из } \mathbb{A}.$$

Если $\mathbb{A}$ ассоциативна, то из $c(ab) = (ca)b$ для всех a, b, c из $\mathbb{A}$ вытекает

$$R_{ab} = R_a R_b \tag{19}$$

для всех a, b из $\mathbb{A}$. Таким образом, если $\mathbb{A}$ является ассоциативной алгеброй размерности n над F, то

$$a \to R_a$$

является представлением алгебры $\mathbb{A}$ линейными операторами, действующими на n-мерном векторном пространстве $\mathbb{A}$. Предположим, что это так, и положим

$$N(a) = det\, R_a \tag{20}$$

для всех a из $\mathbb{A}$. Тогда N является формой степени n на $\mathbb{A}$. Более того, допускает композицию, так как из (19) вытекает, что

$$N(ab) = det\, R_{ab} = det(R_a R_b) = (det\, R_a)(det\, R_b) = N(a)N(b).$$

Таким образом, в любой конечномерной ассоциативной алгебре $\mathbb{A}$ существует форма (20), допускающая композицию. Однако, форма (20) может не отражать многих свойств алгебры. Если $\mathbb{A}$ нильпотентна, то каждый элемент a из $\mathbb{A}$ нильпотентен и это соответствует правому умножению R_a. Тогда $N(a)$ в (20) равно нулю для всех a из $\mathbb{A}$. Несколько более общо, если $\mathbb{R}$ есть $(n-1)$-мерная нильпотентная ассоциативная алгебра, мы можем присоединить тождественный элемент 1 к $\mathbb{R}$, чтобы получить n-размерную ассоциативную алгебру $\mathbb{A} = F1 + \mathbb{A}$, в которой каждый элемент a из $\mathbb{A}$ имеет форму

$$a = \alpha 1 + z, \qquad \alpha \in F, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Тогда, обозначая под I тождественный оператор на $\mathbb{A}$, мы имеем

$$R_a = \alpha I + R_z$$

так что $R_a - \alpha I$ нильпотентен, из чего следует, что характеристический полином R_a равен $(\lambda - \alpha)^n$. Следовательно,

$$N(a) = det\, R_a = \alpha^n.$$

В этом случае, для любого a из (21) компонент z из $\mathbb{R}$ не вносит ничего в форму $N(a) = \alpha^n$. В определенном смысле, форма невырождена, если $\mathbb{R} \neq 0$.

Джекобсон дал в [10] и [11] теорию generic минимального полинома для широкого класса конечномерных неассоциативных алгебр. Пусть $\mathbb{A}$ – конечномерная алгебра с 1 над F, и пусть $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ – базис $\mathbb{A}$ над F. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – алгебраически независимые элементы над F, и пусть $K = F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Мы строим алгебру $\mathbb{A}_K (= K \otimes_F \mathbb{A})$, алгебра над K получается расширением базового поля F на расширенное поле K. В алгебре $\mathbb{A}_K$ мы рассматриваем элемент

$$x = \sum \xi_i u_i,$$

и называем x *generic элемент* алгебры $\mathbb{A}$ над F. Теперь предположим, что $\mathbb{A}$ является *строго степенной ассоциативной* (таковыми, к примеру, являются альтернативные алгебры). То есть, мы полагаем, что $\mathbb{A}$ является *степенной ассоциативной* в том смысле, что каждый элемент из $\mathbb{A}$ порождает ассоциативную подалгебру; более того, для строгой степенной ассоциативности мы полагаем, что если H – произвольное расширение F, то скалярное расширение $\mathbb{A}_K (= K \otimes_F \mathbb{A})$ алгебры $\mathbb{A}$ является степенно-ассоциативной. Поэтому в $\mathbb{A}_K$ мы можем однозначно образовывать многочлены в generic элементе x, полагая коэффициенты многочленов принадлежащими K. Существует единственный нормированный многочлен

$$m_x(\lambda) = \lambda^m - \sigma_1(x)\lambda^{m-1} + \ldots + (-1)^m \sigma_m(x) \tag{22}$$

