О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ ТОПОЛОГИИ: ОБЗОР СОВРЕМЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Р. В. Михайлов

Harish-Chandra Research Institute, Jhunsi, Allahabad, India
rmikhailov@mail.ru

1. Введение

Физическая интуиция выделяет четыре измерения как естественно соответствующие материальной реальности. И практически во всех многомерных современных физических теориях четырехмерность играет особую роль. Многомерные квантовые теории поля, теории струн часто рассматриваются вместе со своими компактификациями, т. е. в качестве основного пространства, описывающего реальность, берется некоторое четырехмерное пространство и умножается на многомерное компактное многообразие. Таким путем получается и пятимерная модель Калуцы-Клейна, и десятимерные теории суперструн.

Интересно, что с чисто математической точки зрения размерность четыре оказывается самой сложной. С первого взгляда, это противоречит нашим интуитивным представлениям о понятии размерности: ведь, чем выше размерность, тем появляется больше сложностей. Однако, это не всегда так. Новые размерности часто дают новую свободу действий. Естественно, что при этом должна возникнуть некая середина, в которой необходимая свобода действий отсутствует, а маломерные методы слабо применимы. В топологии эта середина и есть размерность 4.

Цель этой заметки – сделать небольшой обзор некоторых проблем, возникающих в 4-мерной топологии.

2. Проблема s-кобордизма

Одним из основных вопросов геометрической топологии является проблема классификации многообразий, принадлежащих тем или иным категориям, с соответствующими отношениями эквивалентности. Так, при работе в топологической категории встает вопрос классификации топологических многообразий, например, в предположении о компактности, связности и замкнутости с точностью до гомеоморфизма. В размерности один – это лишь окружности, в размерности два мы приходим к полной классификации: каждое связное замкнутое компактное многообразие гомеоморфно двумерной сфере с приклеенными ручками и листами Мебиуса. При этом, фундаментальные группы этих многообразий являются полными топологическими инвариантами. В размерности три вопрос о классификации перерастает в глобальную проблему: уже существование связного односвязного трехмерного многообразия, не гомеоморфного трехмерной сфере, представляет собой известную проблему Пуанкаре.

Интересно, что в размерности ≥ 5, многие трудности, возникающие в меньших размерностях, преодолеваются. Это прежде всего связано с концепцией "общего положения" в многомерных пространствах. Говоря неформально, во многих важных случаях, когда возникают самопересечения комплексов внутри многообразий, малыми шевелениями можно их устранить. В малых же размерностях этого сделать нельзя.

Введем одно из центральных отношений эквивалентности топологии многообразий, так называемую s-кобордантность. Пусть M_1 и M_2 – некоторые n-мерные многообразия, говорим, что они *кобордантны*, если существует $n+1$-мерное многообразие W, такое что $\partial W = M_1 \cup M_2$. Далее, если вложения $M_i \to W$ являются гомотопическими эквивалентностями, то этот кобордизм называется *h-кобордизмом*. Любая гомотопическая эквивалентность представляет элемент группы Уайтхеда, зависящей только от фундаментальной группы данного многообразия (или, в общем, клеточного комплекса). Группа Уайтхеда может быть определена как K_1-функтор от целочисленного группового кольца фундаментальной группы, профакторизованный по действию самой группы. При этом, гомотопическая эквивалентность представляет тривиальный элемент группы Уайтхеда тогда и только тогда, когда она гомотопна композиции элементарных клеточных расширений и сдавливаний, т. е. так называемой простой гомотопической эквивалентности. h-кобордизм, при котором гомотопические эквивалентности являются простыми, называется *s-кобордизмом*. В частности, любая гомотопическая эквивалентность между односвязными многообразиями гомотопна простой.

Основным результатом многомерной топологии многообразий является следующая теорема (см. [1, 2]).

Теорема об s-кобордизме: *Пусть $n \geq 5$, тогда связный h-кобордизм W между n-мерными многообразиями M_1 и M_2 гомеоморфен прямому произведению $W \equiv M_1 \times I$, если и только если этот кобордизм является s-кобордизмом.*

В частности, если мы рассматриваем односвязные многообразия, то любой h-кобордизм между ними представляет собой прямое произведение. Из этого факта вытекает многомерная гипотеза Пуанкаре, утверждающая, что в размерности ≥ 5 гомотопическая сфера гомеоморфна стандартной сфере. В размерности 4 доказательство многомерной теоремы об s-кобордизме не проходит и аналогичное утверждение представляет собой открытую проблему.