наименьшей степени m, который удовлетворяет x из $\mathbb{A}_k$; это есть *generic минимальный многочлен алгебры* $\mathbb{A}$. На самом деле, коэффициенты $\sigma_i(x)$ из (22) принадлежат $F[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ и являются однородными многочленами степени i из набора ξ. *Generic норма алгебры* $\mathbb{A}$ есть $\sigma_m(x)$, и m называется *степенью алгебры* $\mathbb{A}$. Если a – произвольный элемент из $\mathbb{A}$, то

$$a = \sum \alpha_i u_i, \qquad \alpha_i \in F,$$

и мы можем specialize $(\xi_i \to \alpha_i)$, чтобы получить как

$$m_a(\lambda) = \lambda^m - \sigma_1(a)\lambda^{m-1} + \ldots + (-1)^m \sigma_m(a),$$

generic минимальный многочлен элемента a, так и $\sigma_m(a)$, *generic норму* a. Они не зависят от выбора базиса в $\mathbb{A}$.

В §1 мы использовали обычный базис $\{\mathrm{e}_{ij}\}$ в F_m, где x из (2) равен $x = \sum \xi_{ij} e_{ij}$, чтобы получить Generic минимальный многочлен от (of) F_m.

Если $\mathbb{A} = F$, то generic элемент $\mathbb{A}$ есть $x = \xi 1$, и минимальный полином (of) $\mathbb{A}$ равен $\lambda - \xi$. Generic норма $a = \alpha 1$ из $\mathbb{A}$ есть просто α. Если $\mathbb{A}$ – композиционная алгебра, $\mathbb{A} \neq F$, то $\mathbb{A}$ обладает generic минимальным многочленом

$$\lambda^2 - t(x)\lambda + n(x)$$

степени 2, и каждый элемент a из $\mathbb{A}$имеет квадратичную норму $n(a)$. Среди композиционных алгебр только $F \otimes F$ не удается быть простой. Базис в $F \otimes F$ есть пара e_1, e_2 ортогональных идемпотентов, и generic элемент of $F \otimes F$ равен $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$. generic минимальный многочлен for $F \otimes F$ равен

$$\lambda^2 - (\xi_1 + \xi_2)\lambda + \xi_1 \xi_2,$$

и мы видим, что generic норма является произведением generic норм двух простых компонентов алгебры.

Результаты Джекобсона в [11] включают в себя:

(i) generic норма любой альтернативной алгебры с 1 допускает композицию;

(ii) generic норма любой простой альтернативной алгебры несократима (неприводима);

(iii) если N – форма степени $n > 0$ на простой альтернативной алгебре над полем, содержащим более, чем n элементов, то N допускает композицию тогда и только тогда, когда N является степенью (power) generic нормы (обобщение теоремы $1'$).

Теорема 2 полностью разрешает вопрос, какие невырожденные квадратичные формы допускают композицию. Как обстоит дело с формами более высоких степеней?

Если $\mathbb{A}$ – конечномерная *сепарабельная* альтернативная алгебра над F, то $\mathbb{A}$ является прямой суммой

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \oplus \cdots \mathbb{A}_r$$

простых идеалов $\mathbb{A}_i$, которые имеют центры, являющиеся сепарабельными расширениями F. Каждй простой компонент $\mathbb{A}_i$ либо ассоциативен, либо является алгеброй Кэли над своим центром. Произвольный элемент a из $\mathbb{A}$ может быть единственным образом записан как

$$a = a_1 + \ldots + a_r,$$

где a_i принадлежат $\mathbb{A}$. generic нормы $n_i(a_i)$ of $\mathbb{A}_i (i = 1, \ldots, r)$ допускают композицию и это дает произведение

$$n(a) = n_1(a_1) \cdots n_r(a_r),$$

которое является generic нормой a из $\mathbb{A}$. Это также дает

$$N(a) = [n_1(a_1)]^{f_1} \cdots [n_r(a_r)]^{f_r}, \tag{23}$$

где $f_1, \ldots, f_r$ – произвольные положительные целые числа, поскольку из

$$ab = (a_1 + \ldots + a_r)(b_1 + \ldots + b_r) = a_1 b_1 + \ldots a_r b_r \quad \mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{A}_r$$

вытекает

$$N(ab) = [n_1(a_1 b_1)]^{f_1} \cdots [n_r(a_r b_r)]^{f_r} =$$
$$= [n_1(a_1) n_1(b_1)]^{f_1} \cdots [n_r(a_r) n_r(b_r)]^{f_r} = N(a)N(b).$$

С очевидностью, N имеет степень

$$n = m_1 f_1 + \ldots + m_r f_r, \tag{24}$$

где m_i является степенью $\mathbb{A}_i$ (то есть, степенью generic нормы $n_i(a_i)$). Оказывается, что (23) является наиболее общим типом формы, которую мы должны рассматривать. (Если f_i из (23) являются неотрицательными целыми числами, форма N допускает композицию. Однако, N является вырожденной, согласно определению, которое мы вскоре дадим, за исключением ситуации, когда все f_i положительны).

Мы можем выразить (23) эквивалентным образом в терминах generic элемента. Взяв базис for $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{A}_r$, который приспособлен для разложения в прямую сумму, мы получим generic элемент

$$x = x_1 + \ldots + x_r,$$

где x_i – generic элемент of $\mathbb{A}_i (i = 1, \ldots, r)$. Тогда generic норма алгебры $\mathbb{A}$ равна

$$n(x) = n_1(x_1) \cdots n_r(x_r),$$

где $n_i(x_i)$, generic норма простой альтернативной алгебры $\mathbb{A}_i$, несократима (неприводима). Поэтому

$$N(x) = [n_1(x_1)]^{f_1} \cdots [n_r(x_r)]^{f_r},$$

есть произведение степеней (с положительными показателями степени f_i) несократимых множителей $n_i(x_i)$ of generic нормы $n(x)$ of $\mathbb{A}$; кроме того $N(1) = 1$. Другой способ это выразить – это сказать, что N, нормализованная условием $N(1) = 1$, имеет те же самые несократимые множители, что и generic норма of $\mathbb{A}$.

Пусть V – векторное пространство, возможно бесконечномерное, над полем F характеристики 0 или $p > n$. Тогда отображение

$$a \to N(a)$$

V на F называется *формой степени* n на V в случае

$$N(\alpha a) = \alpha^n N(a)$$

для любых $\alpha \in F, a \in V$, и "поляризованная форма"

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{1}{n!}\Big[N(a_1 + \ldots + a_n) - \sum_{i=1}^{n} N(a_1 + \ldots + \hat{a}_i + \ldots + a_n) \\ + \sum_{i<j} N(a_1 + \ldots + \hat{a}_i + \ldots + \hat{a}_j + \ldots + a_n) - \ldots + (-1)^{n-1} \sum N(a_i)\Big]\end{aligned}$$

является n-линейной, где запись $\hat{a}_i$ означает, что a_i опущен. Тогда $N(a) = (a, a, \ldots, a)$. Эта терминология согласуется с тем, что было в §1 для конечномерного случая, и дает легкое расширение на бесконечномерные пространства записи отображения (посредством) однородных многочленов. ??????????? F. Обобщая определение, данное в §2 для невырожденных квадратичных форм, мы назовем формы степени n *невырожденными* в случае, если из $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ для всех $a_2, \ldots, a_n \in V$ вытекает $a_1 = 0$.

Теорема 3. *Пусть $\mathbb{A}$ – алгебра с 1, возможно бесконечномерная, над полем F характеристики 0 или $p > n$. Необходимое и достаточное условие для существования на $\mathbb{A}$ невырожденной формы N степени $n > 0$, допускающей композицию,* *состоит в том, что $\mathbb{A}$ является конечномерной сепарабельной альтернативной алгеброй $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{A}_r$, $\mathbb{A}_i$ – простые алгебры степени m_i, где (24) удовлетворяется для положительных целых чисел $f_i (i = 1, \ldots, r)$. Более того, N является формой на $\mathbb{A}$, задаваемой посредством (23).*

Используя обобщение Джекобсона теоремы $1'$ на простые альтернативные алгебры, автор доказал теорему 3 с дополнительным предположением, что $\mathbb{A}$ является конечномерной [19]. Доказательство того, что $\mathbb{A}$ с необходимостью конечномерна, так же как смягчение ограничения на характеристику поля F, было дано МакКриммоном [14], и было результатом его значительно более общей теоремы, которую мы представим в §5.