Проблема. *Верна ли теорема об s-кобордизме в размерности* 4? Доказательство многомерной теоремы об s-кобордизме основано на разложении многообразия W на ручки, и дальнейшей их перегруппировке, сокращениям и так далее, последовательному приведению данного многообразия к структуре простого произведения M_i на отрезок. Главную роль в данном методе играет трюк Уитни. Это метод, позволяющий уничтожать точки пересечения вложенных подмногообразий, посредством вложенного двумерного диска (диска Уитни) (подробнее см. [1]). Основной проблемой распространения многомерного доказательства на случай четырехмерных многообразий является невозможность применения трюка Уитни в размерности 4. Действительно, как известно, любой двумерный комплекс может быть вложен в пятимерное пространство, и любой погруженный диск может быть произотопирован во вложенный. Однако, в размерности 4, это уже не верно: мы можем рассматривать диск Уитни лишь погруженным. Этот простой факт прямо рушит все многомерное доказательство теоремы об s-кобордизме в случае многообразий размерности 4.

Для преодоления трудностей, связанных с погруженным диском Уитни, были созданы новые методы. Наиболее эффективным оказался метод, предложенный А. Кассоном. Суть метода заключалась в последовательном заклеивании точек самопересечения все новыми погруженными дисками. Этот процесс можно продолжить бесконечно, при этом однако, окрестность полученного 2-комплекса будет представлять ручку, гомотопически эквивалентную стандартной. Эта идея была использована М. Фридманом для доказательства 4-мерной топологической гипотезы Пуанкаре [3].

В целом, как отмечалось выше, проблема существования аналога теоремы об s-кобордизме в размерности 4 остается открытой. Однако, в 1996 г. М. Фридман и П. Тайхнер доказали аналог этой теоремы в классе 4-мерных многообразий, фундаментальные группы которых имеют субэкспоненциальный рост (вернее, рост не выше 2^n) [4].

3. Фальшивые и экзотические 4-мерные многообразия

Встает естественная задача сравнения отношений имеющихся эквивалентностей в классе многообразий фиксированной размерности: гомотопической эквивалентности, гомеоморфности, диффеоморфности. Так, вопрос о том верно ли, что два непрерывно гомеоморфных гладких многообразия являются диффеоморфными, имеет положительный ответ в размерностях меньших четырех. Ситуация в размерности начиная с четвертой оказывается более сложной.

Говорят, что многообразие N является *фальшивой копией* многообразия M, если N и M просто гомотопически эквивалентны, но не гомеоморфны. И N называется *экзотической копией* M, если N и M гомеоморфны, но не диффеоморфны.

Вопрос о существовании фальшивых и экзотических сфер представляет собой топологический и гладкий варианты гипотезы Пуанкаре. Гладкая гипотеза Пуанкаре верна в размерности меньше четырех: не существует экзотических трехмерных (и меньшемерных) сфер. Рассмотрение многомерного случая приводит к красивой теории экзотических сфер: замечательный результат Милнора утверждает, что существует 28 7-мерных многообразий, гомеоморфных 7-мерной сфере, но не диффеоморфной ей. Самым интригующим остается опять-таки 4-мерный случай. Это единственная размерность, в которой существование экзотических сфер остается открытой проблемой!

Не менее удивительной оказалась ситуация с экзотическими копиями пространств $\mathbb{R}^n$. В размерности $n \neq 4$ было известно, что экзотических $\mathbb{R}^n$ не существует и вопрос долгое время оставался открыт в размерности 4. В 80-е годы благодаря результатам Фридмана и Дональдсона было доказано существование бесконечного числа гладких, попарно недиффеоморфных 4-мерных многообразий, гомеоморфных $\mathbb{R}^4$. При этом, в доказательстве были существенно использованы методы математической физики: инстантоны, связности Янга-Миллса и др. (см. [5]). Несколько более подробно. Одним из основных инвариантов односвязных 4-мерных топологических многообразий является форма пересечений – симметрическая билинейная форма, определенная на вторых гомологиях многообразия. Классическая теорема Уайтхеда утверждает, что два односвязных ориентированных замкнутых гладких 4-многообразия гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда их формы пересечений изоморфны. В связи с этим представлялся актуальным вопрос о перечислении симметрических билинейных форм, реализуемых как формы пересечений 4-многообразий. М. Фридман показал, что любая симметрическая билинейная форма может быть реализована как форма пересечения компактного односвязного 4-многообразия и что имеется не более двух многообразий с заданной формой. Дональдсон перечислил формы пересечения для гладких многообразий – их оказалось ограниченное число. Отсюда и вытекает существование экзотических гладких структур на $\mathbb{R}^4$. Структура экзотических $\mathbb{R}^4$ весьма сложна и занимает видное место в современных исследованиях. Остаются открытыми многие вопросы, связанные в подобными многообразиями. В частности, существует ли экзотическое $\mathbb{R}^4$, такое, что оно не разбивается собственно вложенным $\mathbb{R}^3$ на два экзотических куска (проблема 4.43 (D) [6]).