В теореме 2 мы сказали, что только некоторые сепарабельные альтернативные алгебры $\mathbb{A}$ имеют невырожденную квадратичную форму, допускающую композицию, а именно, композиционные алгебры $\mathbb{F}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{O}$ размерности $1, 2, 4, 8$. Аналогично, условие (24) ограничивает возможность алгебры $\mathbb{A}$ обладать такой нормой степени n. К примеру, для $n = 3$ возможные размерности $\mathbb{A}$ есть $1, 2, 3, 5, 9$; для $n = 4$ размерности есть $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 16$.

§4. В данном разделе мы представим другой тип композиции, введенный Джекобсоном в его исследовании Йордановых алгебр [10].

Мы начнем опять с рассмотрения ассоциативной алгебры F_m всех матриц $m \times m$ над полем F (характеристики $\neq 2$). Мы хотим построить новую алгебру, используя те же элементы (матрицы $m \times m$), то же сложение и то же умножение на скаляр, но измененное умножение. Вместо использования обычного умножения ab двух матриц a, b из F_m, мы применим *Йорданово умножение*

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba). \tag{25}$$

Обозначим под F_m^+ алгебру, полученную из F_m посредством использования $a \cdot b$ из (25) в качестве умножения вместо ab. С очевидностью, F_m^+ коммутативна. Также $a \cdot a = a^2$. Мы будем писать $a^{\cdot 2}$ для $a \cdot a$, чтобы подчеркнуть, что мы образовываем умножение в F_m^+. Легко проверить, что

$$(a \cdot b) \cdot a^{\cdot 2} = a \cdot (b \cdot a^{\cdot 2}) \tag{26}$$

удовлетворяется для всех a, b из F_m^+.

Йордановой алгеброй $\mathbb{J}$ над F (характеристики $\neq 2$) является любая коммутативная алгебра над F, на которой удовлетворяется *Йорданово тождество* (26), где $a \cdot b$ обозначает абстрактное произведение на $\mathbb{J}$ и не обязано возникать из ассоциативного умножения как в (25). Алгебра F_m^+ – частный случай простой Йордановой алгебры. Все Йордановы алгебры являются строго степенно-ассоциативными.

Матрица (2) является порождающим элементом F_m^+ в той же мере, как и F_m. В K_m^+, где $K = F(\xi_{11}, \xi_{12}, \ldots, \xi_{mm})$, степени $x^{\cdot k}$ порождающего элемента x совпадают с соответствующими степенями x^k в K_m. Поэтому порождающий минимальный многочлен Йордановой алгебры F_m^+ и порождающая норма F_m^+ являются теми же, что и на ассоциативной алгебре F_m. Таким образом, порождающая норма элемента a в Йордановой алгебре F_m^+ является детерминантом $\det a$.

Следуя Джекобсону, запишем

$$\{aba\} = 2(a \cdot b) \cdot a - b \cdot a^{\cdot 2} \tag{27}$$

для a, b из любой Йордановой алгебры $\mathbb{J}$. В F_m^+ это равно

$$2(a \cdot b) \cdot a - b \cdot a^{\cdot 2} = \frac{1}{2}(ab + ba)a + \frac{1}{2}a(ab + ba) - \frac{1}{2}(ba^2 + a^2 b) = aba,$$

или
$$\{aba\} = aba \tag{28}$$
для всех a, b из F_m. Элемент слева в (28) дается посредством (27) в терминах Йорданова умножения в F_m^+; элемент справа в (28) есть ассоциативное умножение матриц в F_m. Тогда из (28) вытекает
$$det\,\{aba\} = (det\,a)^2 det\,b.$$
В самом деле, если $N(a) = \pm(det\,a)^s$, то
$$N(\{aba\}) = (N(a))^2 N(b) \tag{29}$$
для всех a, b из F_m^+. Если N – произвольная форма, удовлетворяющая (29) на Йордановой алгебре $\mathbb{J}$, то таковой является и форма $-N$, и мы можем рассматривать только одну из форм в паре $\pm N$. Если $\mathbb{J}$ содержит 1, и если F содержит больше, чем n различающихся элементов, мы можем нормализовать N степени $n > 0$, как это показано ниже. Так как $\{1b1\} = b$ по (27), мы имеем $N(1) = N(\{111\}) = (N(1))^2 N(1) = (N(1))^3$ в случае, если N удовлетворяет (29). Теперь из $N(1) = 0$ вытекает $N(b) = N(\{1b1\}) = (N(1))^2 N(b) = 0$ для всех b из $\mathbb{J}$, противоречие, и мы имеем $N(1) = \pm 1$. В одном случае мы имеем
$$N(1) = 1. \tag{30}$$
Если $N(1) = -1$, тогда $-N$ удовлетворяет (29) и (30), и мы можем заменить N на $-N$. Мы будем говорить. что форма N на Йордановой алгебре $\mathbb{J}$ с 1 допускает Йорданову композицию в случае, если справедливы как (29), так (30).

Мы можем повторить доказательство Теоремы 1 почти дословно (изменив (6) в K_m на $\{xzx\} = (det\,x)x$ вK_m^+) чтобы получить следующую версию этой теоремы для Йордановых алгебр:

Теорема $1''$. *Пусть N – форма степени $n > 0$ на Йордановой алгебре F_m^+ всех матриц $m \times m$ над произвольным полем F характеристики $\neq 2$, которое содержит больше, чем $2n$ различающихся элементов. Тогда N допускает Йорданову композицию тогда и только тогда, когда N является степенью порождающей нормы:*
$$N(a) = (det\,a)^s$$
для некоторого положительного целого числа s и для всех a из F_m^+.

Для любого a из Йордановой алгебры $\mathbb{J}$ определим линейный оператор U_a на $\mathbb{J}$ посредством
$$U_a : b \to \{aba\} = 2(a \cdot b) \cdot a - b \cdot a^{\cdot 2} \tag{31}$$
для всех b из $\mathbb{J}$. В частном случае $\mathbb{J} = F_m^+$, легко проверить, что
$$U_{\{aba\}} = U_a U_b U_a \tag{32}$$
для всех a, b из $\mathbb{J}$.
$$\{\{aba\}c\{aba\}\} = abacaba = \{a\{b\{aca\}b\}a\}$$
для всех a, b, c из F_m^+. Более того, (32) справедливо в любой Йордановой алгебре. Следовательно, любая n-мерная Йорданова алгебра $\mathbb{J}$ с 1 обладает формой N степени $2n$ допускающей Йорданову композицию (29) и (30), а именно
$$N(a) = det\,U_a$$

для всех a из $\mathbb{J}$.

$$N(\{aba\}) = det\,U_{\{aba\}} = det(U_aU_bU_a) = (det\,U_a)^2(det\,U_b) = (N(a))^2N(b)$$

для всех a, b из $\mathbb{J}$ согласно (32), в то время как из (31) вытекает, что $U_1 = I$, так что $N(1) = det\,I = 1$.

Было бы чрезмерным надеяться, что Йорданова алгебра, которая имеет невырожденную форму, допускающую Йорданову композицию, будет с необходимостью конечномерной, как было в случае Теорем 2 и 3. Пусть $\mathbb{M} \neq 0$ – векторное пространство, возможно бесконечномерное, над F, и пусть (u, v) – невырожденная симметричная билинейная форма на $\mathbb{M}$. Пусть $\mathbb{J}$ – векторное пространство прямой суммы

$$\mathbb{J} = F1 + \mathbb{M},$$

так что элементы a, b из $\mathbb{J}$ могут быть записаны единственным образом в форме

$$a = \alpha 1 + u, \qquad b = \beta 1 + v, \qquad \alpha, \beta \in F; \quad u, v \in \mathbb{M}. \tag{33}$$

Определим произведение $a \cdot b$ в $\mathbb{J}$ посредством

$$a \cdot b = (\alpha\beta + (u, v))1 + \alpha v + \beta u$$

для a, b из (33). Тогда $\mathbb{J}$ коммутативно и

$$a^{\cdot 2} = (\alpha^2 + (u, v))1 + 2\alpha u = 1\alpha a - u(a)1$$

где

$$N(a) = \alpha^2 - (u, u) \tag{34}$$

для всех a из $\mathbb{J}$. Мы имеем Йорданово тождество (26), так что $\mathbb{J}$ является Йордановой алгеброй, а именно *Йордановой алгеброй невырожденной формы* (u, v). Также

$$a^{\cdot 2} - 2\alpha a + n(a)1 = 0$$

для всех a из $\mathbb{J}$. Квадратичная форма $n(a)$ в (34) невырождена в $\mathbb{J}$ и допускает Йорданову композицию:

$$n(\{aba\}) = (n(a))^2 n(b)$$

для всех a, b из $\mathbb{J}$, и $n(1) = 1$. Если $M \neq 0$ конечномерно, то $\mathbb{J}$ имеет степень 2 и $n(a)$ является порождающей нормой a в $\mathbb{J}$, как это определено в §3. Если $\mathbb{M}$ конечномерно, то $n(a)$ дает пример невырожденной квадратичной формы, допускающей Йорданову композицию на бесконечномерной Йордановой алгебре $\mathbb{J}$.