Построение фальшивых четырехмерных многообразий требует применения иных техник. Как указывалось выше, фальшивых четырехмерных сфер не существует (четырехмерная топологическая гипотеза Пуанкаре). Часто, вопрос о гомеоморфности двух гомотопных 4-многообразий является очень сложным, и проходя через топологическую категорию, доказывается их недиффеоморфность. Одним из первых подобных примеров 4-многообразий является конструкция Кэппела-Шейнсона (см. [2]) фальшивого проективного пространства $\mathbb{R}P^4$, гомотопически эквивалентного, но не диффеоморфного $\mathbb{R}P^4$. Это многообразие не является кусочно-линейно гомеоморфным $\mathbb{R}P^4$.

В заключении приведем еще некоторые простые по формулировке открытые проблемы в размерности 4, относящиеся к вопросу экзотических структур. Множество открытых проблем в данной тематике, как классических, так и современных, можно найти в списке [6] (см. также [7]).

Проблема (4.77 [6]): Верно ли, что произведение экзотического $\mathbb{R}^4$ на R^1 диффеоморфно $\mathbb{R}^5$?

Проблема (4.86 [6]): Верно ли, что все гладкие замкнутые 4-многообразия имеют более одной гладкой структуры? (Обобщение гладкой 4-мерной гипотезы Пуанкаре).

Проблема (4.87 [6]): Верно ли, что каждое некомпактное гладкое 4-многообразие имеет несчетное число гладких структур?

4. Гипотеза Шенфлиса

Приведем еще одну проблему, имеющую решение во всех размерностях, кроме четырех. Эта проблема связана с заузливанием в коразмерности 1. Напомним, что вложение $f : M^m \to N^{m+n}$ называется *локально-плоским*, если образ каждой его точки в N^{m+n} обладает окрестностью U, такой что пара (Imf, N^{m+n}) гомеоморфно (кусочно-линейно, если мы работаем в соответствующей категории) паре $(D^m \times D^n, D^m \times \{0\})$.

Гипотеза: *Пусть $f : S^n \to S^{n+1}$ является кусочно-линейным локально-плоским вложением. Тогда $S^{n+1} \setminus Imf$ состоит из двух компонент, замыкание каждого из которых представляет собой кусочно-линейный n-мерный шар.*

Грубо говоря, гипотеза утверждает, что n-мерная сфера не может заузливаться в $n+1$-мерной. Оказывается, что в размерностях $n+1 \neq 4$ эта гипотеза оказывается верной. А в размерности 4, опять таки, не проходят методы, применимые в меньшей и больших размерностях.

Завершая данную заметку, еще раз отметим, что можно найти мало областей математики, изучение которых требует столь разнообразных методов. Проблемы 4-мерной топологии приводят к сложным вопросам теории групп. Это теория роста групп, проблемы типа Андрюса-Кертиса, нижних центральных рядов в группах. Также здесь применяются многомерные методы, например, точные последовательности хирургии, и методы теории узлов и зацеплений. Таким образом, размерность четыре с топологической точки зрения – единственная размерность, где сталкиваются столь разные техники и появляются вопросы, казалось бы, не относящиеся друг к другу. А решение многих из них потребует развития еще более удивительных техник алгебры, геометрии и топологии.

Литература

[1] К. Рурк и Б. Сандерсон: *Введение в кусочно-линейную топологию*, Мир, М. 1974.

[2] Р. Мандельбаум: *Четырехмерная топология*, Мир, М. 1981.

[3] M. H. Freedman and F. Quinn: *Topology of 4-manifolds*, Princeton University Press, 1990.

[4] M. H. Freedman and P. Teichner: *4-Manifold topology I: Subexponential groups*, Invent. Math. **122**(3), pp. 509-529.

[5] D. Freed and K. Uhlembeck: *Instantons and four-manifolds*, Springer, N.Y. 1990.

[6] R. Kirby: *Problems in low-dimensional topology*, 1996.

[7] F. Quinn: *Problems in low-dimensional topology*, Science Bulletin of Josai University, **2**, pp. 97-104, 1997.