Можно определить $\{aba\}$ в произвольной коммутативной алгебре $\mathbb{A}$ посредством (27). Тогда форма N в $\mathbb{A}$ с 1 называется допускающей Йорданову композицию в случае справедливости (29) и (30). МакКриммон доказал следующий аналог Теоремы 3 для коммутативных алгебр, допускающих Йорданову композицию.

Теорема $3'$. *Пусть $\mathbb{A}$ – конечномерная коммутативная алгебра с 1 над полем F характеристики 0 или $p > 2n$. Необходимое и достаточное условие существования в $\mathbb{A}$ невырожденной формы N степени $n > 0$, допускающей Йорданову композицию, состоит в том, что $\mathbb{A}$ является сепарабельной Йордановой алгеброй $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{A}_r$, $\mathbb{A}_i$ – простые степени m_i, где (24) удовлетворяется для положительных целых чисел $f_i, (i = 1, \ldots, r)$. Более того, форма N в $\mathbb{A}$ задается посредством (23).*

§5. МакКриммон широко обобщил две композиции, которые мы столь долго рассматривали, а именно, "ассоциативную" композицию

$$N(ab) = N(a)N(b)$$

в (7) и Йорданову композицию

$$N(\{aba\}) = (N(a))^2 N(b), \qquad N(1) = 1$$

в (29) и (30). Его работы [13], [14] и [15] используют дифференциальное исчисление рациональных отображений векторных пространств, усовершенствованный вариант метода Брауна и Кочера [5]. Для конечномерных векторных пространств возможно кратко описать эвристическим образом, что из себя представляет этот метод, однако мы не будем представлять расширение теории, данное МакКриммоном, на бесконечномерные пространства. Этот аппарат позволил ему получить полное решение его обобщения проблемы форм, допускающих композицию.

Пусть F – бесконечное поле. Пусть

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i u_i$$

является порождающим (generic) элементом n-мерной алгебры $\mathbb{A}$ над F и $K = F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Предположим, что $\mathbb{M}$ – конечномерное векторное пространство над F с базисом $\{v_1, \ldots, v_m\}$. *Рациональное отображение* G $\mathbb{A}$ на $\mathbb{M}$ получается специализацией элемента$y = \sum \eta_j v_j$ из $K \otimes_F \mathbb{M}$, где каждый $\eta_j = \eta_j(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ из K является рациональным относительно ξ $(j = 1, \ldots, m)$. Рациональное отображение G определено только для элементов $a = \sum \alpha_i u_i$, для которых знаменатели η_j не стремятся у нулю при специализации. *Рациональная функция* в $\mathbb{A}$ есть рациональное отображение $\mathbb{A}$ на F.

Если G – рациональное отображение $\mathbb{A}$ на $\mathbb{M}$, и u принадлежит $\mathbb{A}$, то дифференциальный оператор ∂_u, отображающий G на рациональное отображение $\partial_u G$ определяется эвристически как

$$\partial_u G|_a = \frac{\partial}{\partial \lambda} G(a + \lambda u)\Big|_{\lambda=0}$$

для любых a из $\mathbb{A}$ для которых определены отображения; то есть значение $\partial_u G(a) = \partial_u G|_a$ величины $\partial_u G$ на элементе a из $\mathbb{A}$ является коэффициентом λ в $G(a + \lambda u)$. Эвристически, $\partial_u G$ есть частная производная (или производная по направлению) G по направлению u. Тогда ∂_u обладает всеми обычными свойствами дифференциального оператора, включая *цепное правило*

$$\partial_u (G \circ H)|_a = \partial_v G|_{H(a)}, \qquad \text{где} \quad v = \partial_u H|_a.$$

Мы будем использовать факт, что из определения выше тривиально вытекает, что

$$\partial_u G|_a = G(u) \qquad \text{если} \quad G \qquad \text{(однородно) линейно,} \tag{35}$$

поскольку

$$\partial_u G|_a = au + ua \qquad \text{если} \quad G(a) = a^2. \tag{36}$$

Пусть $\mathbb{A}$ – алгебра с 1 (возможно, бесконечномерная) над бесконечным полем F. Форма N на $\mathbb{A}$ допускает композицию МакКриммона в случае, если существуют два рациональных отображения

$$E : a \to E_a, \qquad F : a \to F_a,$$

$\mathbb{A}$ в алгебру линейных операторов на $\mathbb{A}$, и две рациональные функции e, f на $\mathbb{A}$, удовлетворяющие

$$E_1 = F_1 = I, \tag{37}$$

$$\partial_u E|_1 = \alpha L_u, \quad \partial_u F|_1 = \beta R_u \qquad \text{для} \quad \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0 \in F, \tag{38}$$

$$N(bE_a) = e(a)N(b), \qquad N(bF_a) = f(a)N(b), \tag{39}$$

где бы ни отображение не было бы определено, и

$$N(1) = 1. \tag{40}$$

Любая форма N степени $n > 0$, допускающая "ассоциативную"композицию (7), допускает композицию МакКриммона. Мы можем положить $E_a = L_a,\ F_a = R_a,\ \alpha = \beta = 1,\ e = f = N$. Для левого и правого умножений L_a и R_a (однородно) линейны на a, так что (38) следует из (35). Мы уже видели свойство (40) при доказательстве Теоремы 1.

Если N – форма степени $n > 0$, допускающая Йорданову композицию (29) и (30) на Йордановой алгебре $\mathbb{J}$, то N допускает композицию МакКриммона. Мы можем положить $E_a = F_a = U_a$ как в (31), $\alpha = \beta = 2,\ e = f = N^2$. Тогда из (31) вытекает, что

$$U_a = 2R_a^2 - R_{a^{\cdot 2}}$$

для всех a из $\mathbb{J}$, где R_a является правым умножением

$$R_a : b \to bR_a = b \cdot a \qquad \text{для всех} \quad a\ \in \mathbb{J}.$$

То есть, используя обозначение, которое подчеркивает, что $R_{a^{\cdot 2}}$ является сложной функцией

$$R_{a^{\cdot 2}} = (R \circ G)(a), \qquad \text{где} \quad G(a) = a^{\cdot 2},$$

мы имеем

$$U = 2R^2 - R \circ G.$$

Тогда, так как ∂_u – дифференциальный оператор,

$$\begin{aligned}
\partial_u U|_1 = {} & 2\partial_u R^2|_1 - \partial_u (R \circ G)|_1 \\
= {} & 2((\partial_u R)R + R(\partial_u R))|_1 - \partial_v R|_{G(1)}, && \text{где} \quad v = \partial_u G|_1, \\
= {} & 2(\partial_u R|_1 R|_1 + R_1(\partial_u R|_1)) - \partial_{2u} R|_1 && \text{согласно (36)} \\
= {} & 4R_u - R_{2u} \\
= {} & 2R_u,
\end{aligned}$$

из чего вытекает (38), так как $\mathbb{J}$ коммутативна.

МакКриммон назвал форму G степени n на алгебре $\mathbb{A}$ с 1 невырожденной в случае, если симметричная билинейная форма

$$(u, v) = -\partial_u \partial_v log G|_1 \qquad (= G^{-2}(\partial_u G \cdot \partial_v G - G \cdot \partial_u \partial_v G)|_1)$$

является невырожденной. Это согласуется для характеристики 0 и $p > n$ с определение, данным в §3, когда G допускает композицию МакКриммона. Однако, это определение имеет то преимущество, что может быть использовано для любой характеристики. МакКриммон назвал произвольную невырожденную форму N, которая допускает композицию в смысле (37) – (40) на алгебре $\mathbb{A}$ с 1, *нормой*на $\mathbb{A}$, а любую такую $\mathbb{A}$ – *нормированной алгеброй*.

Некоммутативная Йорданова алгебра $\mathbb{A}$ над F является алгеброй над F, в которой удовлетворяется тождество Йордана (26), вместе с законом эластичности

$$(a \cdot b) \cdot a = a \cdot (b \cdot a) \qquad \text{для всех} \quad a, b \in \mathbb{A},$$

которое является избыточным, если $\mathbb{A}$ содержит 1. Любая альтерантивная алгебра или (коммутативная) Йорданова алгебра является некоммутативной Йордановой алгеброй. Таковой является любая *квазиассоциативная алгебра*, как она была определена Албертом в [2]. Любая некоммутативная Йорданова алгебра является строго степенно-ассоциативной, так что, если она конечномерна и содержит 1, теория порождающих минимальных многочленов выполняется. МакКриммон довел свою теорию до "*обобщенно алгебраических алгебр*", вообще говоря, бесконечномерных над F.

Теорема 4. $\mathbb{A}$ *является нормированной алгеброй (вообще говоря, бесконечномерной) над бесконечным полем* F *характеристики* $\neq 2$ *тогда и только тогда, когда она представляет собой сепарабельную некоммутативную Йорданову алгебру, равную прямой сумме* $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{A}_r$ *конечного числа простых идеалов* $\mathbb{A}_i$*, которые являются либо* (i)*степени 2 (и возможно бесконечной размерности) над своим центром*

(ii) *конечномерными квазиассоциативными алгебрами, либо*

(iii) *конечномерными (коммутативными) Йордановыми алгебрами.*

Если N *– норма на* $\mathbb{A}$*, то* N *имеет те же несократимые делители, что и порождающая норма* $\mathbb{A}$*.*

Эта теорема дает полное решение проблемы, какие алгебры имеют формы, допускающие композицию МакКриммона, и чему эти формы равны [14,15,16].

В случае, когда форма N степени n допускает ассоциативную композицию (7) на $\mathbb{A}$, МакКриммон может исключить необходимость бесконечного поля F, требуя лишь, что F содержит больше, чем n различающихся элементов. Тогда $\mathbb{A}$ является альтернативной и в силу следствия из Теоремы 4 $\mathbb{A}$ конечномерна, из чего вытекает Теорема 3 со слабым предположением, что F содержит более, чем n различных элементов.

Как это часто бывает в математике, мы разрешили старую проблему посредством применения новых методов в более общей ситуации.

References

1. A. A. Albert. Quadratic forms permitting composition. Ann. of Math. **43** (1942), 161-177.

2. A. A. Albert. Power-associative rings. Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 552-593.

3. F. van der Blij. History of the octaves. Simon Stevin **34** (1961), 106-125.

4. M. Bôcher. "Introduction to Higher Algebra." Macmillan, New York, 1929.

5. H. Braun and M. Koecher. "Jordan-Algebren." Springer-Verlag, Berlin, 1966.

6. L. E. Dickson. On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem. Ann. of Math. **20** (1919), 155-171.

7. L. E. Dickson. "Algebras and their Arithmetics." University of Chicago Press, Chicago, 1923.

8. A. Hurwitz. Uber die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1898), 309-316.

9. N. Jacobson. Composition algebras and their automorphisms. Rend. Circ. Mat. Palermo **7** (1958), 55-80.

10. N. Jacobson. Some groups of linear transformations defined by Jordan algebras, I. J. reine angew. Math. **201** (1959), 178-195.

11. N. Jacobson. Generic norm of an algebra. Osaka Math. J. **15** (1963), 25-50.

12. I. Kaplansky. Infinite-dimensional quadratic forms permitting composition. Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 956-960.

13. K. McCrimmon. Norms and noncommutative Jordan algebras. Pacific J. Math. **15** (1965), 925-956.

14. K. McCrimmon. A proof of Schafer's conjecture for infinite-dimensional forms admitting composition. J. Algebra **5** (1967), 72-83.

15. K. McCrimmon. Genetically algebraic algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **127** (1967), 527-551.

16. J. M. Osborn. A norm on separable noncommutative Jordan algebras of degree 2. Proc, Amer. Math. Soc. **20** (1969), 423-425.

17. R. D. Schafer. On cubic forms permitting composition. Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 917-925.

18. R. D. Schafer. Cubic forms permitting a new type of composition. J. Math. Mech. **10** (1961), 159-174.

19. R. D. Schafer. On forms of degree n permitting composition. J. Math. Mech. **12** (1963), 777-792.

20. R. D. Schafer. "An Introduction to Nonassociative Algebras." Academic Press, New York, 1966.